

УДК 511.42

В. И. БЕРНИК, Д. В. КОЛЕДА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРИМИНАНТОВ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 11.04.2014)

Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ – многочлен степени n , пусть $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ обозначает высоту многочлена P , а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ – корни P . Число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (1)$$

называется дискриминантом многочлена P . Для многочленов первой степени нет содержательного толкования понятия дискриминанта, поэтому в дальнейшем они рассматриваться не будут.

Дискриминант многочлена является одной из основных характеристик многочлена и играет важную роль в алгебре и теории чисел [1, 2]. В задачах метрической теории диофантовых приближений верхние оценки для количества многочленов ограниченной высоты привели к решению проблемы Малера для многочленов третьей степени [3, 4], а также к точным верхним оценкам размерности Хаусдорфа [5].

Дискриминант является целочисленным многочленом от $n+1$ переменных коэффициентов многочлена P (см. [1]). Это следует из представления дискриминанта в виде определителя.

Ясно, что $D(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет кратные корни. Если $D(P) \neq 0$, то из представления $D(P)$ в виде определителя легко получается неравенство

$$1 \leq |D(P)| \leq \gamma_n H(P)^{2n-2}, \quad (2)$$

где постоянная γ_n зависит только от степени n и определена как

$$\gamma_n := \sup_{\substack{P \in \mathbb{Z}[x] \\ \deg P = n}} \frac{|D(P)|}{(H(P))^{2n-2}}.$$

Будем обозначать $\#M$ число элементов конечного множества M , а через μB обозначим меру Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$. Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ обозначаем величины, зависящие только от n и не зависящие от H . Также будем использовать символ Виноградова $\ll$. Выражение $f \ll g$ равносильно тому, что $f \leq c_1 g$ для некоторой постоянной c_1 , которая зависит только от степени n . Выражение $f \asymp g$ означает, что $g \ll f \ll g$.

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $Q > 1$ и $v \geq 0$. Определим множества

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n, H(P) \leq Q\}, \quad (3)$$

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q) : 0 < |D(P)| \leq \gamma_n Q^{2n-2-2v}\}, \quad (4)$$

$$\mathcal{P}_{\leq n}(Q, v) = \bigcup_{k=2}^n \mathcal{P}_k(Q, v). \quad (5)$$

В данной работе мы получим нижние оценки числа элементов во множествах $\mathcal{P}_3(Q, v)$ и $\mathcal{P}_{\leq 3}(Q, v)$.

Т е о р е м а 1. При $0 \leq v \leq 2$ выполняется неравенство

$$\#P_3(Q, v) \gg Q^{4-5v/3}.$$

В работе [6] получена оценка

$$c_3 Q^{4-5v/3} < \#P_3(Q, v) < c_4 Q^{4-5v/3},$$

однако только при $v \leq 3/5$. Важное значение при доказательстве теоремы 1 имеет следующая лемма.

Л е м м а 1. Пусть заданы целые числа $n \geq 2$ и $0 \leq m \leq n-1$. Тогда существуют положительные постоянные $\delta_0 = \delta_0(n)$ и $c_0 = c_0(n)$ со следующими свойствами. Для любого промежутка $I \subset [-1/2, 1/2]$ найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что для любых положительных параметров $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \xi_i < c_5, \quad 0 \leq i \leq m-1; \quad \xi_j > c_5, \quad m \leq j \leq n; \\ \xi_0 < \varepsilon, \quad \xi_n > \varepsilon^{-1}, \quad \xi_0 \xi_1 \dots \xi_n = 1, \end{aligned}$$

найдется измеримое множество S_I с мерой

$$\mu S_I > \frac{3}{4} \mu I, \quad (6)$$

такое, что для любого $x \in S_I$ существует неприводимый многочлен $P(x)$, $\deg P = n$, с условиями

$$\delta_0 \xi_j < |P^{(j)}(x)| < c_0 \xi_j, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (7)$$

Лемма 1 доказана в работе [7]. Величину $3/4$ в (6) можно заменить на любое число γ , $0 < \gamma < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Возьмем точку $x_1 \in S_I$ и воспользуемся леммой 1 при специальном выборе величины ξ_j . Тогда система неравенств (7) примет вид при $P(x) = P_1(x)$:

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |P_1(x_1)| < c_0 Q^{-v_0}, & \delta_0 Q^{-v_1} < |P_1'(x_1)| < c_0 Q^{-v_1}, \\ \delta_0 Q^{-v_2} < |P_1''(x_1)| < c_0 Q^{-v_2}, & \delta_0 Q < |P_1^{(3)}(x_1)| < c_0 Q, \\ v_0 + v_1 + v_2 = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Потребуем выполнения неравенства

$$v_0 - v_1 \geq v_1 - v_2 \geq v_2 + 1.$$

Упорядочим корни многочлена $P_1(x)$ относительно точки x_1 :

$$|x_1 - \alpha_1| \leq |x_1 - \alpha_2| \leq \dots \leq |x_1 - \alpha_n|.$$

Необходимую для $|x_1 - \alpha_1|$ оценку сверху дает

Л е м м а 2 [8]. Если α_1 – ближайший к числу x_1 корень многочлена $P(x)$, $\deg P = n$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x_1 - \alpha_1| &\leq n |P(x_1)| |P'(x_1)|^{-1}, \\ |x_1 - \alpha_1| &\leq 2^n |P(x_1)| |P'(\alpha_1)|^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если обозначить через β_1, β_2 корни $P_1'(x)$, а через γ – корень $P_1''(x)$, то, применив лемму 2 к неравенствам (8), получим

$$|x_1 - \alpha_1| < c_6 Q^{-v_0+v_1}, \quad |x_1 - \beta_1| < c_6 Q^{-v_1+v_2}, \quad |x_1 - \gamma| < c_6 Q^{-v_2-1}. \quad (10)$$

В работе [7] показано, что из (8) и (10) можно получить

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < c_7 Q^{-v_1+v_2}, \quad |\alpha_1 - \alpha_3| < c_7 Q^{-v_2-1}. \quad (11)$$

Возьмем в (11) величины $v_0 = 3 - v$, $v_1 = 2v/3 - 1$, $v_2 = v/3 - 1$. Тогда (11) примет вид

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < c_8 Q^{-v/3}, \quad |\alpha_1 - \alpha_3| < c_8 Q^{-v/3}, \quad |\alpha_2 - \alpha_3| < c_8 Q^{-v/3}. \quad (12)$$

Из неравенств (12) следует $1 \leq |D(P)| < c_9 Q^{4-2v}$.

При выполнении неравенств (10) и (12) имеем

$$|x_1 - \alpha_1| < c_6 Q^{-4+5v/3}. \quad (13)$$

Для многочлена $P_1(x)$ неравенство (13) может выполняться только в окрестностях корней α_1 , α_2 и α_3 с общей длиной, не большей $6c_6 Q^{-4+5v/3}$. Если $P_1(x), P_2(x), \dots, P_t(x)$ – многочлены, имеющие точки $x \in S_I$, для которых выполняется неравенство (13), то должно выполняться неравенство

$$6c_6 t Q^{-4+5v/3} \geq \mu S_I > \frac{3}{4} \mu I,$$

откуда

$$t > \frac{1}{8} c_6^{-1} Q^{4-5v/3} \mu I. \quad (14)$$

Таким образом, в кубическом случае зависимость между показателями степени порядков $x = 4 - 2v$ и $y = 4 - 5v/3$ имеет вид $y = \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$. Мы получим зависимость между x и y вида

$$y = F_3(x) = \begin{cases} 4, & x > 4, \\ \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}, & 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $F_n(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$\#\{P \in \mathcal{P}_n(Q) : 0 < |D(P)| \leq \gamma_n Q^x\} \geq c_{10} Q^{F_n(x)}$$

для некоторой постоянной c_{10} при достаточно больших Q , будем называть *нижней функцией распределения степеней дискриминантов степени n* . А функцию $F_{\leq n}(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$\#\{P \in \mathcal{P}_k(Q) : 2 \leq k \leq n, 0 < |D(P)| \leq \gamma_n Q^x\} \geq c_{11} Q^{F_{\leq n}(x)}$$

для некоторой постоянной c_{11} при достаточно больших Q , назовем *нижней функцией распределения степеней дискриминантов степени не больше n* .

Решим задачу о зависимости между величиной дискриминанта многочлена второй степени и количеством элементов множества $\mathcal{P}_2(Q, v)$. Вновь воспользуемся леммой 1. В точке $x_1 \in S_I$ построим неприводимый многочлен второй степени $P_1(x)$, как в (8):

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |P_1(x_1)| < c_0 Q^{-v_0}, & \delta_0 Q^{-v_1} < |P_1'(x_1)| < c_0 Q^{-v_1}, \\ \delta_0 Q < |P_1''(x_1)| < c_0 Q, & v_0 + v_1 = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Выберем $v_0 = 2 - v$, $v_1 = v - 1$. Тогда в окрестности

$$|x_1 - \alpha_1| < c_{10} Q^{-3+2v} \quad (16)$$

имеем многочлен, дискриминант которого удовлетворяет неравенству

$$1 \leq |D(P)| < c_{11} Q^{2-2\nu}. \quad (17)$$

Т е о р е м а 2. При $0 \leq \nu \leq 1$ справедливо неравенство

$$c_{12} Q^{3-2\nu} < \#P_2(Q, \nu). \quad (18)$$

В силу (18) в квадратичном случае зависимость между показателями степени $y = 3 - 2\nu$ и $x = 2 - 2\nu$ имеет вид

$$y = F_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 2, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Объединяя теоремы 1 и 2, получим теорему 3.

Т е о р е м а 3. Функция $F_{\leq 3}(x)$ имеет вид

$$F_{\leq 3}(x) = \begin{cases} 4, & x > 4, \\ \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}, & 14/5 \leq x \leq 4, \\ 3, & 2 \leq x < 14/5, \\ x + 1, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Литература

1. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М., 1976.
2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
3. Davenport H. // Mathematika. 1961. Vol. 8. P. 58–62.
4. Volkmann B. // Mathematika. 1961. Vol. 8. P. 55–57.
5. Bernik V., Dodson M. Metric Diophantine approximation on manifolds // Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 137. Cambridge, 1999.
6. Коледа Д. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2013. № 3. 10–16.
7. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. // Compositio Mathematica. 2010. Vol. 146, N 5. P. 1165–1179.
8. Берник В. И. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 1. С. 24–45.

V. I. BERNIK, D. U. KALIADA

DISTRIBUTION OF THE DISCRIMINANT VALUES FOR POLYNOMIALS OF SECOND AND THIRD DEGREE

Summary

In the article a relation between the number of square and cubic integer polynomials of bounded degree and discriminant values for these polynomials is established.