ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 530.182
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-347-352

Поступила в редакцию 04.02.2021
Received 04.02.2021

М. А. Князев

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ В ДИССИПАТИВНОЙ МОДЕЛИ φ^4 С НАРУШЕНИЕМ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ

Аннотация. Рассмотрено (1+1)-мерное уравнение движения теории φ^4 при одновременном учете процессов диссипации и нарушения инвариантности относительно преобразований Лоренца. В аналитической форме построено топологически нетривиальное решение данного уравнения, описывающее состояние типа одиночного кинка. Для этой цели был использован модифицированный прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных. Указанная модификация метода привела к определенным ограничениям на допустимые значения параметров модели и решения, при которых оно возможно.

Ключевые слова: кинк, φ^4-модель, диссипация, нарушение лоренц-инвариантности, метод Хироты

Для цитирования. Князев, М. А. Топологически нетривиальное состояние в диссипативной модели φ^4 с нарушением лоренц-инвариантности / М. А. Князев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 347–352. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-347-352

Michael A. Knyazev

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

TOPOLOGICALLY NON-TRIVIAL SOLUTION IN A DISSIPATIVE φ^4 MODEL WITH LORENTZ-INVARIANCE VIOLATION

Abstract. In this paper a (1+1)-dimension equation of motion for φ^4-theory is considered for the case of simultaneously taking into a account of the processes of dissipation and violation the Lorentz-invariance. A topological non-trivial solution of one-kink type for this equation is constructed in an analytical form. To this end, the modified direct Hirota method for solving the nonlinear partial derivatives equations was used. A modification of the method lead to special conditions on the parameters of the model and the solution.

Keywords: kink, φ^4-model, dissipation, Lorentz-invariance violation, the Hirota method

For citation. Knyazev M. A. Topologically non-trivial solution in a dissipative φ^4 model with Lorentz-invariance violation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 347–353 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-347-352

Введение. Инвариантность уравнений движения теории поля относительно преобразований Лоренца является общим положением в современной физике. Это в полной мере относится и к теории φ^4, одной из наиболее распространенных и широко используемых в различных областях исследований – классической и квантовой теории поля, физике элементарных частиц, теории фазовых переходов в конденсированных средах, физике магнитных явлений, инфляционной теории, описании формирования топологических дефектов в космологии и многих других [1].

В последние годы привлекают внимание процессы, которые протекают с нарушением инвариантности относительно преобразований Лоренца. К таковым относятся: электродинамика Максвелла при учете взаимодействия Черна – Саймонса; учет членов, нарушающих лоренц-инвариантность в низкоэнергетическом пределе в стандартной модели и высокоэнергетическом пределе в моделях теории струн; некоммутативная теория поля; процессы в суперсимметричных теориях, протекающие с нарушением инвариантности относительно преобразований Лоренца; возможные ограничения инвариантности Лоренца, которые следуют из радиоастрономических наблюдений и т. д. В скалярных моделях теории поля, в том числе и многокомпонентных, уравнение движения имеет, как правило, решение в виде кинка или кинкоподобного объекта. Такие решения в системах скалярных полей с нарушением инвариантности относительно преобразований Лоренца находят применение при исследовании эффекта Кондо, захвата фермионов, а также в задачах об энтропии информационных процессов. Достаточно полный обзор современного состояния вопроса можно найти в [2] (см. также [3]).

В настоящей работе рассматриваются (1+1)-мерные уравнения движения скалярной теории φ^4, поскольку в этом случае удается построить решения этих уравнений в аналитическом виде. В дальнейшем для простоты и удобства всюду, где это возможно, коэффициенты в уравнениях будем считать равными единице.

Уравнение движения теории φ^4в статическом случае имеет вид [4]

$$\varphi_{xx} + \varphi - \varphi^3 = 0, \tag{1}$$

где $\varphi_{xx} = \partial^2\varphi/\partial x^2$ и т. п. Решение этого уравнения хорошо известно. Его можно записать следующим образом:

$$\varphi(x)_{cm} = \pm\, \mathrm{th}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}}\right). \tag{2}$$

Здесь знак плюс соответствует решению в виде кинка, а минус – антикинка; x_0 представляет собой начальную фазу и определяет координату центра кинка. В динамическом случае уравнение движения теории φ^4 записывается следующим образом:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \varphi + \varphi^3 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) относится к неинтегрируемым. Это означает, что для него существует только решение в виде одиночного кинка (антикинка) и не существует решений, соответствующих связанным состояниям произвольного числа кинков и / или антикинков [5, 6]. Используя инвариантность уравнения (3) относительно преобразований Лоренца, его решение можно записать в виде

$$\varphi(x,t) = \pm\, \mathrm{th}\left[\frac{x-x_0-ut}{\sqrt{2\left(1-u^2\right)}}\right], \tag{4}$$

где $1 < u < 1$ – скорость движения кинка.

Учет процессов диссипации в теории φ^4 приводит к уравнению движения следующего вида [7, 8]:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \alpha\varphi_t - \varphi + \varphi^3 = 0, \tag{5}$$

где α – коэффициент затухания. Данное уравнение также является инвариантным относительно преобразований Лоренца. Его решение можно построить, используя эллиптические функции или метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных. В частности, если использовать эллиптические функции, то решение может быть записано в виде [7]

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\{1-\mathrm{th}[\alpha(x-ut)+x_0]\}. \tag{6}$$

Решение (6) более верно называть не кинком, а кинкоподобным объектом. Несмотря на учет в уравнении (5), по сравнению с уравнением (3), дополнительного слагаемого, описывающего потери энергии, для этого уравнения также не удается построить решение, соответствующее связанному состоянию произвольного числа кинкоподобных объектов. Следовательно, уравнение (5) также является неинтегрируемым.

Уравнение движения теории φ^4, которое не является инвариантным относительно преобразований Лоренца, имеет вид [2]

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + 2\beta\varphi_{xt} - \varphi + \varphi^3 = 0. \tag{7}$$

Нарушение лоренц-инвариантности описывается параметром β, который принимает неотрицательные значения. Случай $\beta = 0$ является тривиальным. Коэффициент 2 введен для удобства вычислений. Видно, что слагаемое, нарушающее лоренц-инвариантность, в статическом случае роли не играет. В работе [3] показано, что уравнение (7) инвариантно относительно преобразования

$$x' = \gamma(x_0 - ut), \tag{8}$$

где $\gamma = 1\big/\sqrt{1 - u^2 + 2\beta u}$, и его топологически нетривиальное решение уравнения (7) имеет вид

$$\varphi(x,t) = \mathrm{th}[\gamma(x - ut - x_0)]. \tag{9}$$

Положительное значение скорости соответствует движению кинка / антикинка направо, а отрицательное – налево. Проблема существования для уравнения (7) решений, которые описывали бы связанные состояния отдельных кинков и / или антикинков типа (9), т. е. проблема интегрируемости уравнения (7), в настоящее время остается открытой.

Уравнения (3), (5) и (7) обладают некоторым сходством. Отличие в формах их записи заключается в наличии разных слагаемых, но поскольку эти слагаемые являются линейными по неизвестной функции, то их вклад не должен оказывать определяющее влияние на свойства нелинейного уравнения и вид его решения. Это видно и по записи решений всех трех указанных уравнений. Все они определяются функцией гиперболического тангенса и приводят к решению, которое является кинком или кинкоподобным объектом.

Дальнейшее развитие исследований в этом направлении может состоять в обобщении уравнения движения теории φ^4. Все рассмотренные выше уравнения движения содержат одинаковый потенциал. Поэтому одним из путей обобщения может быть изменение вида потенциала путем обобщения на более высокие порядки φ. Существует значительное количество работ в этом направлении (см., напр., обзор в [9, 10]). Еще одним способом обобщения уравнения движения теории φ^4 является использование деформированного известного потенциала [11, 12]. Не меньший интерес представляет такая модификация этого уравнения, в которой при сохранении вида потенциала одновременно учитываются и процессы диссипации, и нарушение инвариантности относительно преобразований Лоренца. Такое уравнение можно записать следующим образом [13]:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \alpha\varphi_t + 2\beta\varphi_{xt} - \varphi + \varphi^3 = 0. \tag{10}$$

Цель работы – построение в аналитической форме топологически нетривиального решения уравнения (10), соответствующего состоянию типа одиночного кинка, и исследование на основе полученного при этом дисперсионного соотношения интегрируемости уравнения (10), т. е. возможности построения решений, соответствующих связанным состояниям.

Метод решения. Для достижения поставленной цели будем использовать прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [1, 6]. Однако нам придется модифицировать указанный метод, путем введения нового дополнительного условия.

Введем новую зависимую переменную вида $\varphi_x = \sigma F_x/F$, где $F = F(x,t)$ – новая неизвестная функция, а σ – параметр, который предстоит определить, $F_x = \partial F/\partial x$ и т. п. Теперь уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{F_{xtt}}{F} - 2\frac{F_{xt}F_t}{F^2} - \frac{F_xF_{tt}}{F^2} + 2\frac{F_xF_t^2}{F^3} - \frac{F_{xxx}}{F} + 3\frac{F_xF_{xx}}{F^2} - 2\frac{F_x^3}{F^3} + 2\beta\frac{F_{xxt}}{F} - 2\beta\frac{F_{xx}F_t}{F^2} -$$

$$-4\beta\frac{F_x F_{xt}}{F^2}+4\beta\frac{F_x^2 F_t}{F^3}+\alpha\frac{F_{xt}}{F}-\alpha\frac{F_x F_t}{F^2}-\sigma\frac{F_x}{F}+\sigma^2\frac{F_x^3}{F^3}=0. \tag{11}$$

Поскольку мы ищем частное решение, выберем параметр σ таким, чтобы выполнялось условие

$$(\sigma^2-2)\frac{F_x^3}{F^3}=0, \tag{12}$$

откуда сразу получаем $\sigma=\sqrt{2}.$ Хотя метод Хироты в специальных случаях применим и к получающимся после замены зависимой переменной уравнениям, которые содержат члены в третьей степени [14, 15], такие случаи редки и весьма специфичны. Обычным условием является наличие в преобразованном уравнении только членов не выше второй степени (так называемые билинейные уравнения). В рассматриваемой задаче условия (12) не достаточно, чтобы уравнение стало билинейным, так как в уравнении (11) остались члены, пропорциональные третьей степени. Чтобы привести уравнение к билинейному виду, нам понадобится новое дополнительное условие. Запишем его в виде

$$F_t+2\beta F_x=0. \tag{13}$$

Учитывая выражение для функции F в методе Хироты, условие (13) приводит к соотношению

$$\omega=2\beta k. \tag{14}$$

В результате уравнение (11) примет билинейный вид

$$\begin{gathered}F_{xtt}F-2F_{xt}F_t-F_xF_{tt}-F_{xxx}F+3F_xF_{xx}+2\beta F_{xxt}F-2\beta F_{xx}F_t-\\-4\alpha F_xF_{xt}+\alpha F_{xt}F-\alpha F_xF_t-F_xF=0.\end{gathered} \tag{15}$$

Представим F в виде формального ряда теории возмущений:

$$F=1+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\dots, \tag{16}$$

где $f_i=f_i(x,t),\ i=1,2,\dots$ – новые неизвестные функции, а ε – вообще говоря, не малый параметр. Если подставить соотношение (16) в уравнение (15) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, то в результате получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных такую, что каждое последующее уравнение этой системы будет зависеть только от параметров модели и решений предыдущих уравнений. Решая последовательно эту систему уравнений, можно, в принципе, определить все функции f_i.

Одиночный кинк. Для того чтобы построить решение уравнения (10), описывающее одиночный кинк, нам понадобятся два первых уравнения вышеупомянутой системы. Они имеют вид

$$f_{1,xtt}-f_{1,xxx}+2\beta f_{1,xxt}+\alpha f_{1,xt}-f_{1,x}=0, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}f_{2,xtt}-f_{2,xxx}+2\beta f_{2,xxt}+\alpha f_{2,xt}-f_{2,x}=2f_{1,xt}+f_{1,x}f_{1,tt}-3f_{1,x}f_{1,xx}+\\+2\beta f_{1,xx}f_{1,t}+4\beta f_{1,x}f_{1,xt}+\alpha f_{1,x}f_{1,t}.\end{gathered} \tag{18}$$

Будем искать f_1 в виде

$$f_1=\exp(kx-\omega t+\eta^0), \tag{19}$$

где k и ω – параметры, которые следует определить; параметр η^0 характеризует начальное положение кинка (без потери общности его можно принять равным нулю). Подставив (19) в (17), получим дисперсионное соотношение вида

$$\omega^2 - k^2 - 2\beta k\omega - \alpha\omega - 1 = 0. \tag{20}$$

С целью обрывания ряда (16), подставим (19) в правую часть (18) и приравняем ее нулю. В результате получим соотношение вида

$$3\omega^2 - 3k^2 - 6\beta k\omega - \alpha\omega = 0. \tag{21}$$

Используя полученные соотношения, можно явно вычислить параметры k и ω:

$$k = -\frac{3}{4\alpha\beta}, \quad \omega = -\frac{3}{2\alpha}. \tag{22}$$

Несмотря на явное нарушение инвариантности относительно преобразований Лоренца в уравнении (10), параметр ω для его решения, описывающего одиночный кинк, имеет такой же вид, как и для аналогичного решения уравнения (5), которое является лоренц-инвариантным. В то же время параметр k для этих уравнений существенно разный. Следовательно, нарушение лоренц-инвариантности в диссипативной модели φ^4 более существенно сказывается на зависимости решения от пространственной переменной. Что касается зависимости от временной переменной, она остается такой же, как и от дисспативной модели, инвариантной относительно преобразований Лоренца. По ходу решения задачи было введено дополнительное условие (13), которое приводит к ограничению на коэффициенты α и β в уравнении (10) следующего вида: $\alpha^2\beta^2 > 1$.

Теперь можно записать решение уравнения (10), описывающее одиночное состояние типа кинка:

$$\varphi(x,t) = \frac{k}{\sqrt{2}}\left[1 + \operatorname{th}\left(\frac{kx - \omega t + \eta_0}{2}\right)\right]. \tag{23}$$

Если подставить функцию $\varphi(x,t)$, которая определяется соотношением (23), в уравнение (10), то получим, что при ω, определяемом вторым соотношением (22), она будет решением уравнения (10) только при фиксированном значении параметра k, а именно: $k^2 = 1/2$. Указанное значение для k согласуется с условием $\alpha^2\beta^2 > 1$.

Заключение. Построено решение типа одиночного кинка для уравнения движения в диссипативной модели φ^4, в которой происходит нарушение инвариантности относительно преобразований Лоренца. Чтобы получить указанное решение, был использован прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных. При этом возникла необходимость частичной модификации метода путем введения дополнительных условий на решение и его параметры. В конечном итоге это привело к тому, что решение типа одиночного кинка для рассматриваемого уравнения оказалось возможным только при условии $k^2 = 1/2$, которое накладывает конкретные ограничения на допустимые значения коэффициентов α и β в модели, а именно: $\alpha^2\beta^2 = 9/8$. Это условие согласуется с условием, полученным выше независимым способом – $\alpha^2\beta^2 > 1$.

Список использованных источников

1. Князев, М. А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М. А. Князев. – Минск: Тэхналогія, 2003. – 115 с.

2. Kink-antikink collision in a Lorentz-violating model / Haobo Yan [et al.] // Phys. Lett. B. – 2020. – Vol. 807. – P. 135542 (7 p.). https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135542

3. Barreto, M. N. Defect structures in Lorentz and CPT violating scenarios / M. N. Barreto, D. Bazeia, R. Menezes // Phys. Rev. D. – 2006. – Vol. 73, № 6. https:/doi.org/10.1103/PhysRevD.73.065015

4. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М.: Мир, 1985. – 416 с.

5. Ньюэлл, А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 326 с.

6. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 479 с.

7. Cerveró, J. General elliptic solution for the cubic equation with damping / JoséM. Cerveró, P. G. Estévez // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 114, № 8/9. – P. 435–436. https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90688-2

8. Geike, J. Kink solitons and friction / J. Geike // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 116, № 5. – P. 221–223. https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90136-2

9. Gani, V. A. Explicit kinks in higher-order field theories / V. A. Gani, A. M. Marjaneh, P. A. Blinov // Phys. Rev. D. – 2020. – Vol. 101, № 12. https:/doi.org/10.1103/PhysRevD.101.12507

10. Kink-antikink collisions and multi-bounce resonance windows in higher-order field theories / I. C. Christov [et al.] // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2021. – Vol. 97. – P. 105748. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105748

11. Bazeia, D. Scattering of kinks of the sihn-deformed φ^4 model / D. Bazeia, E. Belendryasova, V. A. Gani // Eur. Phys. J. C. – 2018. – Vol. 78, № 4. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5815-z

12. Bazeia, D. Scattering of kinks in a non-polynomial model / D. Bazeia, E. Belendryasova, V. A. Gani // J. Phys.: Conf. Series. – 2017. – Vol. 934. – P. 012032. https://doi.org/10.1088/1742-6596/934/1/012032

13. Князев, М. А. Задача о диссипативном уравнении движения теории φ^4 с нарушением лоренц-инвариантности / М. А. Князев // Приборостроение-2020: материалы 13-й Междунар. науч.-техн. конф., 18–20 нояб. 2020 г., Минск / редкол.: О. К. Гусев [и др.]. – Минск: БНТУ, 2020. – С. 256–257.

14. Hietarinta, J. Integrable trilinear PDE's [Electronic resource] / J. Hietarinta, B. Grammaticos, A. Ramai. – 1994. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/solv-int/9411003. – Date of access: 10.01.2021.

15. Goldstein, P. P. Hints on Hirota Bilinear Method. / P. P. Goldstein // Acta Phys. Pol. A. – 2007. – Vol. 112, № 6. – P. 1171–1184. https://doi.org/10.12693/aphyspola.112.1171

References

1. Knyazev M. A. *Kinks in Scalar Model with Damping*. Minsk, Tekhnalogiya Publ., 2013. 115 p. (in Russian).

2. Haobo Yan, Yuan Zhong, Yu-Xiao Lui, Kei-ichi Maeda. Kink-antikink collision in a Lorentz-violating φ^4 model. *Physics Letters B*, 2020, vol. 807, pp. 135542 (7 pp.). https://doi.org/10.1016/ j.physletb.2020.135542

3. Barreto M. N., Bazeia D., Menezes R. Defect structures in Lorentz and CPT violating scenarios. *Physical Review D*, 2006, vol. 73, no. 6. https:/doi.org/10.1103/PhysRevD.73.065015

4. Rajaraman R. *Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory.* Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1982. 409 p.

5. Newell A. C. *Solitons in Mathematics and Physics.* SIAM, 1985. 260 p. http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611970227

6. Ablowitz M. J., Segur H. *Solitons and Inverse Scattering Transform*. SLAM, 1982. 426 p.

7. Cerveró J., Estévez P. G. General elliptic solution for the cubic equation with damping. *Physics Letters A*, 1986, vol. 114, no. 8–9, pp. 435–436. https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90688-2

8. Geike J. Kink soliton and friction. *Physics Letters A*, 1986, vol. 116, no. 5, pp. 221–222. https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90136-2

9. Gani V. A., Marjaneh A. M., Blinov P. A. Explicit kinks in higher-order field theories. *Physical Review D*, vol. 101, no. 12. https:/doi.org/10.1103/PhysRevD.101.12507.

10. Christov I. C., Decker R. J., Demirkaya A., Gani V. A., Kevrekidis P. G., Saxena A. Kink-antikink collisions and multi-bounce resonance windows in higher-order field theories. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 97, pp. 105748. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105748

11. Bazeia D., Belendryasova E., Gani V. A. Scattering of kinks of the sihn-deformed φ^4 model. *The European Physical Journal C*, 2018, vol. 78, no. 4. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5815-z

12. Bazeia D., Belendryasova E., Gani V. A. Scattering of kinks in a non-polynomial model. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 934, pp. 012032. https://doi.org/10.1088/1742-6596/934/1/012032

13. Knyazev M. A. A problem on dissipative equation of movement for φ^4 theory with a violating the Lorentz-invariance. *Priborostroenie-2020: materialy 13-i Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii, 18–20 noyabrya 2020 g., Minsk* [Instrumentation Engineering-2020. Proceedings of the 13th International Scientific and Technical Conference]. Minsk, BNTU, 2020, pp. 256–257 (in Russian).

14. Hietarinta J., Grammaticos B., Ramai A. *Integrable trilinear PDE's*. 2004. Available at: https://arxiv.org/abs/solv-int/9411003

15. Goldstein P. P. Hints on Hirota Bilinear Method. *Acta Physica Polonica A*, 2007, vol. 112, no. 6, pp. 1171–1184. https://doi.org/10.12693/aphyspola.112.1171

Информация об авторе

Князев Михаил Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь).
E-mail: maknyazev@bntu.by

Information about the author

Michael A. Knyazev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus).
E-mail: maknyazev@bntu.by