УДК 519.2

Ю. С. ХАРИН, М. К. ЖУРАК

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОЙ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ

НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь,
e-mail: kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com

Исследованы асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. Доказана асимптотическая нормальность и найдена асимптотическая ковариационная матрица построенных оценок. Представлены результаты компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: пространственно-временные данные, цепь Маркова, оценки максимального правдоподобия, информационная матрица Фишера, ковариационная матрица.

Yu. S. KHARIN, M. K. ZHURAK

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATORS OF THE PARAMETERS FOR A BINOMIAL CONDITIONALLY AUTOREGRESSIVE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DATA

Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com

Asymptotic properties of the maximum likelihood estimators of parameters for a binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data are studied. The asymptotic normality is proved and the asymptotic covariance matrix is found for the estimators. The results of computer experiments are presented.

Keywords: spatio-temporal data, Markov chains, maximum likelihood estimators, Fisher information matrix, covariance matrix.

Введение. Моделирование и анализ пространственно-временных данных является актуальной научной задачей. В работе [1] байесовская пространственно-временная модель применялась для анализа случаев заболевания раком; в [2] байесовская пространственно-временная геостатическая модель использовалась для решения задач при большом объеме данных. В [3] решается задача предсказания скорости ветра на основе пространственно-временных данных; в [4] изучена пуассоновская авторегрессионная модель, которая была применена для анализа финансовых данных фондовых операций.

При вероятностно-статистическом моделировании и анализе пространственно-временных данных возникают трудности двух типов. Во-первых, это необходимость совместного учета временных и пространственных зависимостей регистрируемых наблюдений, которая приводит к сложным моделям, содержащим много априорно неизвестных параметров. Во-вторых, это вычислительные проблемы, вызванные необходимостью обработки больших массивов пространственно-временных данных для достижения приемлемых уровней точности статистических оценок параметров, решений и прогнозов. В связи с этим в настоящее время большинство опубликованных работ имеет эмпирический характер: временные и пространственные зависимости расматриваются по отдельности либо для этой цели приспосабливаются некоторые «близкие» модели без теоретического их обоснования.

В статье [5] разработана биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и предложен алгоритм вычисления оценок максимального правдоподобия (ОМП), однако теоретический анализ свойств построенных ОМП не проводился. В данной работе продолжаются начатые в [5] исследования: решается задача асимптотического анализа свойств построенных ОМП.

1. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных. Определим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных данных, следуя [5]. Введем обозначения: (Ω, F, P) – вероятностное пространство; $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел; $\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел; $I\{H\}$ – индикаторная функция события H; $s \in S = \{1, 2, ..., n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее называть их сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; n – число сайтов; $t \in \{1, 2, ..., T\}$ – дискретное время; $x_{s,t} \in \{0,1,\ldots,N\} = A$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени t в сайте s; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \le t-1\} \subset F$ – σ-алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,t} \ge 0$, $j = 1,...,m$ – наблюдаемый (известный) набор значений m внешних факторов в момент времени t; $L(\xi)$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ; $\mathbf{E}\{\cdot\}$, $\mathbf{D}\{\cdot\}$, $\mathbf{cov}\{\cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации случайных величин соответственно; $\boldsymbol{Bi}(\cdot; N, p)$ – биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in \boldsymbol{N}$, $0 \le p \le 1$ для случайной величины ξ:

$$\mathbf{P}\{\xi = l\} = \boldsymbol{Bi}(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1-p)^{N-l}, \quad l \in A, \ L\{\xi\} = \boldsymbol{Bi}(\cdot; N, p), \tag{1}$$

где $C_N^l = \left(N!/\left(N-l\right)!l!\right)$.

Предполагается, что при фиксированной предыстории $F_{<t} = \{x_{s,\tau} : s \in S, \tau \le t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}$ условно независимы, причем

$$L\{x_{s,t} \mid F_{<t}\} = \boldsymbol{Bi}(\cdot; N, p_{s,t}), \tag{2}$$

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j} z_{j,t}, \quad s \in S, t \in \boldsymbol{Z}, \tag{3}$$

где $a_s = \left(a_{s,1}, a_{s,2}, \ldots, a_{s,n}\right)' \in R^n$, $b_s = \left(b_{s,1}, \ldots, b_{s,m}\right)' \in R^m$, $\theta_s = (a_s{}', b_s{}')' \in R^{n+m}$, $s \in S$, $\theta = (\theta_1{}', \ldots, \theta_n{}')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор-столбец параметров модели, штрих обозначает транспонирование.

Справедливы следующие полезные выражения для вычисления вероятности $p_{s,t}$, вытекающие из (3):

$$p_{s,t} = p_s\left(X_{t-1}, Z_t\right) ::= \frac{\exp\left(a_s{}' X_{t-1} + b_s{}' Z_t\right)}{1+\exp\left(a_s{}' X_{t-1} + b_s{}' Z_t\right)} = \frac{\exp\left(\theta_s{}' Y_t\right)}{1+\exp\left(\theta_s{}' Y_t\right)}, s \in S, t \in \boldsymbol{Z}, \tag{4}$$

$$1 - p_{s,t} = \left(1+\exp\left(\theta_s{}' Y_t\right)\right)^{-1}, \ \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \exp\left(\theta_s{}' Y_t\right),$$

где $Z_t = \left(z_{1,t}, z_{2,t}, \ldots, z_{m,t}\right)' \in R^m$ – вектор-столбец, задающий значения m внешних факторов в момент времени t; $X_t = \left(x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}\right)' \in A^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления по всем n сайтам в момент времени $t \in \boldsymbol{Z}$; $Y_t = \left(X_{t-1}{}', Z_t{}'\right)' \in R^{n+m}$ – составной вектор-столбец «предопределенных» переменных.

Обозначим $L = \left\{l_j = \left(l_{1,j}, \ldots, l_{n,j}\right)' \in A^n : j = 1, 2, \ldots, \left(N+1\right)^n\right\}$ – лексикографически упорядоченное множество $\nu = \left(N+1\right)^n$ всевозможных значений, которые принимает вектор X_t: $|L| = \nu$.

2. Вероятностные свойства биномиальной условно авторегрессионной модели. Установим ряд свойств биномиальной условно авторегрессионной модели, которые понадобятся при асимптотическом анализе свойств ОМП параметров этой модели.

Теорема 1 [5]. *Если имеет место модель* (2), (3)*, то наблюдаемый векторный временной ряд* X_t *является конечной неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L, матрицей вероятностей одношаговых переходов* $Q = Q(\theta,t) = \left(q_{I,J}(\theta,t)\right) \in [0,1]^{\nu\times\nu}$, $I = \left(I_s\right), J = \left(J_s\right) \in L$:

$$q_{I,J} = q_{I,J}(\theta,t) ::= \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \left(\exp\left(a_s' I + b_s' Z_{t-1}\right)\right)^{J_s} \left(1 + \exp\left(a_s' I + b_s' Z_{t-1}\right)\right)^{-N}, \ t \in \boldsymbol{Z}. \qquad (5)$$

Отметим, что в условиях теоремы 1, если вектор внешних факторов $Z_t = Z = \left(z_1,\ldots,z_m\right)' \in R^m$ не зависит от t, то матрица вероятностей одношаговых переходов (5) не зависит от t и цепь Маркова является однородной [6]:

$$Q(\theta) = \left(q_{I,J}(\theta)\right) \in [0,1]^{\nu\times\nu},$$
$$q_{I,J}(\theta) = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} \left(\exp\left\{a_s' I + b_s' Z\right\}\right)^{j_s} \left(1 + \exp\left\{a_s' I + b_s' Z\right\}\right)^{-N}, \quad I,J \in L. \qquad (6)$$

Как доказано в [5], если имеет место модель (2), (3) и $Z_t = Z = \left(z_1,\ldots,z_m\right)' \in R^m$ не зависит от t, то для n-мерной конечной векторной цепи Маркова X_t выполняется условие эргодичности и существует единственное стационарное распределение вероятностей $\pi = \left(\pi_I\right) \in [0,1]^{\nu}$, являющееся решением системы уравнений:

$$Q'\pi = \pi, \ \sum_{I \in L} \pi_I = 1. \qquad (7)$$

Лемма 1. *При фиксированной предыстории* X_{t-1} *вектор-столбец условного математического ожидания равен*

$$\mathbf{E}\{X_t \,|\, X_{t-1}\} = \left(Np_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\right) \in R^n,$$

а условная ковариационная матрица принимает диагональный вид:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t \,|\, X_{t-1}\} = \operatorname{diag}\left\{Np_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\right)\right\} \in R^{n\times n}.$$

Доказательство. В силу модели (2), (3) и свойств биномиального распределения условное математическое ожидание случайной величины $x_{i,t}$ при условии X_{t-1} имеет вид

$$\mathbf{E}\{x_{i,t} \,|\, X_{t-1}\} = Np_i\left(X_{t-1}, Z_t\right), i = 1,\ldots,n.$$

Найдем представление условной ковариационной матрицы $\mathbf{cov}\{X_t, X_t \,|\, X_{t-1}\} = \left(c_{i,j}\right) \in R^{n\times n}$, где $c_{i,j} = \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} \,|\, X_{t-1}\} = \mathbf{E}\left\{\left(x_{i,t} - \mathbf{E}\left\{x_{i,t} \,|\, X_{t-1}\right\}\right)\left(x_{j,t} - \mathbf{E}\left\{x_{j,t} \,|\, X_{t-1}\right\}\right) \,|\, X_{t-1}\right\}$. Для этого рассмотрим два случая. Если $i = j$, то дисперсия $c_{i,i} = \mathbf{D}\{x_{i,t} \,|\, X_{t-1}\} = Np_{i,t}\left(1 - p_{i,t}\right)$.

Так как в условиях модели (2), (3) при фиксированной предыстории X_{t-1} случайные величины $x_{i,t}, x_{j,t}, i \neq j$, условно независимы, то согласно [7] ковариация $c_{i,j} = 0$.

Таким образом, матрица $\mathbf{cov}\{X_t, X_t \,|\, X_{t-1}\}$ является диагональной с диагональными элементами $Np_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\right)$.

Лемма 2. *Если имеет место модель* (2), (3), *то случайный процесс* X_t *является невырожденным при любых ограниченных значениях коэффициентов* $\left\{\theta_s\right\}$ *и* $\left\{z_{i,t}\right\}$, *т. е. в биномиальном распределении* (2)

$$0 < p_{s,t} < 1 \text{ для всех } s \in S, t \in \boldsymbol{Z}.$$

Доказательство. Из (4) имеем:

$$p_{s,t} = \frac{\exp\left(\theta_s{}'Y_t\right)}{1+\exp\left(\theta_s{}'Y_t\right)} = \frac{1}{1+\exp\left(-\theta_s{}'Y_t\right)},\ Y_t = \left(X_{t-1}{}', Z_t{}'\right)' \in R^{n+m}, t \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $x_{s,t} \in \{0,1,...,N\}$, то при ограниченных значениях $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$ величина $|\theta_s{}'Y_t| < \infty$, следовательно, $0 < p_{s,t} < 1$ для всех $s \in S$.

Лемма 3. *Если имеет место модель* (2), (3), *то при любых ограниченных значениях коэффициентов* $\{\theta_s\}$ *и* $\{z_{i,t}\}$ *ковариационная матрица* $\mathbf{cov}\{X_t, X_t\}$ *является положительно определенной и принимает следующий вид:*

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = N\,\mathrm{diag}\left\{p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\left(1-p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\right)\right\} + D \in R^{n\times n},$$

$$D = \left(d_{ij}\right),\ d_{ij} = N^2\mathbf{cov}\left\{\left(1+\exp\left(-\theta_i Y_t\right)\right)^{-1}, \left(1+\exp\left(-\theta_j Y_t\right)\right)^{-1}\right\}, i,j = 1,...,n.$$

Доказательство. Вычислим ковариационную матрицу, используя формулу полного математического ожидания:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = \mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t\}\right)'\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t\}\right)' | X_{t-1}\right\}\right\} \equiv$$

$$\equiv \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\} - \left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\} - \left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\right)' | X_{t-1}\right\}\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)' | X_{t-1}\right\}\right\} -$$

$$-\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)' | X_{t-1}\right\}\right\} -$$

$$-\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)' | X_{t-1}\right\}\right\} +$$

$$+\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)' | X_{t-1}\right\}\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\mathbf{cov}\{X_t, X_t|X_{t-1}\}\right\} - \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)|X_{t-1}\right\}\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)'\right\} -$$

$$-\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)' | X_{t-1}\right\}\right\} +$$

$$+\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right)'\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{cov}\{X_t, X_t|X_{t-1}\}\right\} + D,$$

где $D = \mathbf{cov}\left\{\mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}, \mathbf{E}\{X_t|X_{t-1}\}\right\}$. Пользуясь леммой 1 и формулой (4), получим:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = N\,\mathrm{diag}\left\{\mathbf{E}\left\{p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\left(1-p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\right)\right\}\right\} + D, \tag{8}$$

где $D = \left(d_{ij}\right),\ d_{ij} = N^2\mathbf{cov}\left\{\left(1+\exp\left(-\theta_i Y_t\right)\right)^{-1}, \left(1+\exp\left(-\theta_j Y_t\right)\right)^{-1}\right\}, i,j = 1,...,n.$

При любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$, в силу леммы 2, диагональная матрица $N\,\mathrm{diag}\left\{\mathbf{E}\left\{p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\left(1-p_i\left(X_{t-1}, Z_t\right)\right)\right\}\right\}$ является положительно определенной. В силу того, что D – ковариационная матрица, она неотрицательно определена [7]. Тогда из (8) и того факта [8], что сумма положительно определенной и неотрицательно определенной матриц есть матрица положительно определенная, следует, что матрица $\mathbf{cov}\{X_t, X_t\}$ положительно определена.

3. Оценки максимального правдоподобия параметров модели и их асимптотические свойства. Примем обозначения: $\theta = (\theta_1', \ldots, \theta_n')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор $n(n+m)$ параметров, подлежащих оцениванию; $\mathbf{O}_m$ – m-нулевой вектор-столбец.

В рамках модели (2), (3) логарифмическая функция правдоподобия для T наблюдений $\{X_t : t = 1, 2, ..., T\}$ имеет аддитивный по $\theta_1, \ldots, \theta_n$ вид [5]:

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^{n} l_s(\theta_s), l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^{T} \left(x_{s,t}\theta_s' Y_t - N \ln\left(1 + \exp\left(\theta_s' Y_t\right)\right) + \ln C_N^{x_{s,t}} \right).$$

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta} \in R^{n(n+m)}$ определяется как решение следующей экстремальной задачи [5]:

$$l(\theta) \to \max_{\theta}. \tag{9}$$

Лемма 4. *Пусть $\xi \in R^k$ – некоторый случайный вектор, $C(\xi) \in R^N$ – некоторый случайный вектор-столбец, а $\alpha(\xi) > 0$ – положительная случайная величина, зависящие от ξ. Тогда, если матрица $\mathbf{E}\{C(\xi)C'(\xi)\}$ положительно определена, то таким же свойством обладает матрица $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}$.*

Доказательство. Пусть $z \in R^N$ – произвольный неслучайный ненулевой вектор. Проверим выполнение условия $z'\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}z > 0$, характеризующего положительную определенность матрицы:

$$z'\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}z = \mathbf{E}\{\alpha(\xi)z'C(\xi)C'(\xi)z\}.$$

Поскольку в условиях леммы матрица $\mathbf{E}\{C(\xi)C'(\xi)\} \succ 0$ является положительно определенной, то для произвольного ненулевого вектора выполняется $\mathbf{E}\{z'C(\xi)C'(\xi)z\} > 0$. Так как $\alpha(\xi) > 0$, то в силу свойств математического ожидания $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)z'C(\xi)C'(\xi)z\} > 0$. Таким образом, выполняется критерий положительной определенности для интересующей нас матрицы $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}$.

Теорема 2. *Если имеет место модель* (2), (3), $m = 1$, $z_{1t} = z \neq 0$ *не зависит от t и цепь Маркова $X_t \in L$ является стационарной, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in R^1$ информационная матрица Фишера является невырожденной и имеет следующий блочно-диагональный вид:*

$$G = N \operatorname{diag}\left\{ \boldsymbol{E}\left\{ Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z)\left(1 - p_i(X_{t-1}, z)\right) \right\} \right\}, Y_t = (X_{t-1}', z)', i = 1, ..., n. \tag{10}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что, как указано в п. 3 после теоремы 1, при $z_{1,t} = \text{const}$ цепь Маркова X_t эргодична. Условие стационарности означает, что распределение вероятностей X_t не зависит от t и совпадает со стационарным π, определенным в (7). Вычислим теперь матрицу $G = (g_{k,l}) \in R^{n(n+1)\times n(n+1)}$, введенную в [9], покажем ее связь с информационной матрицей Фишера и проверим ее невырожденность, следуя [9]:

$$g_{k,l} = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right), \quad k, l = 1, 2, \ldots, n(n+1), \tag{11}$$

где $q_{I,J} = q_{I,J}(V)$ определяется (6), $V = (v_k) = \left(\theta_{1,1}, ..., \theta_{1,n+1}, \theta_{2,1}, ..., \theta_{n,n+1},\right) \in R^{n(n+1)}$.

Поскольку справедливо тождество

$$\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \equiv q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k},$$

представим (11) в эквивалентном виде:

$$g_{k,l} = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right) = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right) =$$

$$= \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) \left(\frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right). \qquad (12)$$

Из (12) и [7] видно, что матрица G представляет собой усредненную условную информационную матрицу Фишера $J_{kl}\left(X_{t-1}\right)$ для условного распределения вероятностей X_t при условии X_{t-1}:

$$g_{kl} = \mathbf{E}\left\{J_{kl}\left(X_{t-1}\right)\right\},\ J_{kl}\left(X_{t-1}\right) = \mathbf{E}\left\{ \left(\frac{\partial \ln q_{X_{t-1},X_t}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial \ln q_{X_{t-1},X_t}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \middle| X_{t-1} \right\} \equiv \mathbf{E}\left\{ -\frac{\partial^2 \ln q_{X_{t-1},X_t}}{\partial v_k \partial v_l} \middle| X_{t-1} \right\}.$$

Матрицу $G = (g_{k,l}) \in R^{n(n+1)\times n(n+1)}$ разобьем на $n \times n$ блочных $(n+1)\times(n+1)$ матриц:

$$H_{i,j} = \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) \left(\nabla_{\theta_i} \ln q_{I,J} \right)_{\theta^0} \left(\nabla_{\theta_j} \ln q_{I,J} \right)_{\theta^0}{}' \right) \in R^{(n+1)\times(n+1)}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \qquad (13)$$

Используя (6), имеем ($i = 1,...,n$; $I = \left(I_s\right)$, $J = \left(J_s\right) \in L$):

$$\nabla_{\theta_i} \ln q_{I,J} = \nabla_{\theta_i} \ln \left(\prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s \theta_s{}' Y\right) \left(1 + \exp\left(\theta_s{}' Y\right)\right)^{-N} \right) =$$

$$= \nabla_{\theta_i} \left(\sum_{s=1}^{n} \ln C_N^{J_s} + J_s \theta_s{}' Y - N \ln\left(1 + \exp\left(\theta_s{}' Y\right)\right) \right) = J_i Y - N \frac{\exp\left(\theta_i{}' Y\right)}{1 + \exp\left(\theta_i{}' Y\right)} Y = \left(J_i - N p_i(Y)\right) Y, \quad Y = \left(I', z\right)'.$$

Тогда

$$H_{i,j} = \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) \left(J_i Y - N p_i(Y) Y\right) \left(J_j Y - N p_j(Y) Y\right)' \right) =$$

$$= \sum_{I,J} YY' \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) \left(J_i - N p_i(Y)\right) \left(J_j - N p_j(Y)\right) \right) =$$

$$= \sum_{I} YY' \pi_I(\theta^0) \sum_{J} q_{I,J}(\theta^0) \left(J_i - \mathbf{E}\{x_{i,t} \mid X_{t-1} = I\}\right) \left(J_j - \mathbf{E}\{x_{j,t} \mid X_{t-1} = I\}\right) =$$

$$= \sum_{I} YY' \pi_I(\theta^0) \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} \mid X_{t-1} = I\} = \mathbf{E}\{Y_t Y_t{}' \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} \mid X_{t-1}\}\},$$

где $Y_t = (X_{t-1}{}', z)'$. Воспользуемся леммой 1, тогда

$$H_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{O}_{n+1}, i \neq j; \\ N\mathbf{E}\left\{Y_t Y_t{}' p_i\left(X_{t-1}, z\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, z\right)\right)\right\}, i = j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица G является блочно-диагональной с диагональными блоками $N\mathbf{E}\left\{Y_t Y_t{}' p_i\left(X_{t-1}, z\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, z\right)\right)\right\}$. Тогда определитель матрицы G вычисляется следующим образом [8]:

$$\det(G) = N^{n(n+1)} \prod_{i=1}^{n} \det\left(\mathbf{E}\left\{Y_t Y_t{}' p_i\left(X_{t-1}, z\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, z\right)\right)\right\}\right). \qquad (14)$$

Вычислим $\det \mathbf{E}\{Y_t Y_t{}'\}$, используя свойства определителя блочных матриц [8]:

$$\det \mathbf{E}\{Y_t Y_t{}'\} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{E}\{X_{t-1}X_{t-1}{}'\} & z\mathbf{E}\{X_{t-1}\} \\ z\mathbf{E}\{X_{t-1}{}'\} & z^2 \end{pmatrix} = z^2 \det\left(\mathbf{E}\{X_{t-1}X_{t-1}{}'\} - \frac{1}{z^2} z\mathbf{E}\{X_{t-1}\} z\mathbf{E}\{X_{t-1}{}'\} \right) =$$

$$= z^2 \det\left(\mathbf{E}\{X_{t-1}X_{t-1}{}'\} - \mathbf{E}\{X_{t-1}\}\mathbf{E}\{X_{t-1}{}'\} \right) = z^2 \det\left(\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\} \right).$$

Так как $z \neq 0$ и в силу леммы 3 $\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\} \succ 0$, то $\det\left(\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\}\right) > 0$, поэтому $\det \mathbf{E}\{Y_t Y_t{}'\} > 0$. В силу леммы 2 имеем $p_i\left(X_{t-1}, z\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, z\right)\right) > 0$. Тогда, поскольку $\mathbf{E}\{Y_t Y_t{}'\} \succ 0$ – положительно определенная матрица, то по лемме 4 матрица $\mathbf{E}\left\{Y_t Y_t{}' p_i\left(X_{t-1}, z\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, z\right)\right)\right\} \succ 0$ также является положительно определенной, поэтому $\det\left(N\mathbf{E}\left\{Y_t Y_t{}' p_i\left(X_{t-1}, z\right)\left(1 - p_i\left(X_{t-1}, z\right)\right)\right\}\right) \neq 0, i \in S$. Тогда из (14) следует, что $\det(G) \neq 0$, откуда получаем, что матрица G – невырожденная.

Заметим, что если $m > 1$, но $Z_t = \left(z_{j,t}\right) \in R^m$ не зависит от времени, то этот случай сводится к случаю, рассмотренному в теореме, введением вспомогательного параметра $\tilde{b}_s ::= \sum_{j=1}^{m} b_{s,j} z_{j,1}, s \in S$.

Теорема 3. *Если* $m = 1$, $z_{1t} = z \neq 0$ *не зависит от* t *и цепь Маркова* $X_t \in L$ *стационарна, то при любых ограниченных значениях коэффициентов* $\{\theta_s\}$ *и ограниченном* $z \in R^1$ *построенные согласно* (9) *оценки максимального правдоподобия* $\{\hat{\theta}_s\}$ *при* $T \to +\infty$ *являются асимптотически нормально распределенными:*

$$L\left\{\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^0)\right\} \longrightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}),$$

где информационная матрица Фишера G *вычисляется по формулам* (5), (10).

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.2 из [9]. Для этого необходимо проверить следующие условия относительно матрицы вероятностей одношаговых переходов $Q = (q_{I,J})$, определенной (5):

У1. Если $q_{I,J}(\theta) = q_{I,J}(\eta)$ для всех $I, J \in L$, то $\theta = \eta$;

У2. Вероятность перехода $q_{I,J}(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема по параметру θ в точке θ^0, где θ^0 – истинное значение вектора параметров;

У3. По крайней мере, одно из значений $\nabla_\theta q_{IJ}\left(\theta^0\right) \neq \mathbf{O}_{n(n+1)}$ при $I, J \in L$.

Представим $q_{I,J}$, $I, J \in L$, в следующем эквивалентном виде, используя (5):

$$q_{I,J}(\theta) = \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \left(\exp\left(a_s{}' I + b_{s1} z\right)\right)^{J_s} \left(1 + \exp\left(a_s{}' I + b_{s1} z\right)\right)^{-N} =$$

$$= \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s \theta_s{}' Y\right)\left(1 + \exp\left(\theta_s{}' Y\right)\right)^{-N}, \quad I = (I_s), J = (J_s) \in L,$$

где $Y = \left(I', z\right)' \in R^{n+1}, \theta_s = \left(a_{s1}, ..., a_{sn}, b_{s1}\right)' \in R^{n+1}, \theta = (\theta_1{}', \ldots, \theta_n{}')' \in R^{n(n+1)}$.

Для проверки условия У1 преобразуем равенство $q_{I,J}(\theta) - q_{I,J}(\eta) = 0$:

$$\prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s \theta_s{}' Y\right)\left(1 + \exp\left(\theta_s{}' Y\right)\right)^{-N} - \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s \eta_s{}' Y\right)\left(1 + \exp\left(\eta_s{}' Y\right)\right)^{-N} =$$

$$= \frac{\prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s \theta_s{}' Y\right)\left(1 + \exp\left(\eta_s{}' Y\right)\right)^{N} - \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s \eta_s{}' Y\right)\left(1 + \exp\left(\theta_s{}' Y\right)\right)^{N}}{\prod_{s=1}^{n}\left(1 + \exp\left(\theta_s{}' Y\right)\right)^{N} \prod_{s=1}^{n}\left(1 + \exp\left(\eta_s{}' Y\right)\right)^{N}} = 0.$$

Последнее равенство выполняется, только если числитель равен 0:

$$\prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s\theta_s{}'Y\right)\left(1+\exp\left(\eta_s{}'Y\right)\right)^N - \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s\eta_s{}'Y\right)\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)^N =$$

$$= \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s\theta_s{}'Y\right)\sum_{k=0}^{N} C_N^k \exp\left(k\eta_s{}'Y\right) - \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} \exp\left(J_s\eta_s{}'Y\right)\sum_{k=0}^{N} C_N^k \exp\left(k\theta_s{}'Y\right) =$$

$$= \prod_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{N} C_N^{J_s} C_N^k \exp\left((k\eta_s + J_s\theta_s)'Y\right) - \prod_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{N} C_N^k C_N^{J_s} \exp\left((k\theta_s + J_s\eta_s)'Y\right) =$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{N} \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} C_N^{k_s} \exp\left((k_s\eta_s + J_s\theta_s)'Y\right) - \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{N} \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} C_N^{k_s} \exp\left((k_s\theta_s + J_s\eta_s)'Y\right) =$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{N} \left(\prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{(k_s\eta_s + J_s\theta_s)'Y} - \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{(k_s\theta_s + J_s\eta_s)'Y} \right) =$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{N} \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} C_N^{k_s} \left(e^{\sum_{s=1}^{n}(k_s\eta_s + J_s\theta_s)'Y} - e^{\sum_{s=1}^{n}(k_s\theta_s + J_s\eta_s)'Y} \right) =$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{N} \prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{\sum_{s=1}^{n}(J_s\eta_s + J_s\theta_s)'Y} \left(e^{\sum_{s=1}^{n}(k_s - J_s)\eta_s{}'Y} - e^{\sum_{s=1}^{n}(k_s - J_s)\theta_s{}'Y} \right) = 0.$$

Так как $\prod_{s=1}^{n} C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{\sum_{s=1}^{n}(J_s\eta_s + J_s\theta_s)'Y} > 0$, то данное равенство выполняется только в том случае, когда $e^{\sum_{s=1}^{n}(k_s - J_s)\eta_s{}'Y} - e^{\sum_{s=1}^{n}(k_s - J_s)\theta_s{}'Y} = 0$ для всех $I, J \in L$, $k_s = 0,\dots,N$, $s \in S$, т. е. если $\sum_{s=1}^{n}\alpha_s{}'\eta_s = \sum_{s=1}^{n}\alpha_s{}'\theta_s$, где $\alpha_s = (k_s - J_s)'Y \in R^{n+1}$. Данное условие представим в эквивалентном виде:

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_s{}'(\eta_s - \theta_s) = 0, \quad \alpha_s = \{-N,\dots,N\}. \tag{15}$$

Если $\alpha_s > 0$ для всех $s \in S$(данное условие возможно, поскольку в условиях теоремы при $z \neq 0$ вектор Y – ненулевой), то условие (15) выполняется только при $\eta_s = \theta_s$, $s \in S$. Таким образом, доказано выполнение условия У1.

В силу (5) функция $q_{I,J}(\theta)$ является дважды дифференцируемой по параметру θ в точке θ^0, т. е. выполняется условие У2.

Для проверки условия У3 рассмотрим вспомогательную функцию ($I = (I_s), J = (J_s) \in L$, $Y = (I', z)'$):

$$f_{I,J}(\theta_s) = C_N^{J_s} \frac{\exp\left(J_s\theta_s{}'Y\right)}{\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)^N}.$$

Вычислим градиент этой функции:

$$\nabla_{\theta_s} f_{I,J}\left(\theta_s^0\right) = C_N^{j_s}\left(\frac{J_s \exp\left(J_s\theta_s{}'Y\right)Y}{\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)^N} - N\frac{\exp\left((J_s+1)\theta_s{}'Y\right)Y}{\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)^{N+1}} \right) =$$

$$= C_N^{J_s} \frac{\left(J_s\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right) - N\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)\exp\left(J_s\theta_s{}'Y\right)}{\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)^{N+1}} Y =$$

$$= C_N^{J_s} \frac{\left(J_s + (J_s - N)\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)\exp\left(J_s\theta_s{}'Y\right)}{\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)^{N+1}} Y \in R^{n+1}. \qquad (16)$$

В условиях теоремы при $z \neq 0$ вектор $Y \in R^{n+1}$ – ненулевой, поэтому из (16) заключаем, что $\nabla_{\theta_s} f_{I,J}\left(\theta_s^0\right)$ является ненулевым вектором, а в силу формулы нахождения производной произведения и вектор $\nabla_{\theta_s} q_{I,J}\left(\theta_s^0\right)$ – ненулевой для всех $I, J \in L$, т. е. выполняется условие У3.

Таким образом, в силу выполнения условий У1–У3 ОМП $\{\hat{\theta}_s\}$ являются при $T \to \infty$ совместно асимптотически нормально распределенными [9]:

$$L\left\{\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^0)\right\} \longrightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}),$$

где G – информационная матрица Фишера (10). Заметим, что в силу теоремы 2 при любых ограниченных значениях коэффициентов $\left\{\theta_s\right\}$ и ограниченном $z \in R^1$ матрица G является невырожденной, т. е. обратная матрица G^{-1} существует.

4. Результаты компьютерного моделирования. Компьютерные эксперименты проводились на модельных данных. Рассматривалась модель (1)–(3) при значениях параметров: $m = 1$, $z = 2$, $N = 4$, $A = \{0,1,...,4\}$, $n = 3$, $S = \{1,2,3\}$, $\theta_1 = \left(-0,2;\ 0,18;\ -0,15;\ 0,2\right)'$, $\theta_2 = \left(-0,18;\ 0,24;\ -0,05;\ -0,1\right)'$, $\theta_3 = \left(0,13;\ -0,13;\ -0,29;\ 0,3\right)'$, $\nu = \left(N+1\right)^n = 125$. Для этой модели была теоретически вычислена ковариационная матрица:

$$\mathbf{cov}\left\{X_t, X_t\right\} = \sum_{I \in A^n} II'\pi_I - \left(\sum_{I \in A^n} I\pi_I\right)\left(\sum_{I \in A^n} I\pi_I\right)',$$

где $\pi = \left(\pi_I\right)$ – 125-мерное стационарное распределение вероятностей цепи Маркова, для нахождения которого решалась система уравнений (7). Для рассматриваемой модели вычисленная теоретически ковариационная матрица имеет вид:

$$\mathbf{cov}\left\{X_t, X_t\right\} = \begin{pmatrix} 1,07 & 0,08 & 0,0002 \\ 0,08 & 1,05 & -0,03 \\ 0,0002 & -0,03 & 1,09 \end{pmatrix}.$$

На рисунке представлены графики зависимости экспериментальной и теоретической среднеквадратической ошибки оценивания параметров модели в зависимости от длительности наблюдений T ($T \in [20, 300]$). Экспериментальная (выборочная) среднеквадратическая ошибка оценивания параметров вычислена по методу Монте-Карло:

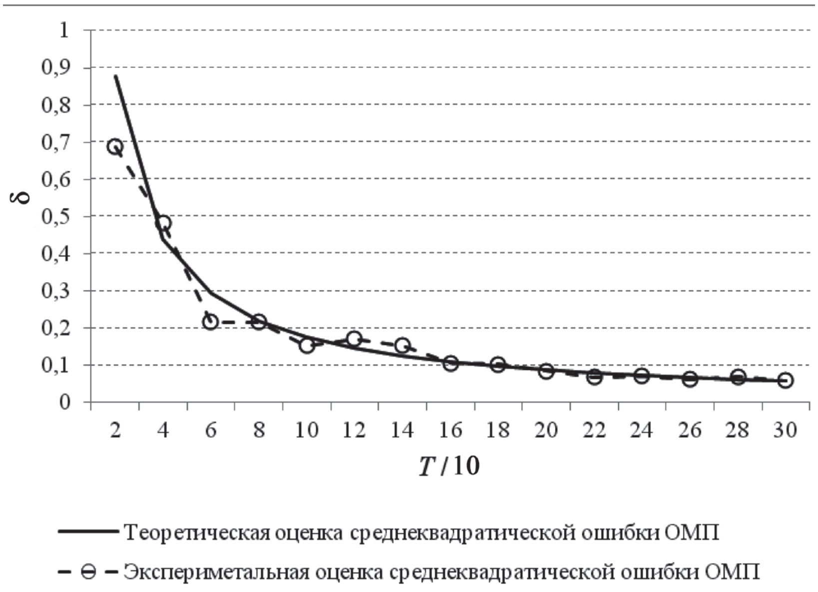
$$\hat{\delta} = \hat{\mathbf{E}}\left\{\left\|\hat{\theta} - \theta\right\|^2\right\} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \| \hat{\theta}^{(k)} - \theta \|^2,$$

где $\hat{\theta}^{(k)}$– оценка максимального правдоподобия вектора 12 параметров по k-й реализации пространственно-временных данных, θ – истинное значение вектора параметров, $M = 1000$ – количество реализаций Монте-Карло. Теоретическая среднеквадратическая ошибка оценивания параметров модели вычислена с использованием результатов, полученных в теоремах 2, 3:

$$\delta = \frac{1}{T}\mathrm{tr}\left(G^{-1}\right), \ G = \mathrm{diag}\left\{\sum_{I \in L} YY'\pi_I \frac{\exp\left(\theta_s{}'Y\right)}{\left(1+\exp\left(\theta_s{}'Y\right)\right)^2}\right\}, \quad Y = (I', z)', s \in S,$$

где $\mathrm{tr}\left(\cdot\right)$ – след матрицы.

Рисунок иллюстрирует состоятельность построенной оценки параметров модели и соответствие теоретических и экспериментальных результатов.



Зависимость среднеквадратической ошибки от длительности наблюдений

Заключение. В статье исследованы асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров разработанной биномиальной условно авторегрессионной модели на основе пространственно-временных данных. Доказано, что оценки являются асимптотически нормально распределенными, и найдена асимптотическая ковариационная матрица оценок максимального правдоподобия, определяющая теоретическую среднеквадратическую погрешность оценивания. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных, показавшие согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Список использованной литературы

1. Case Study for Modelling Cancer Incidence Using Bayesian Spatio-Temporal Models / S. Y. Kang [et al.] // Australian & New Zealand J. of Statistics. – 2015. – P. 325–345.
2. *Xu, G.* A Bayesian spatio-temporal geostatistical model with an auxiliary lattice for large datasets / G. Xu, F. Liang, M. G. Genton // Statistica Sinica. – 2015. – Vol. 25. – P. 61–79.
3. Space-time wind speed forecasting for improved power system dispatch (with discussion and rejoinder) / X. Zhu [et al.] // TEST. – 2014. – Vol. 23. – P. 1–25.
4. *Zhu, F.* Local influence analysis for Poisson autoregression with an application to stock transaction data / F. Zhu, S. Liu, L. Shi // Statistica Neerlandica. – 2016. – Vol. 7-1. – P. 4–25.
5. *Харин, Ю. С.* Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ / Ю. С. Харин, М. К. Журак // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 5–12.
6. *Кемени, Дж.* Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл; пер. с англ. С. А. Молчанова [и др.]; под. ред. А. А. Юшкевича. – М.: Наука, 1970.
7. *Харин, Ю. С.* Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2011.
8. *Маркус, М.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств: пер. с англ. / М. Маркус, Х. Минк; под ред. В. Б. Лидского. – М.: Наука, 1972.
9. *Basawa, I. V.* Statistical Inference for Stochastic Processes / I. V. Basawa, B. P. Rao. – Academic Press, 1980. – P. 52–66.

Поступила в редакцию 28.01.2016