ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 539.1
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-353-373

Поступила в редакцию 06.05.2021
Received 06.05.2021

А. В. Ивашкевич[1], О. А. Василюк[2], Е. М. Овсиюк[3], В. В. Кисель[4], В. М. Редьков[1]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь
[3]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь
[4]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ТЕОРИЯ ФРАДКИНА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2, НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

Аннотация. Известное уравнение для частицы со спином 3/2, предложенное Паули и Фирцем, основано на использовании волновой функции с трансформационными свойствами вектора-биспинора. Менее известным является уравнение, основанное также на 16-компонентной функции, которое было предложено Фрадкиным. При занулении дополнительного к заряду параметра Λ из уравнения Фрадкина следует уравнение Паули – Фирца. С целью установления физической интерпретации дополнительного параметра Λ в настоящей работе решен вопрос о получении нерелятивистского приближения в теории Фрадкина, при этом учитывается присутствие внешних электромагнитных полей. С использованием метода проективных операторов волновая функция разложена на нерелятивистские большие и малые составляющие, выведено обобщенное нерелятивистское уравнение для 16-компонентной волновой функции. Показывается, что при сохранении в этом уравнении членов первого порядка по параметру Λ после перехода к четырем независимым компонентам нерелятивистской волновой функции возникает обычное нерелятивистское уравнение для теории Паули – Фирца. Если сохранять члены второго порядка по Λ, то возникает 4-компонентное нерелятивистское уравнение с дополнительным членом взаимодействия, причем только с магнитным полем. Это взаимодействие квадратично по компонентам магнитного поля и зависит от шести 4-мерных матриц. Делается вывод, что теория Фрадкина описывает частицу с магнитным квадрупольным моментом.

Ключевые слова: спин 3/2, теория Паули – Фирца, теория Фрадкина, проективные операторы, нерелятивистское приближение, квадрупольный магнитный момент

Для цитирования. Теория Фрадкина частицы со спином 3/2, нерелятивистский предел / А. В. Ивашкевич [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 353–373. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-353-373

Alina V. Ivashkevich[1], Olga A. Vasiluyk[2], Elena M. Ovsiyuk[3], Vasily V. Kisel[4], Viktor M. Red'kov[1]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus
[3]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus
[4]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

SPIN 3/2 PARTICLE: FRADKIN THEORY, NON-RELATIVISTIC APPROXIMATION

Abstract. The well-known relativistic wave equation for a spin 3/2 particle proposed by Pauli and Fierz is based on the use of the wave function with the transformation properties of vector-bispinor. Less known is the Fradkin theory based on the vector-bispinor wave function as well. At the vanishing Fradkin parameter Λ, this equation reduces to the Pauli – Fierz equation. To clarify the physical meaning of the additional parameter, in the present paper the nonrelativistic approximation in the Fradkin equation is studied, at this we take into account the presence of external electromagnetic fields. With the use of the technique of projective operators, we decompose the wave function into big and small constituents, and then derive a generalized nonrelativistic equation for a 16-component wave function. It is shown that when preserving only the terms of first order in the Fradkin parameter Λ after transition to 4 independent components of the nonrelativistic wave function there arises the ordinary nonrelativistic equation for the Pauli – Fierz theory without any additional interaction with electromagnetic fields. When preserving the terms of second order in parameter Λ, we obtain a 4-component nonrelativistic equation with additional interaction; however, only with the magnetic field. This interaction is quadratic in magnetic field components and governed by six 4-dimensional matrices. So the Fradkin theory may be understood as relevant to a particle with magnetic quadrupole moment.

Keywords: spin 3/2, Pauli – Fierz theory, Fradkin theory, projective operators, nonrelativistic approximation, magnetic quadrupole moment

For citation. Ivashkevich A. V., Voynova Ya. A., Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spin 3/2 particle: Fradkin theory, nonrelativistic approximation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 353–373 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-353-373

Введение. В рамках теории релятивистских волновых уравнений, помимо простейших и широко известных уравнений для частиц со спинами 0, 1/2, 1, 3/2, 2, могут быть предложены и более сложные уравнения. Такие обобщенные уравнения основываются на использовании расширенных наборов представлений группы Лоренца. Например, известны уравнения для частиц с несколькими массовыми или спиновыми параметрами, с дополнительными электромагнитными характеристиками, например аномальным магнитным моментом, электрическим квадрупольным моментом, поляризуемостью и др. (см. [1–20]). Такие дополнительные характеристики проявляют себя физически в присутствии внешних полей. В частности, в рамках указанного подхода Фрадкиным [5] было предложено более сложное уравнение для частицы со спином 3/2, но до настоящего времени не совсем понятно, какую именно дополнительную характеристику позволяет описать данное уравнение.

Вопрос об интерпретации дополнительных характеристик решается проще при обращении к соответствующим нерелятивистским уравнениям, поэтому в настоящей работе исследован вопрос о нерелятивистском приближении в этой теории. Мы исходили из формализма уравнений 1-го порядка для частиц со спином 3/2 в базисе Петраша [11]. Использовался метод обобщенных символов Кронекера и формализм элементов полной матричной алгебры [12]. При разложении волновой функции на (нерелятивистские) большие и малые составляющие применялся метод проективных операторов [9]. Установлено, что в нерелятивистском приближении возникает уравнение с дополнительным членом взаимодействия, причем только с магнитным полем. Сделан вывод о том, что теория Фрадкина описывает частицу с квадрупольным магнитным моментом.

Проективные операторы, три составляющих волновой функции. Исходим из релятивистского уравнения Фрадкина в матричной форме [12]:

$$(D_\mu \Gamma_\mu + M + Q)\Psi = 0, \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \tag{1}$$

где волновая функция Ψ преобразуется как вектор-биспинор относительно группы Лоренца. Используемые 16-мерные матрицы Γ_μ в базисе Петраша [11] представляются с помощью элементов полной матричной алгебры [12]:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes e^{\nu,\nu} + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_\rho \otimes (e^{\rho,\mu} - e^{\mu,\rho});$$

величина Q в (1) описывает обусловленное внутренней структурой частицы дополнительное взаимодействие с внешним электромагнитным полем:

$$Q = -\frac{ie}{3M} \Lambda F_{\mu\nu} \Big\{ 2\sqrt{3}\gamma_\lambda \gamma_\nu \otimes e^{\lambda,\mu} - 2\gamma_\mu \gamma_\rho \otimes (e^{\nu,\rho} + e^{\rho,\nu}) +$$
$$+ \gamma_\mu \gamma_\nu \otimes e^{\rho,\rho} + 2I \otimes e^{\mu,\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^5 \otimes e^{\lambda,\rho} \Big\},$$

используются обычные матрицы Дирака. Напомним определение для элементов полной матричной алгебры и правило их умножения:

$$(e^{A,B})_{CD} = \delta_C^A \delta_D^B, \quad e^{A,K} e^{L,B} = \delta_{KL} e^{A,B},$$

где $e^{A,B}$ – матрица с единственным ненулевым элементом (равным 1) на пересечении строки A со столбцом B. Для разложения функций на большие и малые составляющие нужно знать минимальное уравнение для матрицы Γ_4:

$$\Gamma_4 = \gamma_4 \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_\rho \otimes (e^{\rho,4} - e^{4,\rho}). \tag{2}$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу ρ. Отмечаем, что в формуле (2) член с $\rho = 4$ вклада не дает, т. е. фактически имеем следующее выражение:

$$\Gamma_4 = \gamma_4 \otimes I + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_a \otimes (e^{a,4} - e^{4,a}), \quad a = 1,2,3.$$

Нужное минимальное уравнение имеет вид

$$\Gamma_4^2(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \tag{3}$$

Учитывая (3), можно убедиться в существовании трех проективных операторов:

$$P_+ = +\frac{1}{2}\Gamma_4^2(\Gamma_4 + 1), \quad P_- = -\frac{1}{2}\Gamma_4^2(\Gamma_4 - 1), \quad P_0 = 1 - \Gamma_4^2, \quad P_+ + P_- + P_0 = 1.$$

Находим явный вид этих операторов через элементы полной матричной алгебры:

$$P_+ = \frac{1}{2}\left\{(1+\gamma_4)\otimes e^{a,a} - \frac{1}{3}(1+\gamma_4)\gamma_a\gamma_b \otimes e^{a,b}\right\},$$

$$P_- = \frac{1}{2}\left\{(1-\gamma_4)\otimes e^{a,a} - \frac{1}{3}(1-\gamma_4)\gamma_a\gamma_b \otimes e^{a,b}\right\},$$

$$P_0 = I \otimes e^{4,4} + \frac{1}{3}\gamma_a\gamma_b \otimes e^{a,b}.$$

Эти операторы позволяют разложить волновую функцию в сумму трех частей:

$$\Psi_+ = P_+\Psi, \quad \Psi_- = P_-\Psi, \quad \Psi_0 = P_0\Psi.$$

Для трех составляющих находим следующие 16-компонентные представления:

$$\Psi^{(+)} = \frac{1}{2}(1+\gamma_4)\begin{vmatrix}\Psi_c - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ 0\end{vmatrix}, \quad \gamma_c\Psi_c^{(+)} \equiv 0, \quad \gamma_4\Psi^{(+)} = +\Psi^{(+)};$$

$$\Psi^{(-)} = \frac{1}{2}(1-\gamma_4)\begin{vmatrix}\Psi_c - \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ 0\end{vmatrix}, \quad \gamma_c\Psi_c^{(-)} \equiv 0, \quad \gamma_4\Psi^{(-)} = -\Psi^{(-)}; \tag{4}$$

$$\Psi^{(0)} = \begin{vmatrix}\frac{1}{3}\gamma_c\gamma_b\Psi_b \\ \Psi_4\end{vmatrix}, \quad \frac{1}{3}\gamma_c\gamma_k\Psi_k^{(0)} = \Psi_c^{(0)}, \quad \Psi = \Psi^{(+)} + \Psi^{(-)} + \Psi^{(0)} = \begin{vmatrix}\Psi_c \\ \Psi_4\end{vmatrix}.$$

Выражения для малых составляющих. Обращаемся к уравнению (1), в детальной записи оно имеет вид

$$D_\mu\gamma_\mu\delta_{A,\nu}\Psi_\nu + \frac{1}{\sqrt{3}}D_\mu\gamma_\rho\delta_{\rho,A}\Psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{3}}D_\mu\gamma_\rho\delta_{\mu,A}\Psi_\rho + M\delta_{A,\nu}\Psi_\nu -$$
$$-\frac{ie}{3M}\Lambda F_{\mu\nu}\left\{2\sqrt{3}\gamma_\lambda\gamma_\nu\delta_{A,\lambda}\Psi_\mu - 2\gamma_\mu\gamma_\rho(\delta_{A,\nu}\Psi_\rho + \delta_{A,\rho}\Psi_\nu) + \right.$$
$$\left. + \gamma_\mu\gamma_\nu\delta_{A,\rho}\Psi_\rho + 2\delta_{A,\mu}\Psi_\nu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5\delta_{A,\lambda}\Psi_\rho\right\} = 0. \tag{5}$$

Пусть индекс $A = 4$, тогда

$$D_\mu\gamma_\mu\Psi_4 + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_4 D_\mu\Psi_\mu - \frac{1}{\sqrt{3}}D_4\gamma_\rho\Psi_\rho + M\Psi_4 -$$

$$-\frac{ie}{3M}\Lambda\Big\{2\sqrt{3}F_{\mu\nu}\gamma_4\gamma_\nu\Psi_\mu - 2F_{\mu 4}\gamma_\mu\gamma_\rho\Psi_\rho - 2F_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_4\Psi_\nu +$$

$$+F_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi_4 + 2F_{4\nu}\Psi_\nu + F_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu 4\rho}\gamma_5\Psi_\rho\Big\} = 0.$$

С учетом (4) последнее уравнение можно преобразовать к другому виду:

$$M\Psi_4^{(0)} + D_4\gamma_4\Psi_4^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{3}}D_4\gamma_a\Psi_a^{(0)} + D_a\gamma_a\Psi_4^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}D_a\left(\Psi_a^{(+)} - \Psi_a^{(-)} + \gamma_4\Psi_a^{(0)}\right) -$$

$$-\frac{ie\Lambda}{3M}\Big\{\left(2\sqrt{3}-2\right)F_{ab}\gamma_a\left(\Psi_b^{(+)} - \Psi_b^{(-)} + \gamma_4\Psi_b^{(0)}\right) + \left(2\sqrt{3}-2\right)F_{a4}\gamma_a\left(\gamma_4\Psi_4^{(0)}\right) +$$

$$+2\sqrt{3}F_{a4}\left(\Psi_a^{(+)} + \Psi_a^{(-)} + \Psi_a^{(0)}\right) - 6F_{a4}\Psi_a^{(0)} + F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Psi_4^{(0)} - \varepsilon_{abc}F_{ab}\gamma_5\left(\Psi_c^{(+)} + \Psi_c^{(-)} + \Psi_c^{(0)}\right)\Big\} = 0.$$

Выделяем энергию покоя подстановкой $\Psi^{(q)} = e^{-Mx_4}\Phi^{(q)}$, в результате получаем

$$M(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)} + \frac{M}{\sqrt{3}}\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right) + D_4\gamma_4\Phi_4^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{3}}D_4\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right) +$$

$$+D_a\gamma_a\Phi_4^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}D_a\left(\Phi_a^{(+)} - \Phi_a^{(-)} + \gamma_4\Phi_a^{(0)}\right) -$$

$$-\frac{ie}{3M}\Lambda\Big\{\left(2\sqrt{3}-2\right)F_{ab}\gamma_a\left(\Phi_b^{(+)} - \Phi_b^{(-)} + \gamma_4\Phi_b^{(0)}\right) + \left(2\sqrt{3}-2\right)F_{a4}\gamma_a\left(\gamma_4\Phi_4^{(0)}\right) +$$

$$+2\sqrt{3}F_{a4}\left(\Phi_a^{(+)} + \Phi_a^{(-)} + \Phi_a^{(0)}\right) - 6F_{a4}\Phi_a^{(0)} + F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi_4^{(0)} - \varepsilon_{abc}F_{ab}\gamma_5\left(\Phi_c^{(+)} + \Phi_c^{(-)} + \Phi_c^{(0)}\right)\Big\} = 0. \qquad (6)$$

При проведении процедуры нерелятивистского приближения нужно рассматривать компоненты $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(0)}$ как малые в сравнении с $\Phi^{(+)}$; также следует пренебрегать нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя. Таким образом, из (6) находим приближенное уравнение

$$M(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)} + \frac{M}{\sqrt{3}}\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}D_a\Phi_a^{(+)} + \frac{ie\Lambda}{3M}\Big\{2\left(\sqrt{3}-1\right)F_{ab}\gamma_a\Phi_b^{(+)} + 2\sqrt{3}F_{a4}\Phi_a^{(+)} - F_{ab}\varepsilon_{abc}\gamma_5\Phi_c^{(+)}\Big\}, \qquad (7)$$

которое связывает малые величины $\Phi_4^{(0)}$, $\gamma_a\Phi_a^{(0)}$ с большими $\Phi_c^{(+)}$.

Получим еще одно соотношение похожего типа. Для этого рассмотрим уравнение (5), когда индекс A равен 1, 2, 3. Проводя аналогичные вычисления, выводим уравнение

$$M\left\{(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c\Phi_4^{(0)}\right\} + D_4\gamma_4\Phi_c^{(0)} -$$

$$-\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\gamma_c D_a\Phi_a^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c D_4\Phi_4^{(0)} + \frac{2+\sqrt{3}}{3}\gamma_c D_a\left[\Phi_a^{(+)} + \Phi_a^{(-)} + \Phi_a^{(0)}\right] -$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{3}}D_k\gamma_c\gamma_k\left(\gamma_4\Phi_4^{(0)}\right) - \frac{ie\Lambda}{3M}\Big\{-2\sqrt{3}F_{ab}\gamma_c\gamma_a\left[\Phi_b^{(+)} + \Phi_b^{(-)} + \Phi_b^{(0)}\right] + \left(2-2\sqrt{3}\right)F_{a4}\gamma_c\gamma_a\Phi_4^{(0)} +$$

$$+\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right)F_{a4}\gamma_c\left[\Phi_a^{(+)} - \Phi_a^{(-)} + \gamma_4\Phi_a^{(0)}\right] + 3F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(0)} + \frac{2}{3}F_{ab}\gamma_c\gamma_a\gamma_b\left(\gamma_4\Phi_4^{(0)}\right) -$$

$$-4F_{k4}\gamma_c\gamma_4\Phi_k^{(0)} + \frac{1}{3}\varepsilon_{abk}F_{ab}\gamma_c\gamma_k\gamma_5\Phi_4^{(0)} + \frac{2}{3}\varepsilon_{akb}F_{a4}\gamma_c\gamma_k\gamma_5\left[\Phi_b^{(+)} + \Phi_b^{(-)} + \Phi_b^{(0)}\right]\Big\} = 0.$$

Отбрасывая малые слагаемые на фоне больших, получаем приближение

$$M\left\{(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_c\Phi_4^{(0)}\right\}=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}+$$

$$+\frac{ie\Lambda}{3M}\left\{-2\sqrt{3}F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}+\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right)F_{a4}\gamma_c\Phi_a^{(+)}+\frac{2}{3}\varepsilon_{akb}F_{a4}\gamma_c\gamma_k\gamma_5\Phi_b^{(+)}\right\}. \qquad (8)$$

После довольно громоздкого комбинирования уравнений (7) и (8) с использованием алгебраических свойств матриц Дирака, выводим необходимые в дальнейшем тождества:

$$(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}=+\frac{ie\Lambda}{3M^2}12F_{ab}\gamma_a\Phi_b^{(+)},$$

$$\gamma_a\Phi_a^{(0)}=-\frac{1}{M}D_a\Phi_a^{(+)}+\frac{ie\Lambda}{3M^2}\left\{\left(6-14\sqrt{3}\right)F_{ab}\gamma_a\Phi_b^{(+)}+6F_{a4}\Phi_a^{(+)}-\sqrt{3}\varepsilon_{abc}F_{ab}\gamma_5\Phi_c^{(+)}\right\},$$

$$\Phi_4^{(0)}=\frac{1}{M}D_a\Phi_a^{(+)}+\frac{ie\Lambda}{3M^2}\left\{6F_{ab}\gamma_a\Phi_b^{(+)}-\frac{6\sqrt{3}-14}{\sqrt{3}}F_{a4}\Phi_a^{(+)}-\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{akb}F_{a4}\gamma_k\gamma_5\Phi_b^{(+)}\right\},$$

$$(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)}=-\frac{2}{3M}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}+\frac{ie\Lambda}{3M^2}4F_{a4}\gamma_c\Phi_a^{(+)}, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_c^{(0)}=\frac{ie\Lambda}{3M^2}\left[\frac{6-14\sqrt{3}}{3}F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_{abk}F_{ab}\gamma_c\gamma_5\Phi_k^{(+)}\right],$$

$$\Phi_c^{(0)}=-\frac{1}{3M}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}+\frac{ie\Lambda}{3M^2}\left[\frac{6-14\sqrt{3}}{3}F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}+2F_{a4}\gamma_c\Phi_a^{(+)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_{abk}F_{ab}\gamma_c\gamma_5\Phi_k^{(+)}\right].$$

Уравнения для векторных составляющих $\Psi_c^{(\pm)}$. Аналогичным способом из уравнения (5), используя свойства матриц Дирака и определения для трех составляющих волновой функции (4), находим еще два уравнения. Первое уравнение имеет вид

$$D_4\Phi_c^{(+)}+D_a\gamma_a\left[\Phi_c^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{2}{3}\gamma_c D_a\left[\Phi_a^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\gamma_c D_a\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_a\gamma_c\gamma_a\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-\frac{ie\Lambda}{3M}\left\{2F_{ab}\gamma_c\gamma_a\left[\Phi_b^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]-\right.$$

$$-2F_{ca}\left[\Phi_a^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]-6F_{ac}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]-2F_{ac}\gamma_a\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]+$$

$$+2F_{c4}\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)\right]+\frac{4}{3}F_{a4}\gamma_c\left[\Phi_a^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]+$$

$$+F_{ab}\gamma_a\gamma_b\left[\Phi_c^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_c^{(0)}\right]-2F_{a4}\gamma_a\left[\Phi_c^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)}\right]-$$

$$-3F_{ab}\gamma_c\gamma_a\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]+\frac{2}{3}F_{ab}\gamma_c\gamma_a\gamma_b\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-4F_{a4}\gamma_c\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]+$$

$$+\varepsilon_{abc}F_{ab}\gamma_5\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]+2\varepsilon_{acb}F_{a4}\gamma_5\left[\Phi_b^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{1}{3}\varepsilon_{abk}F_{ab}\gamma_c\gamma_k\gamma_5\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-\frac{2}{3}\varepsilon_{akb}F_{a4}\gamma_c\gamma_k\gamma_5\left[\Phi_b^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]\Bigg\}=0. \qquad (10)$$

Отбрасывая в уравнении (10) малые слагаемые, получаем

$$D_4\Phi_c^{(+)}+D_a\gamma_a\left[\Phi_c^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{2}{3}\gamma_c D_a\left[\Phi_a^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\gamma_c D_a\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]+\frac{1}{3\sqrt{3}}D_a\gamma_c\gamma_a\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{ie\Lambda}{3M}\left[2F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}-2F_{ca}\Phi_a^{(+)}+F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)}\right]=0.$$

Это первое нужное в этом разделе уравнение. Обращаем внимание на то, что в пропорциональное Λ слагаемое входит часть электромагнитного тензора, отвечающая только магнитному полю.

Второе уравнение имеет вид

$$2M\Phi_c^{(-)}-D_4\Phi_c^{(-)}+D_a\gamma_a\left[\Phi_c^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_c^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{2}{3}\gamma_c D_a\left[\Phi_a^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\gamma_c D_a\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}D_c\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-\frac{1}{3\sqrt{3}}D_a\gamma_c\gamma_a\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{ie\Lambda}{3M}\Bigg\{2F_{ab}\gamma_c\gamma_a\left[\Phi_b^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]-$$

$$-2F_{ca}\left[\Phi_a^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]-6F_{ac}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]-2F_{ac}\gamma_a\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-$$

$$-2F_{c4}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\left(\gamma_a\Phi_a^{(0)}\right)\right]-\frac{4}{3}F_{a4}\gamma_c\left[\Phi_a^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]+$$

$$+F_{ab}\gamma_a\gamma_b\left[\Phi_c^{(-)}+\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)}\right]+2F_{a4}\gamma_a\left[\Phi_c^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_c^{(0)}\right]-$$

$$-3F_{ab}\gamma_c\gamma_a\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]-\frac{2}{3}F_{ab}\gamma_c\gamma_a\gamma_b\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]+4F_{a4}\gamma_c\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_a^{(0)}\right]+$$

$$+\varepsilon_{abc}F_{ab}\gamma_5\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]+2\varepsilon_{acb}F_{a4}\gamma_5\left[\Phi_b^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]-$$

$$-\frac{1}{3}\varepsilon_{abk}F_{ab}\gamma_c\gamma_k\gamma_5\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_4^{(0)}\right]-\frac{2}{3}\varepsilon_{akb}F_{a4}\gamma_c\gamma_k\gamma_5\left[\Phi_b^{(+)}+\frac{1}{2}(1+\gamma_4)\Phi_b^{(0)}\right]\Bigg\}=0. \qquad (11)$$

Отбрасывая в (11) малые члены, находим приближенное уравнение

$$2M\Phi_c^{(-)} + D_a\gamma_a\Phi_c^{(+)} - \frac{2}{3}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)} -$$

$$-\frac{ie\Lambda}{3M}\left\{-\frac{4}{3}F_{a4}\gamma_c\Phi_a^{(+)} + 2F_{a4}\gamma_a\Phi_c^{(+)} + 2\varepsilon_{acb}F_{a4}\gamma_5\Phi_b^{(+)} - \frac{2}{3}\gamma_5\varepsilon_{akb}F_{a4}\gamma_c\gamma_k\Phi_b^{(+)}\right\} = 0. \qquad (12)$$

Это соотношение позволяет выразить малую векторную компоненту $\Phi_c^{(-)}$ через большую $\Phi_c^{(+)}$. Обращаем внимание на то, что в пропорциональное Λ слагаемое входит часть электромагнитного тензора, отвечающая только электрическому полю.

Вместо (12) можно рассматривать более грубое приближение, назовем его приближением первого порядка:

$$\Phi_c^{(-)} = -\frac{1}{2M}\left(D_a\gamma_a\Phi_c^{(+)} - \frac{2}{3}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}\right);$$

тогда (12) можно понимать как приближение второго порядка

$$\Phi_c^{(-)} = -\frac{1}{2M}\left(D_a\gamma_a\Phi_c^{(+)} - \frac{2}{3}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}\right) +$$

$$+\frac{ie\Lambda}{3M^2}\left\{-\frac{2}{3}F_{a4}\gamma_c\Phi_a^{(+)} + F_{a4}\gamma_a\Phi_c^{(+)} + \varepsilon_{acb}F_{a4}\gamma_5\Phi_b^{(+)} - \frac{1}{3}\gamma_5\varepsilon_{akb}F_{a4}\gamma_c\gamma_k\Phi_b^{(+)}\right\}.$$

С учетом этого полученные выше равенства (9) также нужно рассматривать как приближения второго порядка. В первом приближении вместо (9) будем иметь более простые соотношения:

$$\Phi_4^{(0)} = \frac{1}{M}D_a\Phi_a^{(+)}, \quad \gamma_a\Phi_a^{(0)} = -\frac{1}{M}D_a\Phi_a^{(+)},$$

$$(1-\gamma_4)\Phi_c^{(0)} = -\frac{2}{3M}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}, \quad \Phi_c^{(0)} = -\frac{1}{3M}\gamma_c D_a\Phi_a^{(+)}. \qquad (13)$$

Нерелятивистское уравнение в первом приближении. Найдем нерелятивистское уравнение относительно большой компоненты $\Phi_c^{(+)}$ в приближении первого порядка. Исходим из уравнения (10). Малые функции определяем через большие компоненты $\Phi_c^{(+)}$ в первом приближении (13). В результате получаем

$$D_4\Phi_c^{(+)} - \frac{1}{2M}D^2\Phi_c^{(+)} + \frac{ie}{3M}F_{ab}\left\{\frac{3}{4}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)} + \gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}\right\} -$$

$$-\frac{ie\Lambda}{3M}\left\{2F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)} - 2F_{ca}\Phi_a^{(+)} + F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)}\right\} = 0. \qquad (14)$$

Формально здесь написано 16 уравнений. Покажем, что независимыми из них являются только четыре. Затем убедимся, что в уравнении для четырех компонент пропорциональный параметру Λ член обращается тождественно в нуль. Для этого сначала детализируем структуру нерелятивистских функций $\Phi_c^{(+)}$ (см. (4)):

$$\Phi_1^{(+)} = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)[2\Phi_1 - \gamma_1\gamma_2\Phi_2 + \gamma_3\gamma_1\Phi_3],$$

$$\Phi_2^{(+)} = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)[2\Phi_2 + \gamma_1\gamma_2\Phi_1 - \gamma_2\gamma_3\Phi_3],$$

$$\Phi_3^{(+)} = \frac{1}{6}(1+\gamma_4)[2\Phi_3 - \gamma_3\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\gamma_3\Phi_2].$$

Ниже потребуется явный вид матриц Дирака:

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix}, \quad \gamma_2\gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_3\gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

С учетом этого находим следующее представление для компонент $\Phi_c^{(+)}$ (первый индекс – биспинорный; второй принимает значения 1, 2, 3):

$$\Phi_1^{(+)} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2(\Phi_{11}+\Phi_{31}) + i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) + (\Phi_{23}+\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{21}+\Phi_{41}) - i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) - (\Phi_{13}+\Phi_{33}) \\ 2(\Phi_{11}+\Phi_{31}) + i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) + (\Phi_{23}+\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{21}+\Phi_{41}) - i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) - (\Phi_{13}+\Phi_{33}) \end{vmatrix},$$

$$\Phi_2^{(+)} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2(\Phi_{12}+\Phi_{32}) - i(\Phi_{11}-\Phi_{23}+\Phi_{31}-\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{22}+\Phi_{42}) + i(\Phi_{21}+\Phi_{41}+\Phi_{13}+\Phi_{33}) \\ 2(\Phi_{12}+\Phi_{32}) - i(\Phi_{11}-\Phi_{23}+\Phi_{31}-\Phi_{43}) \\ 2(\Phi_{22}+\Phi_{42}) + i(\Phi_{21}+\Phi_{41}+\Phi_{13}+\Phi_{33}) \end{vmatrix},$$

$$\Phi_3^{(+)} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2(\Phi_{13}+\Phi_{33}) - (\Phi_{21}+\Phi_{41}) - i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) \\ 2(\Phi_{23}+\Phi_{43}) + (\Phi_{11}+\Phi_{31}) - i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) \\ 2(\Phi_{13}+\Phi_{33}) - (\Phi_{21}+\Phi_{41}) - i(\Phi_{22}+\Phi_{42}) \\ 2(\Phi_{23}+\Phi_{43}) + (\Phi_{11}+\Phi_{31}) - i(\Phi_{12}+\Phi_{32}) \end{vmatrix}.$$

Отмечаем совпадение строк (первой с третьей и второй с четвертой) в каждом из столбцов Φ_1^+, Φ_2^+, Φ_3^+. Это означает, что в нерелятивистских функциях $\Phi_c^{(+)}$ имеем не 12, а только 6 независимых компонент. Кроме того, убеждаемся, что выполняются два тождества:

$$\Phi_{11}^{(+)} - i\Phi_{12}^{(+)} = \Phi_{23}^{(+)}, \quad \Phi_{21}^{(+)} + i\Phi_{22}^{(+)} = -\Phi_{13}^{(+)}. \tag{15}$$

По-другому это можно записать так:

$$\Phi_1^{(+)} = \begin{vmatrix} \Phi_{11}^{(+)} \\ \Phi_{21}^{(+)} \\ \Phi_{11}^{(+)} \\ \Phi_{21}^{(+)} \end{vmatrix}, \quad \Phi_2^{(+)} = \begin{vmatrix} \Phi_{12}^{(+)} \\ \Phi_{22}^{(+)} \\ \Phi_{12}^{(+)} \\ \Phi_{22}^{(+)} \end{vmatrix}, \quad \Phi_3^{+} = \begin{vmatrix} \Phi_{13}^{(+)} \\ \Phi_{23}^{(+)} \\ \Phi_{13}^{(+)} \\ \Phi_{23}^{(+)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\Phi_{21}^{(+)} + i\Phi_{22}^{(+)}) \\ (\Phi_{11}^{(+)} - i\Phi_{12}^{(+)}) \\ -(\Phi_{21}^{(+)} + i\Phi_{22}^{(+)}) \\ (\Phi_{11}^{(+)} - i\Phi_{12}^{(+)}) \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Последнее означает, что в нерелятивистских функциях $\Phi_c^{(+)}$ имеем не 6, а только 4 независимые компоненты. Будем собирать эти независимые компоненты в следующий столбец:

$$\psi = \left|\begin{matrix} \Phi^{(+)}_{11} \\ \Phi^{(+)}_{21} \\ \Phi^{(+)}_{12} \\ \Phi^{(+)}_{22} \end{matrix}\right|.$$

Теперь обратимся к нерелятивистскому 16-мерному уравнению (14). Сначала рассмотрим часть, содержащую Λ-член. Пусть $c = 1$, соответствующий член задается выражением

$$X_{\Lambda(1)} = -\frac{ie}{3M}\Lambda\left\{2F_{ab}\gamma_1\gamma_a\Phi^{(+)}_b - 2F_{1a}\Phi^{(+)}_a + F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi^{(+)}_1\right\}. \tag{17}$$

Учитываем суммирование по повторяющимся индексам и явные выражения для матриц Дирака, в результате находим

$$X_{\Lambda(1)} = -2\frac{ie\Lambda}{3M}F_{23}\left|\begin{matrix} -i\Phi^{(+)}_{13} + \Phi^{(+)}_{22} - i\Phi^{(+)}_{21} \\ i\Phi^{(+)}_{23} - \Phi^{(+)}_{12} - i\Phi^{(+)}_{11} \\ -i\Phi^{(+)}_{33} + \Phi^{(+)}_{42} - i\Phi^{(+)}_{41} \\ i\Phi^{(+)}_{43} - \Phi^{(+)}_{32} - i\Phi^{(+)}_{31} \end{matrix}\right|.$$

В силу соотношений (15)–(16) для $X_{\Lambda(1)}$ получаем тождество

$$X_{\Lambda(1)} = -\frac{2ie\Lambda}{3M}F_{[23]}\left|\begin{matrix} -i\Phi^{(+)}_{13} + \Phi^{(+)}_{22} - i\Phi^{(+)}_{21} \\ i\Phi^{(+)}_{23} - \Phi^{(+)}_{12} - i\Phi^{(+)}_{11} \\ -i\Phi^{(+)}_{13} + \Phi^{(+)}_{22} - i\Phi^{(+)}_{21} \\ i\Phi^{(+)}_{23} - i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \end{matrix}\right| = -\frac{2ie\Lambda}{3M}F_{[23]}\left|\begin{matrix} i(\Phi^{(+)}_{21} + i\Phi^{(+)}_{22}) + \Phi^{(+)}_{22} - i\Phi^{(+)}_{21} \\ i(\Phi^{(+)}_{11} - i\Phi^{(+)}_{12}) - \Phi^{(+)}_{12} - i\Phi^{(+)}_{11} \\ i(\Phi^{(+)}_{21} + i\Phi^{(+)}_{22}) + \Phi^{(+)}_{22} - i\Phi^{(+)}_{21} \\ i(\Phi^{(+)}_{11} - i\Phi^{(+)}_{12}) - \Phi^{(+)}_{11} - i\Phi^{(+)}_{12} \end{matrix}\right| \equiv 0.$$

Таким образом, вклад этого члена обращается в нуль. Пусть $c = 2$:

$$X_{\Lambda(2)} = -\frac{ie\Lambda}{3M}\left\{2F_{ab}\gamma_2\gamma_a\Phi^{(+)}_b - 2F_{2a}\Phi^{(+)}_a + F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi^{(+)}_2\right\}.$$

Проделав аналогичные вычисления, также приходим к тождеству:

$$X_{\Lambda(2)} = -\frac{ie\Lambda}{3M}\left\{2F_{ab}\gamma_2\gamma_a\Phi^{(+)}_b - 2F_{2a}\Phi^{(+)}_a + F_{ab}\gamma_a\gamma_b\Phi^{(+)}_2\right\} =$$

$$= -2\frac{ie\Lambda}{3M}F_{31}\left|\begin{matrix} i(\Phi^{(+)}_{21} + i\Phi^{(+)}_{22}) - i\Phi^{(+)}_{21} + \Phi^{(+)}_{22} \\ i(\Phi^{(+)}_{11} - i\Phi^{(+)}_{12}) - i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \\ -i\Phi^{(+)}_{21} + \Phi^{(+)}_{22} + i(\Phi^{(+)}_{21} + i\Phi^{(+)}_{22}) \\ i(\Phi^{(+)}_{11} - i\Phi^{(+)}_{12}) - i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \end{matrix}\right| \equiv 0.$$

Можно показать, что и при $c = 3$ пропорциональный параметру Λ член $X_{\Lambda(3)}$ дает нуль. Следовательно, уравнение (14) принимает простой вид

$$D_4\Phi^{(+)}_c - \frac{1}{2M}D^2\Phi^{(+)}_c + \frac{ie}{3M}F_{ab}\left\{\frac{3}{4}\gamma_a\gamma_b\Phi^{(+)}_c + \gamma_c\gamma_a\Phi^{(+)}_b\right\} = 0. \tag{18}$$

Формально уравнение (18) является 16-компонентным, однако из общей теории известно, что нерелятивистская волновая функция должна содержать только 4 компоненты. Следовательно, из уравнения (18) нужно выделить независимое 4-компонентное. В детальной форме уравнение (18) записывается следующим образом (круглые скобки при символе (+) опускаем):

$$D_4\Phi_c^+ - \frac{1}{2M}D^2\Phi_c^+ + \frac{ie}{3M}\left\{\frac{3}{2}\left[F_{12}\gamma_1\gamma_2 + F_{31}\gamma_3\gamma_1 + F_{23}\gamma_2\gamma_3\right]\Phi_c^+ + \right.$$

$$\left. + F_{12}\gamma_c\left[\gamma_1\Phi_2^+ - \gamma_1\Phi_1^+\right] + F_{31}\gamma_c\left[\gamma_3\Phi_1^+ - \gamma_1\Phi_3^+\right] + F_{23}\gamma_c\left[\gamma_2\Phi_3^+ - \gamma_3\Phi_2^+\right]\right\} = 0. \qquad (19)$$

Поскольку c = 1, 2, 3, то в (19) имеем три уравнения:

$$D_4\Phi_1^+ - \frac{1}{2M}D^2\Phi_1^{(+)} + \frac{ie}{3M}\left\{\frac{3}{2}\left[F_{12}\gamma_1\gamma_2 + F_{31}\gamma_3\gamma_1 + F_{23}\gamma_2\gamma_3\right]\Phi_1^+ + \right.$$

$$\left. + F_{12}\left[\Phi_2^+ - \gamma_1\gamma_2\Phi_1^+\right] + F_{31}\left[-\gamma_3\gamma_1\Phi_1^+ - \Phi_3^+\right] + F_{23}\left[\gamma_1\gamma_2\Phi_3^+ + \gamma_3\gamma_1\Phi_2^+\right]\right\} = 0, \qquad (20)$$

$$D_4\Phi_2^+ - \frac{1}{2M}D^2\Phi_2^+ + \frac{ie}{3M}\left\{\frac{3}{2}[F_{12}\gamma_1\gamma_2 + F_{31}\gamma_3\gamma_1 + F_{23}\gamma_2\gamma_3]\Phi_2^+ + \right.$$

$$\left. + F_{12}\left[\Phi_2^+ - \gamma_1\gamma_2\Phi_1^+\right] + F_{31}\left[-\gamma_3\gamma_1\Phi_1^+ - \Phi_3^+\right] + F_{23}\left[\gamma_1\gamma_2\Phi_3^+ + \gamma_3\gamma_1\Phi_2^+\right]\right\} = 0, \qquad (21)$$

$$D_4\Phi_3^+ - \frac{1}{2M}D^2\Phi_3^+ + \frac{ie}{3M}\left\{\frac{3}{2}[F_{12}\gamma_1\gamma_2 + F_{31}\gamma_3\gamma_1 + F_{23}\gamma_2\gamma_3]\Phi_3^+ + \right.$$

$$\left. + F_{12}\left[\gamma_3\gamma_1\Phi_2^+ + \gamma_2\gamma_3\Phi_1^+\right] + F_{31}\left[\Phi_1^+ - \gamma_3\gamma_1\Phi_3^+\right] + F_{23}\left[\gamma_2\gamma_3\Phi_3^+ - \Phi_2^+\right]\right\} = 0. \qquad (22)$$

Далее, в соответствии с (16)–(17), достаточно следить только за двумя уравнениям при c = 1, c = 2, т. е. за (20) и (21). Уравнение (20) дает

$$\left(D_4 - \frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi_{1(1)}^+\\ \Phi_{2(1)}^+\\ \Phi_{3(1)}^+\\ \Phi_{4(1)}^+\end{vmatrix} + \frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\frac{3}{2}\Phi_{1(1)}^+ + \Phi_{1(2)}^+ + i\Phi_{1(1)}^+\\ i\frac{3}{2}\Phi_{2(1)}^+ + \Phi_{2(2)}^+ - i\Phi_{2(1)}^+\\ -i\frac{3}{2}\Phi_{3(1)}^+ + \Phi_{3(2)}^+ + i\Phi_{3(1)}^+\\ i\frac{3}{2}\Phi_{4(1)}^+ + \Phi_{4(2)}^+ - i\Phi_{4(1)}^+\end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + F_{31}\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\Phi_{2(1)}^+ - \Phi_{1(3)}^+ - \Phi_{2(1)}^+\\ -\frac{3}{2}\Phi_{1(1)}^+ - \Phi_{2(3)}^+ + \Phi_{1(1)}^+\\ \frac{3}{2}\Phi_{4(1)}^+ - \Phi_{3(3)}^+ - \Phi_{4(1)}^+\\ -\frac{3}{2}\Phi_{3(1)}^+ - \Phi_{4(3)}^+ + \Phi_{3(1)}^+\end{vmatrix} + F_{23}\begin{vmatrix}-i\frac{3}{2}\Phi_{2(1)}^+ - i\Phi_{1(3)}^+ + \Phi_{2(2)}^+\\ -i\frac{3}{2}\Phi_{1(1)}^+ + i\Phi_{2(3)}^+ - \Phi_{1(2)}^+\\ -i\frac{3}{2}\Phi_{4(1)}^+ - i\Phi_{3(3)}^+ + \Phi_{4(2)}^+\\ -i\frac{3}{2}\Phi_{3(1)}^+ + i\Phi_{4(3)}^+ - \Phi_{3(2)}^+\end{vmatrix}\right\} = 0. \qquad (23)$$

Замечаем, что ввиду соотношений (15)–(16) в (23) фактически имеем только два разных уравнения:

$$\left(D_4 - \frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi_{1(1)}^+\\ \Phi_{2(1)}^+\end{vmatrix} +$$

$$+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+\Phi^{+}_{1(2)}\\ i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}+\Phi^{+}_{2(2)}\end{vmatrix}+F_{31}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}-\Phi^{+}_{1(3)}\\ -\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}-\Phi^{+}_{2(3)}\end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix}-i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{2(1)}-i\Phi^{+}_{1(3)}+\Phi^{+}_{2(2)}\\ -i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{2(3)}-\Phi^{+}_{1(2)}\end{vmatrix}\right\}=0.$$

Откуда, учитывая тождества $\Phi^{+}_{1(3)}=-(\Phi^{+}_{2(1)}+i\Phi^{+}_{2(2)}),\quad \Phi^{+}_{2(3)}=\Phi^{+}_{1(1)}-i\Phi^{+}_{1(2)}$, получаем

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(1)}\\ \Phi^{+}_{2(1)}\end{vmatrix}+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+\Phi^{+}_{1(2)}\\ i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}+\Phi^{+}_{2(2)}\end{vmatrix}+F_{31}\begin{vmatrix}\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{2(1)}+i\Phi^{+}_{2(2)}\\ -\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{1(2)}\end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix}-i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{2(1)}\\ -i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{1(1)}\end{vmatrix}\right\}=0. \qquad (24)$$

Аналогично рассматриваем уравнение (21), оно дает

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(2)}\\ \Phi^{+}_{2(2)}\\ \Phi^{+}_{3(2)}\\ \Phi^{+}_{4(2)}\end{vmatrix}+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{1(2)}+i\Phi^{+}_{1(2)}-\Phi^{+}_{1(1)}\\ i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{2(2)}-i\Phi^{+}_{2(2)}-\Phi^{+}_{2(1)}\\ -i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{3(2)}+i\Phi^{+}_{3(2)}-\Phi^{+}_{3(1)}\\ i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{4(2)}-i\Phi^{+}_{4(2)}-\Phi^{+}_{4(1)}\end{vmatrix}\right.+$$

$$\left.+F_{31}\begin{vmatrix}\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{2(2)}-i\Phi^{+}_{2(1)}-i\Phi^{+}_{1(3)}\\ -\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{1(2)}-i\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{2(3)}\\ \dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{4(2)}-i\Phi^{+}_{4(1)}-i\Phi^{+}_{3(3)}\\ -\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{3(2)}-i\Phi^{+}_{3(1)}+i\Phi^{+}_{4(3)}\end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix}-i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{2(2)}+\Phi^{+}_{1(3)}+i\Phi^{+}_{2(2)}\\ -i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{1(2)}+\Phi^{+}_{2(3)}+i\Phi^{+}_{1(2)}\\ -i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{4(2)}+\Phi^{+}_{3(3)}+i\Phi^{+}_{4(2)}\\ -i\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{3(2)}+\Phi^{+}_{4(3)}+i\Phi^{+}_{3(2)}\end{vmatrix}\right\}=0. \qquad (25)$$

Ввиду соотношений (15)–(16) в (25) имеем только два разных уравнения:

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\begin{vmatrix}\Phi^{+}_{1(2)}\\ \Phi^{+}_{2(2)}\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\begin{vmatrix}-i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{1(2)}-\Phi^{+}_{1(1)}\\ i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{2(2)}-\Phi^{+}_{2(1)}\end{vmatrix}+F_{31}\begin{vmatrix}\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{2(2)}-i\Phi^{+}_{2(1)}-i\Phi^{+}_{1(3)}\\ -\dfrac{3}{2}\Phi^{+}_{1(2)}-i\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{2(3)}\end{vmatrix}+F_{23}\begin{vmatrix}-i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{2(2)}+\Phi^{+}_{1(3)}\\ -i\dfrac{1}{2}\Phi^{+}_{1(2)}+\Phi^{+}_{2(3)}\end{vmatrix}\right\}=0.$$

Откуда, учитывая тождества

$$\frac{3}{2}\Phi^{+}_{2(2)}-i\Phi^{+}_{2(1)}-i\Phi^{+}_{1(3)}=\frac{1}{2}\Phi^{+}_{2(2)},\quad -\frac{3}{2}\Phi^{+}_{1(2)}-i\Phi^{+}_{1(1)}+i\Phi^{+}_{2(3)}=-\frac{1}{2}\Phi^{+}_{1(2)},$$

$$-i\frac{1}{2}\Phi^{+}_{2(2)}+\Phi^{+}_{1(3)}=-\Phi^{+}_{2(1)}-i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{2(2)},\quad -\frac{i}{2}\Phi^{+}_{1(2)}+\Phi^{+}_{2(3)}=-i\frac{3}{2}\Phi^{+}_{1(2)}+\Phi^{+}_{1(1)},$$

находим еще два уравнения

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\left|\begin{matrix}\Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{matrix}\right|+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\left|\begin{matrix}-\frac{i}{2}\Phi^+_{1(2)}-\Phi^+_{1(1)}\\ \frac{i}{2}\Phi^+_{2(2)}-\Phi^+_{2(1)}\end{matrix}\right|+F_{31}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\Phi^+_{2(2)}\\ -\frac{1}{2}\Phi^+_{1(2)}\end{matrix}\right|+F_{23}\left|\begin{matrix}-\Phi^+_{2(1)}-i\frac{3}{2}\Phi^+_{2(2)}\\ \Phi^+_{1(1)}-\frac{3}{2}\Phi^+_{1(2)}\end{matrix}\right|\right\}=0. \qquad (26)$$

Собираем уравнения (24) и (26) в одно 4-компонентное:

$$\left(D_4-\frac{1}{2M}D^2\right)\left|\begin{matrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{matrix}\right|+\frac{ie}{3M}\left\{F_{12}\left|\begin{matrix}-\frac{i}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 1\\ -1 & 0 & -\frac{i}{2} & 0\\ 0 & -1 & 0 & \frac{i}{2}\end{matrix}\right|+\right.$$

$$\left.+F_{31}\left|\begin{matrix}0 & \frac{3}{2} & 0 & i\\ -\frac{3}{2} & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{matrix}\right|+F_{23}\left|\begin{matrix}0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0\\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -i\frac{3}{2}\\ 1 & 0 & -i\frac{3}{2} & 0\end{matrix}\right|\right\}\left|\begin{matrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{matrix}\right|=0. \qquad (27)$$

Введем три матрицы:

$$S_1=-i\left|\begin{matrix}0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0\\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -i\frac{3}{2}\\ 1 & 0 & -i\frac{3}{2} & 0\end{matrix}\right|,\quad S_2=-i\left|\begin{matrix}0 & \frac{3}{2} & 0 & i\\ -\frac{3}{2} & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{matrix}\right|,\quad S_3=-i\left|\begin{matrix}-\frac{i}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 1\\ -1 & 0 & -\frac{i}{2} & 0\\ 0 & -1 & 0 & \frac{i}{2}\end{matrix}\right|.$$

Убеждаемся, что выполняются коммутационные соотношения

$$S_1S_2-S_2S_1=iS_3,\quad S_2S_3-S_3S_2=iS_1,\quad S_3S_1-S_1S_3=iS_2.$$

Следовательно, уравнение (27) можно представить так:

$$\left\{D_4-\frac{1}{2M}D^2-\frac{e}{3M}(F_{23}S_1+F_{31}S_2+F_{12}S_3)\right\}\left|\begin{matrix}\Phi^+_{1(1)}\\ \Phi^+_{2(1)}\\ \Phi^+_{1(2)}\\ \Phi^+_{2(2)}\end{matrix}\right|=0, \qquad (28)$$

оно совпадает с нерелятивистским 4-компонентным уравнением в теории Паули – Фирца [21].

Легко найти преобразование, делающее матрицу третьей проекции спина диагональной. Пусть

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi^{+}_{1(1)} \\ \Phi^{+}_{2(1)} \\ \Phi^{+}_{1(2)} \\ \Phi^{+}_{2(2)} \end{vmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{vmatrix}, \quad U^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & i \end{vmatrix}.$$

Выражения для компонент оператора спина в новом базисе такие:

$$S'_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad S'_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad S'_2 = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение (28) принимает в этом базисе следующий вид:

$$\left\{ D_4 - \frac{1}{2M} D^2 - \frac{e}{3M} \left(F_{23} S'_1 + F_{31} S'_2 + F_{12} S'_3 \right) \right\} \psi' = 0;$$

напоминаем, что $D_4 = \partial_4 - ieA_4$, $D_k = \partial_k - ieA_k$. Таким образом, в первом приближении в нерелятивистском уравнении вклад дополнительного члена взаимодействия частицы с внешним магнитным полем отсутствует. Уравнение для частицы в электрическом поле было также исследовано и показано, что дополнительное взаимодействие с электрическим полем также отсутствует [22].

Учет квадратичных по Λ членов. Определим вид нерелятивистского уравнения с учетом квадратичных по Λ членов. Для этого малые функции в исходном уравнении (10) выразим через большие, используя второй порядок приближения. Очевидно, что по сравнению с вариантом теории, рассмотренным в предыдущем разделе, здесь должно возникать квадратичное по Λ слагаемое. Последнее может быть представлено в виде (разбиваем его на две части: в одну входит только магнитное поле $F_{[ab]}$, в другую – только электрическое F_{k4})

$$Q_2 = \frac{1}{M} \left(\frac{e\Lambda}{3M} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left(6 - 14\sqrt{3} \right) F_{[ab]} F_{kn} (\gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_k - \gamma_c \gamma_a \gamma_b \gamma_k) \Phi^{(+)}_n + 4 F_{ab} F_{kn} \gamma_c \gamma_a \gamma_b \gamma_k \Phi^{(+)}_n + \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{3} \varepsilon_{knf} F_{ab} F_{[k]} (\gamma_c \gamma_a \gamma_b \gamma_5 - \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_5) \Phi^{(+)}_f - 2 \varepsilon_{abk} F_{ab} F_{nf} \gamma_c \gamma_k \gamma_5 \gamma_n \Phi^{(+)}_f +$$

$$+ \left[-\frac{2}{3} \left(6 - 14\sqrt{3} \right) + 2 \left(6 - 14\sqrt{3} \right) + 12 \right] F_{ca} F_{kn} \gamma_a \gamma_k \Phi^{(+)}_n +$$

$$\left. + \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} \right] F_{ca} F_{kn} \gamma_a \gamma_5 \Phi^{(+)}_f \varepsilon_{knf} + 6 \varepsilon_{abc} F_{ab} F_{kn} \gamma_5 \gamma_k \Phi^{(+)}_n \right\} +$$

$$+ \frac{1}{M} \left(\frac{e\Lambda}{3M} \right)^2 \left\{ 12 F_{c4} F_{k4} \Phi^{(+)}_k - \frac{8}{9} F_{a4} F_{k4} \gamma_c \gamma_a \Phi^{+}_{(k)} + \frac{4}{3} F_{a4} F_{[k4]} \gamma_c \gamma_k \Phi^{(+)}_a + \right.$$

$$+ \frac{4}{3} \varepsilon_{kaf} F_{a4} F_{k4} \gamma_c \gamma_5 \Phi^{(+)}_f - \frac{4}{9} \varepsilon_{knf} F_{a4} F_{k4} \gamma_c \gamma_a \gamma_n \gamma_5 \Phi^{(+)}_f + \frac{8}{3} F_{a4} F_{k]} \gamma_c \gamma_a \Phi^{(+)}_k + \frac{4}{3} F_{a4} F_{k4} \gamma_a \gamma_c \Phi^{(+)}_k -$$

$$- 2 F_{a4} F_{k4} \gamma_a \gamma_k \Phi^{(+)}_c - 2 \varepsilon_{kcn} F_{a4} F_{k4} \gamma_a \gamma_5 \Phi^{(+)}_n +$$

$$+ \frac{2}{3} \varepsilon_{knf} F_{a4} F_{[k4]} \gamma_a \gamma_c \gamma_n \gamma_5 \Phi^{(+)}_f - 4 F_{a4} F_{k4} \gamma_a \gamma_c \Phi^{(+)}_k - 8 F_{a4} F_{k4} \gamma_c \gamma_a \Phi^{(+)}_k + \frac{4}{3} \varepsilon_{acb} F_{a4} F_{k4} \gamma_b \gamma_5 \Phi^{(+)}_k -$$

$$-2\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{k4}\gamma_k\gamma_5\Phi_b^{(+)}+2\varepsilon_{acb}\varepsilon_{kbn}F_{a]}F_{k4}\Phi_n^{(+)}-$$

$$-\frac{2}{3}\varepsilon_{acb}\varepsilon_{knf}F_{a4}F_{k4}\gamma_b\gamma_n\Phi_f^{(+)}-4\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{k4}\gamma_b\gamma_5\Phi_k^{(+)}-\frac{4}{9}\varepsilon_{akb}F_{a4}F_{n4}\gamma_c\gamma_k\gamma_b\gamma_5\Phi_n^{(+)}+$$

$$+\frac{2}{3}\varepsilon_{akb}F_{a4}F_{n4}\gamma_c\gamma_k\gamma_n\gamma_5\Phi_b^{(+)}-\frac{2}{3}\varepsilon_{akb}\varepsilon_{nbf}F_{a4}F_{n4}\gamma_c\gamma_k\Phi_f^{(+)}+$$

$$+\frac{2}{9}\varepsilon_{akb}\varepsilon_{nrf}F_{a4}F_{n4}\gamma_c\gamma_k\gamma_b\gamma_r\Phi_f^{(+)}+\frac{4}{3}\varepsilon_{akb}F_{a4}F_{n4}\gamma_c\gamma_k\gamma_b\gamma_5\Phi_n^{(+)}\Big\}. \qquad (29)$$

Магнитное поле. Рассмотрим выражение Q_2 из (29) при наличии только магнитного поля. После некоторых дополнительных преобразований оно приводится к виду

$$Q_2=\frac{2}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\left\{2\varepsilon_{cab}F_{ab}F_{kf}(\gamma_4-1)\gamma_k-\varepsilon_{abk}F_{ab}F_{cf}\gamma_k+\varepsilon_{abk}F_{ab}F_{kf}\gamma_c+2F_{ca}F_{af}\gamma_4\gamma_5\right\}\gamma_5\Phi_f^{(+)}.$$

Следовательно, полное нерелятивистское уравнение для частицы в магнитном поле записывается так (учитываем члены обоих порядков по Λ):

$$D_4\Phi_c^{(+)}-\frac{1}{2M}D^2\Phi_c^{(+)}+\frac{ie}{3M}F_{ab}\left[\frac{3}{4}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)}+\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}\right]-$$

$$-\frac{ie\Lambda}{3M}\left[2F_{ab}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)}-2F_{c]}\Phi_a^{(+)}+F_{[ab]}\gamma_a\gamma_b\Phi_c^{(+)}\right]+$$

$$+\frac{2}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\left[2\varepsilon_{cab}F_{ab}F_{kf}(\gamma_4-1)\gamma_k-\varepsilon_{abk}F_{ab}F_{cf}\gamma_k+\varepsilon_{abk}F_{ab}F_{kf}\gamma_c+2F_{ca}F_{af}\gamma_4\gamma_5\right]\gamma_5\Phi_f^{(+)}=0. \qquad (30)$$

Выше было показано, что член взаимодействия, пропорциональный первой степени параметра Λ, дает нулевой вклад. Следовательно, нужно анализировать только слагаемые, пропорциональные Λ^2. Пусть $c = 1$, соответствующий член задается выражением

$$\Lambda_{(1)}^2=\frac{2}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\left[2\varepsilon_{1ab}F_{ab}F_{kn}(\gamma_4-1)\gamma_k-\varepsilon_{abk}F_{ab}F_{1f}\gamma_k++\varepsilon_{abk}F_{ab}F_{kf}\gamma_1+2F_{1a}F_{af}\gamma_4\gamma_5\right]\gamma_5\Phi_f^{(+)}.$$

После необходимых вычислений получаем

$$\Lambda_{(1)}^2=\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\left\{F_{12}F_{12}\left[-\gamma_3\gamma_5\Phi_2^{(+)}-\Phi_1^{(+)}\right]+\right.$$

$$+F_{12}F_{31}\left[+\gamma_3\gamma_5\Phi_3^{(+)}-\gamma_2\gamma_5\Phi_2^{(+)}\right]+F_{12}F_{23}\left[-\gamma_1\gamma_5\Phi_2^{(+)}+\Phi_3^{(+)}\right]+$$

$$\left.+F_{31}F_{31}\left[+\gamma_2\gamma_5\Phi_3^{(+)}-\Phi_1^{(+)}\right]+F_{31}F_{23}\left[-\gamma_1\gamma_5\Phi_3^{(+)}-\Phi_2^{(+)}\right]\right\}.$$

Дальше, учитывая явный вид матриц Дирака, находим

$$\Lambda_{(1)}^2=\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\left\{F_{12}F_{12}\begin{vmatrix} i\Phi_{12}^{(+)}-\Phi_{11}^{(+)} \\ -i\Phi_{22}^{(+)}-\Phi_{21}^{(+)} \\ i\Phi_{12}^{(+)}-\Phi_{11}^{(+)} \\ i\Phi_{22}^{(+)}-\Phi_{21}^{(+)} \end{vmatrix}+F_{12}F_{31}\begin{vmatrix} i\Phi_{21}^{(+)} \\ i\Phi_{11}^{(+)} \\ i\Phi_{21}^{(+)} \\ i\Phi_{11}^{(+)} \end{vmatrix}+\right.$$

$$+F_{12}F_{23}\begin{vmatrix} -\Phi^{(+)}_{21} \\ \Phi^{(+)}_{11} \\ -\Phi^{(+)}_{21} \\ \Phi^{(+)}_{11} \end{vmatrix} + F_{31]}F_{31}\begin{vmatrix} -i\Phi^{(+)}_{12}) \\ i\Phi^{(+)}_{22} \\ -i\Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{22} \end{vmatrix} + F_{31}F_{23}\begin{vmatrix} -i\Phi^{(+)}_{11} - 2\Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{21} - 2\Phi^{(+)}_{22} \\ -i\Phi^{(+)}_{11} - 2\Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{21} - 2\Phi^{(+)}_{22} \end{vmatrix}\Bigg\}.$$

Теперь пусть в (30) $c = 2$. Действуя, как и в предыдущем случае, находим

$$\Lambda^2_{(2)} = \frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\Bigg\{F_{12}F_{12}\begin{vmatrix} -i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{21} - \Phi^{(+)}_{22} \\ -i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{21} - \Phi^{(+)}_{22} \end{vmatrix} + F_{12}F_{31}\begin{vmatrix} -i\Phi^{(+)}_{22} \\ -i\Phi^{(+)}_{12} \\ -i\Phi^{(+)}_{22} \\ -i\Phi^{(+)}_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+F_{12}F_{23}\begin{vmatrix} -2i\Phi^{(+)}_{21} + \Phi^{(+)}_{22} \\ -2i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \\ -2i\Phi^{(+)}_{21} + \Phi^{(+)}_{22} \\ -2i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \end{vmatrix} + F_{31}F_{23}\begin{vmatrix} i\Phi^{(+)}_{12} \\ -i\Phi^{(+)}_{22} \\ i\Phi^{(+)}_{12} \\ -i\Phi^{(+)}_{22} \end{vmatrix} + F_{23}F_{23}\begin{vmatrix} i\Phi^{(+)}_{11} \\ -i\Phi^{(+)}_{21} \\ i\Phi^{(+)}_{11} \\ -i\Phi^{(+)}_{21} \end{vmatrix}\Bigg\}.$$

В нерелятивистском уравнении, заданном относительно 4-компонентной функции ψ, будет присутствовать дополнительное слагаемое

$$\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\Bigg\{F_{12}F_{12}\begin{vmatrix} i\Phi^{(+)}_{12} - \Phi^{(+)}_{11} \\ -i\Phi^{(+)}_{22} - \Phi^{(+)}_{21} \\ -i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{21} - \Phi^{(+)}_{22} \end{vmatrix} + F_{12}F_{31}\begin{vmatrix} i\Phi^{(+)}_{21} \\ i\Phi^{(+)}_{11} \\ -i\Phi^{(+)}_{22} \\ -i\Phi^{(+)}_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+F_{12}F_{23}\begin{vmatrix} -\Phi^{(+)}_{21} \\ \Phi^{(+)}_{11} \\ -2i\Phi^{(+)}_{21} + \Phi^{(+)}_{22} \\ -2i\Phi^{(+)}_{11} - \Phi^{(+)}_{12} \end{vmatrix} + F_{31}F_{31}\begin{vmatrix} -i\Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{22} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + F_{31}F_{23}\begin{vmatrix} i\Phi^{(+)}_{11} - 2\Phi^{(+)}_{12} \\ i\Phi^{(+)}_{21} - 2\Phi^{(+)}_{22} \\ i\Phi^{(+)}_{12} \\ -i\Phi^{(+)}_{22} \end{vmatrix} + F_{23}F_{23}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ i\Phi^{(+)}_{11} \\ -i\Phi^{(+)}_{21} \end{vmatrix}\Bigg\},$$

или в матричной форме (вводим 3-вектор магнитного поля: $F_{12} = B_3$, $F_{21} = -B_3$ и т. д.)

$$\frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\Bigg\{B_3^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -1 \end{vmatrix} + B_3B_2\begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix} + B_3B_1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 1 \\ -2i & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+B_2^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + B_2B_1\begin{vmatrix} -i & 0 & -2 & 0 \\ 0 & i & 0 & -2 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{vmatrix} + B_1^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix}\Bigg\}\begin{vmatrix} \Phi^{(+)}_{11} \\ \Phi^{(+)}_{21} \\ \Phi^{(+)}_{12} \\ \Phi^{(+)}_{22} \end{vmatrix}.$$

Полное нерелятивистское уравнение записывается символически так (введены обозначения для 6 матриц):

$$D_4\psi = \left\{\frac{1}{2M}D^2 + \frac{e}{3M}\sum_i B_iS_i - \frac{4}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2\sum_{(ik)} B_iB_kM_{ik}\right\}\psi.$$

Это уравнение описывает дополнительное взаимодействие частицы с внешним магнитным полем, причем данное взаимодействие является квадратичным по полю. Ввиду структуры пропорционального Λ^2 члена взаимодействия, это уравнение можно рассматривать как описывающее частицу с магнитным квадрупольным моментом.

Электрическое поле. Рассмотрим выражение для Q_2 при наличии только электрического поля. В этом случае оно представимо в виде

$$Q_2 = \frac{1}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2 \Big\{ 12F_{c4}F_{k4}\Phi_k^{(+)} + \frac{4}{9}F_{a4}F_{k4}\gamma_c\gamma_a\Phi_k^{(+)} -$$

$$-\frac{4}{9}\varepsilon_{knf}F_{c4}F_{k4}\gamma_n\gamma_5\Phi_f^{(+)} + \frac{4}{9}\varepsilon_{kcf}F_{a4}F_{k4}\gamma_a\gamma_5\Phi_f^{(+)} - \frac{4}{9}F_{a4}F_{c4}\Phi_a^{(+)} + \frac{4}{9}F_{a4}F_{a4}\Phi_c^{(+)} +$$

$$+\frac{8}{3}F_{a4}F_{k4}\gamma_c\gamma_a\Phi_k^{(+)} - \frac{4}{3}F_{a4}F_{k4}\gamma_c\gamma_a\Phi_k^{(+)} + \frac{8}{3}F_{c4}F_{k4}\Phi_k^{(+)} - 2F_{a4}F_{k4}\gamma_a\gamma_k\Phi_c^{(+)} -$$

$$-2\varepsilon_{kcn}F_{a4}F_{k4}\gamma_a\gamma_5\Phi_n^{(+)} + \frac{2}{3}\varepsilon_{knf}F_{c4]}F_{k4}\gamma_n\gamma_5\Phi_f^{(+)} + \frac{2}{3}\varepsilon_{kcf}F_{a4}F_{k4}\gamma_a\gamma_5\Phi_f^{(+)} +$$

$$+\frac{2}{3}F_{a4}F_{a4}\Phi_c^{(+)} - \frac{2}{3}F_{a4}F_{c4}\Phi_a^{(+)} + 4F_{a4}F_{k4}\gamma_c\gamma_a\Phi_k^{(+)} - 8F_{c4}F_{k4}\Phi_k^{(+)} - 8F_{a4}F_{k4}\gamma_c\gamma_a\Phi_k^{(+)} +$$

$$+\frac{4}{3}\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{k4}\gamma_b\gamma_5\Phi_k^{(+)} - 2\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{k4}\gamma_k\gamma_5\Phi_b^{(+)} - 2F_{a4}F_{a4}\Phi_c^{(+)} + 2F_{a4}F_{c4}\Phi_a^{(+)} -$$

$$-\frac{2}{3}F_{a4}F_{b4}\gamma_c\gamma_b\Phi_a^{(+)} + \frac{2}{3}F_{a4}F_{c4}\Phi_a^{(+)} - 4\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{k4}\gamma_b\gamma_5\Phi_k^{(+)} -$$

$$-\frac{4}{9}\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{k4}\gamma_b\gamma_5\Phi_k^{(+)} + \frac{4}{9}\varepsilon_{akb}F_{[a4]}F_{n4}\gamma_k\gamma_5\Phi_n^{(+)} + \frac{8}{9}F_{c4}F_{k4}\Phi_k^{(+)} +$$

$$+\frac{2}{3}\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{[n4]}\gamma_n\gamma_5\Phi_b^{(+)} - \frac{2}{3}\varepsilon_{akb}F_{a4}F_{c4}\gamma_k\gamma_5\Phi_b^{(+)} - \frac{2}{3}F_{c4}F_{b4}\Phi_b^{(+)} +$$

$$+\frac{2}{3}F_{a4}F_{a4}\Phi_c^{(+)} - \frac{2}{3}F_{a4}F_{k4}\gamma_c\gamma_k\Phi_a^{(+)} + \frac{8}{3}\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{k4}\gamma_b\gamma_5\Phi_k^{(+)} - \frac{8}{3}F_{c4}F_{k4}\Phi_k^{(+)} \Big\}.$$

Отсюда после проведения громоздких преобразований следует

$$Q_2 = \frac{1}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2 \Big\{ \frac{52}{9}F_{c4}F_{a4}\Phi_a^{(+)} - \frac{28}{9}F_{a4}F_{b4}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)} - \frac{20}{9}F_{a4}F_{a4}\Phi_c^{(+)} -$$

$$-\frac{4}{9}\varepsilon_{knf}F_{c4}F_{k4}\gamma_n\gamma_5\Phi_f^{(+)} - \frac{20}{9}\varepsilon_{kcf}F_{k4}F_{a4}\gamma_a\gamma_5\Phi_f^{(+)} - \frac{8}{9}\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{f4}\gamma_b\gamma_5\Phi_f^{(+)} \Big\}.$$

Таким образом, нерелятивистское уравнение для частицы в электрическом поле имеет вид

$$D_4\Phi_c^{(+)} - \frac{1}{2M}D^2\Phi_c^{(+)} + \frac{1}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2 \Big\{ \frac{52}{9}F_{c4}F_{a4}\Phi_a^{(+)} - \frac{28}{9}F_{a4}F_{b4}\gamma_c\gamma_a\Phi_b^{(+)} - \frac{20}{9}F_{a4}F_{a4}\Phi_c^{(+)} -$$

$$-\frac{4}{9}\varepsilon_{knf}F_{c4}F_{k4}\gamma_n\gamma_5\Phi_f^{(+)} - \frac{20}{9}\varepsilon_{kcf}F_{k4}F_{a4}\gamma_a\gamma_5\Phi_f^{(+)} - \frac{8}{9}\varepsilon_{acb}F_{a4}F_{f4}\gamma_b\gamma_5\Phi_f^{(+)} \Big\} = 0. \quad (31)$$

Детализируем явный вид дополнительного слагаемого в (31). При $c = 1$ получаем

$$\Lambda^2_{(1)} = \frac{1}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2 \left\{ F_{14}F_{14}\left[\frac{4}{9}\Phi^{(+)}_1 + \frac{4}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi^{(+)}_2 - \frac{4}{9}\gamma_2\gamma_5\Phi^{(+)}_3\right] + \right.$$

$$+F_{14}F_{24}\left[\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_2 - \frac{28}{9}\gamma_1\gamma_2\Phi^{(+)}_1 + \frac{24}{9}\gamma_1\gamma_5\Phi^{(+)}_3 + \frac{4}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi^{(+)}_1\right] +$$

$$+F_{14}F_{34}\left[\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_3 - \frac{28}{9}\gamma_1\gamma_3\Phi^{(+)}_1 - \frac{4}{9}\gamma_2\gamma_5\Phi^{(+)}_1 - \frac{24}{9}\gamma_1\gamma_5\Phi^{(+)}_2\right] +$$

$$+F_{24}F_{24}\left[-\frac{28}{9}\gamma_1\gamma_2\Phi^{(+)}_2 + \frac{20}{9}\gamma_2\gamma_5\Phi^{(+)}_3 + \frac{8}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi^{(+)}_2 - \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_1\right] +$$

$$+F_{24}F_{34}\left[-\frac{28}{9}\gamma_1\gamma_3\Phi^{(+)}_2 - \frac{28}{9}\gamma_2\gamma_5\Phi^{(+)}_2 - \frac{28}{9}\gamma_1\gamma_2\Phi^{(+)}_3 + \frac{28}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi^{(+)}_3\right] +$$

$$\left. +F_{34}F_{34}\left[-\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_1 - \frac{8}{9}\gamma_2\gamma_5\Phi^{(+)}_3 - \frac{20}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi^{(+)}_2 - \frac{28}{9}\gamma_1\gamma_3\Phi^{(+)}_3\right]\right\}.$$

Далее с учетом явного вида матриц γ_μ находим

$$\Lambda^2_{(1)} = \frac{1}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^2 \left\{ \frac{4}{9}F_{14}F_{14}\left|\begin{matrix} \Phi^{(+)}_{11} - i\Phi^{(+)}_{32} - \Phi^{(+)}_{43} \\ \Phi^{(+)}_{21} + i\Phi^{(+)}_{42} + \Phi^{(+)}_{33} \\ \Phi^{(+)}_{31} - i\Phi^{(+)}_{12} - \Phi^{(+)}_{23} \\ \Phi^{(+)}_{41} + i\Phi^{(+)}_{22} + \Phi^{(+)}_{13} \end{matrix}\right| + F_{14}F_{24}\left|\begin{matrix} \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{12} + i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{11} - i\frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{31} - i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{43} \\ \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{22} - i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{21} - i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{33} + i\frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{41} \\ \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{32} + i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{31} - i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{23} - i\frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{11} \\ \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{42} - i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{41} - i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{13} + i\frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{21} \end{matrix}\right| + \right.$$

$$+F_{14}F_{34}\left|\begin{matrix} \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{13} + \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{21} + i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{42} - \frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{41} \\ \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{23} - \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{11} + i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{32} + \frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{31} \\ \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{33} + \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{41} + i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{22} - \frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{21} \\ \frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{43} - \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{31} + i\frac{24}{9}\Phi^{(+)}_{12} + \frac{4}{9}\Phi^{(+)}_{11} \end{matrix}\right| + F_{24}F_{24}\left|\begin{matrix} i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{12} - i\frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{32} - \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{11} + \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{43} \\ -i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{22} + i\frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{42} - \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{21} - \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{33} \\ i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{32} - i\frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{12} - \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{31} + \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{23} \\ -i\frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{42} + i\frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{22} - \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{41} - \frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{13} \end{matrix}\right| +$$

$$\left. +\frac{28}{9}F_{24}F_{34}\left|\begin{matrix} -i\Phi^{(+)}_{13} + \Phi^{(+)}_{33} + \Phi^{(+)}_{42} - \Phi^{(+)}_{22} \\ i\Phi^{(+)}_{23} - i\Phi^{(+)}_{43} - \Phi^{(+)}_{32} + \Phi^{(+)}_{12} \\ -i\Phi^{(+)}_{33} + i\Phi^{(+)}_{13} + \Phi^{(+)}_{22} - \Phi^{(+)}_{42} \\ i\Phi^{(+)}_{43} - i\Phi^{(+)}_{23} - \Phi^{(+)}_{12} + \Phi^{(+)}_{22} \end{matrix}\right| + F_{34}F_{34}\left|\begin{matrix} -\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{11} + i\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{32} - \frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{43} + \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{23} \\ -\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{21} + \frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{33} - \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{13} - i\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{42} \\ -\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{31} - \frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{23} + \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{43} + i\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{12} \\ -\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{41} + \frac{8}{9}\Phi^{(+)}_{13} - \frac{28}{9}\Phi^{(+)}_{33} - i\frac{20}{9}\Phi^{(+)}_{22} \end{matrix}\right|\right\},$$

что обращается тождественно в нуль в силу условий

$$\Phi^{(+)}_{31} = \Phi^{(+)}_{11}, \quad \Phi^{(+)}_{41} = \Phi^{(+)}_{21}, \quad \Phi^{(+)}_{32} = \Phi^{(+)}_{12}, \quad \Phi^{(+)}_{42} = \Phi^{(+)}_{22},$$

$$\Phi_{33}^{(+)}=\Phi_{13}^{(+)},\quad \Phi_{43}^{(+)}=\Phi_{23}^{(+)},\quad \Phi_{23}^{(+)}=\Phi_{11}^{(+)}-i\Phi_{12}^{(+)},\quad -\Phi_{13}^{(+)}=\Phi_{21}^{(+)}+i\Phi_{22}^{(+)}.$$

Аналогичным образом, в случае $c = 2$, имеем

$$\Lambda_{(2)}^{2}=\frac{1}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^{2}\left\{F_{14}F_{14}\left[\frac{28}{9}\gamma_1\gamma_2\Phi_1^{(+)}-\frac{20}{9}\Phi_2^{(+)}-\frac{20}{9}\gamma_1\gamma_5\Phi_3^{(+)}-\frac{8}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi_1^{(+)}\right]+\right.$$

$$+F_{14}F_{24}\left[\frac{28}{9}\gamma_1\gamma_2\Phi_2^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_1^{(+)}-\frac{24}{9}\gamma_2\gamma_5\Phi_3^{(+)}-\frac{4}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi_2^{(+)}\right]+$$

$$+F_{14}F_{34}\left[\frac{28}{9}\gamma_1\gamma_2\Phi_3^{(+)}-\frac{28}{9}\gamma_2\gamma_3\Phi_1^{(+)}-\frac{28}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi_3^{(+)}+\frac{28}{9}\gamma_1\gamma_5\Phi_1^{(+)}\right]+$$

$$+F_{24}F_{24}\left[\frac{4}{9}\Phi_2^{(+)}+\frac{4}{9}\gamma_1\gamma_5\Phi_3^{(+)}-\frac{4}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi_1^{(+)}\right]+$$

$$+F_{24}F_{34}\left[\frac{24}{9}\Phi_3^{(+)}-\frac{28}{9}\gamma_2\gamma_3\Phi_2^{(+)}+\frac{4}{9}\gamma_1\gamma_5\Phi_2^{(+)}+\frac{24}{9}\gamma_2\gamma_5\Phi_1^{(+)}\right]+$$

$$\left.+F_{34}F_{34}\left[-\frac{20}{9}\Phi_2^{(+)}+\frac{20}{9}\gamma_3\gamma_5\Phi_1^{(+)}+\frac{8}{9}\gamma_1\gamma_5\Phi_3^{(+)}-\frac{28}{9}\gamma_2\gamma_3\Phi_3^{(+)}\right]\right\}.$$

Отсюда, учитывая явный вид матриц γ_μ, получаем

$$\Lambda_{(2)}^{2}=\frac{1}{M}\left(\frac{e\Lambda}{3M}\right)^{2}\times$$

$$\times\left\{F_{14}F_{14}\left|\begin{matrix}-i\frac{28}{9}\Phi_{11}^{(+)}-\frac{20}{9}\Phi_{12}^{(+)}+i\frac{20}{9}\Phi_{43}^{(+)}+i\frac{8}{9}\Phi_{31}^{(+)}\\ i\frac{28}{9}\Phi_{21}^{(+)}-\frac{20}{9}\Phi_{22}^{(+)}+i\frac{20}{9}\Phi_{33}^{(+)}-i\frac{8}{9}\Phi_{41}^{(+)}\\ -i\frac{28}{9}\Phi_{31}^{(+)}-\frac{20}{9}\Phi_{32}^{(+)}+i\frac{20}{9}\Phi_{23}^{(+)}+i\frac{8}{9}\Phi_{11}^{(+)}\\ i\frac{28}{9}\Phi_{41}^{(+)}-\frac{20}{9}\Phi_{42}^{(+)}+i\frac{20}{9}\Phi_{13}^{(+)}-i\frac{8}{9}\Phi_{21}^{(+)}\end{matrix}\right|+F_{14}F_{24}\left|\begin{matrix}-i\frac{28}{9}\Phi_{12}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{11}^{(+)}-\frac{24}{9}\Phi_{43}^{(+)}+i\frac{4}{9}\Phi_{32}^{(+)}\\ i\frac{28}{9}\Phi_{22}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{21}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{33}^{(+)}-i\frac{4}{9}\Phi_{42}^{(+)}\\ -i\frac{28}{9}\Phi_{32}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{31}^{(+)}-\frac{24}{9}\Phi_{23}^{(+)}+i\frac{4}{9}\Phi_{12}^{(+)}\\ i\frac{28}{9}\Phi_{42}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{41}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{13}^{(+)}-i\frac{4}{9}\Phi_{22}^{(+)}\end{matrix}\right|+\right.$$

$$+i\frac{28}{9}F_{14}F_{34}\left|\begin{matrix}-\Phi_{13}^{(+)}+\Phi_{21}^{(+)}+\Phi_{33}^{(+)}-\Phi_{41}^{(+)}\\ \Phi_{23}^{(+)}+\Phi_{11}^{(+)}-\Phi_{43}^{(+)}-\Phi_{31}^{(+)}\\ -\Phi_{33}^{(+)}+\Phi_{41}^{(+)}+\Phi_{13}^{(+)}-\Phi_{21}^{(+)}\\ \Phi_{43}^{(+)}+\Phi_{31}^{(+)}-\Phi_{23}^{(+)}-\Phi_{11}^{(+)}\end{matrix}\right|+\frac{4}{9}F_{24}F_{24}\left|\begin{matrix}\Phi_{12}^{(+)}-i\Phi_{43}^{(+)}+i\Phi_{31}^{(+)}\\ \Phi_{22}^{(+)}-i\Phi_{33}^{(+)}-i\Phi_{41}^{(+)}\\ \Phi_{32}^{(+)}-i\Phi_{23}^{(+)}+i\Phi_{11}^{(+)}\\ \Phi_{42}^{(+)}-i\Phi_{13}^{(+)}-i\Phi_{21}^{(+)}\end{matrix}\right|+$$

$$\left.+F_{24}F_{34}\left|\begin{matrix}\frac{24}{9}\Phi_{13}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{22}^{(+)}-i\frac{4}{9}\Phi_{42}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{41}^{(+)}\\ \frac{24}{9}\Phi_{23}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{12}^{(+)}-i\frac{4}{9}\Phi_{32}^{(+)}-\frac{24}{9}\Phi_{31}^{(+)}\\ \frac{24}{9}\Phi_{33}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{42}^{(+)}-i\frac{4}{9}\Phi_{22}^{(+)}+\frac{24}{9}\Phi_{21}^{(+)}\\ \frac{24}{9}\Phi_{43}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{32}^{(+)}-i\frac{4}{9}\Phi_{12}^{(+)}-\frac{24}{9}\Phi_{11}^{(+)}\end{matrix}\right|+F_{34}F_{34}\left|\begin{matrix}-\frac{20}{9}\Phi_{12}^{(+)}-i\frac{20}{9}\Phi_{31}^{(+)}-i\frac{8}{9}\Phi_{43}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{23}^{(+)}\\ -\frac{20}{9}\Phi_{22}^{(+)}+i\frac{20}{9}\Phi_{41}^{(+)}-i\frac{8}{9}\Phi_{33}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{13}^{(+)}\\ -\frac{20}{9}\Phi_{32}^{(+)}-i\frac{20}{9}\Phi_{11}^{(+)}-i\frac{8}{9}\Phi_{23}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{43}^{(+)}\\ -\frac{20}{9}\Phi_{42}^{(+)}+i\frac{20}{9}\Phi_{21}^{(+)}-i\frac{8}{9}\Phi_{13}^{(+)}+i\frac{28}{9}\Phi_{33}^{(+)}\end{matrix}\right|\right\},$$

это также тождественный нуль.

Таким образом, квадратичное по Λ дополнительное взаимодействие с электрическим полем отсутствует. Следовательно, уравнение Фрадкина описывает частицу со спином 3/2 только с дополнительными магнитными свойствами.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф20-РА-007).

Acknowledgements. The research was carried out under the financial support of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant no. Ф20-РА-007).

Список использованных источников

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. R. Soc. London. Ser. A. – Math. Phys. Sci. – 1936. – Vol. 155, № 886. – P. 447–459. https://doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Majorana, E. Teoria simmetrica dell elettrone e dell positrone / E. Majorana // Nuovo Cimento. – 1937. – Vol. 14, № 4. – P. 171–186. https://doi.org/10.1007/bf02961314

3. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 3–37.

4. Pauli, W. Überrelativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.

5. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. S. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64. https://doi.org/10.1103/physrev.60.61

6. Bhabha, H. J. Relativistic Wave Equations for the Elementary Particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, № 2/3. – P. 200–216. https://doi.org/10.1103/revmodphys.17.200

7. Гельфанд, И. М. Общие релятивистские инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

8. Фрадкин, Е. С. К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.

9. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. Акад. наук СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.

10. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитными и мезонными полями / В. Я. Файнберг // Тр. ФИАН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

11. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

12. Богуш, А. А. Уравнение для частицы со спином 3/2, обладающей аномальным магнитным моментом / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

13. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Изв. вузов. Физика. – 1985. – № 1. – С. 91–95.

14. Плетюхов, В. А. О взаимосвязи между различными формулировками теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. Акад. навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – № 5. – С. 90–95.

15. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 486 с.

16. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.

17. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems / V. V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

18. Fradkin Equation for a Spin 3/2 Particle in Presence of External Electromagnetic and Gravitational Fields / V. V. Kisel [et al.] // Ukr. J. Phys. – 2019. – Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117. https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1112

19. Ивашкевич, А. В. Безмассовое поле со спином 3/2: решения волнового уравнения и оператор спиральности / А. В. Ивашкевич, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 338–354. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-338-354

20. Сферические решения уравнения для частицы со спином 3/2 / А. В. Ивашкевич [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 3. – С. 282–290. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-282-290

21. Частица со спином 3/2: теория Паули – Фирца, нерелятивистский предел / А. В. Ивашкевич [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 335–349. https:// doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-335-349

22. Spin 3/2 particle: the Fradkin theory, non-relativistic approximation / A. V. Ivashkevich [et al.] // Nonlinear Dyn. Appl. – 2021. – Vol. 27. – P. 138–175.

References

1. Dirac P. A. M. Relativistic wave equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A – Mathematical and Physical Sciences*, 1936, vol. 155, no. 886, pp. 447–459. https://doi.org/10.1098/rspa.1936.0111

2. Majorana E. Teoria simmetrica dell elettrone e dell positrone. *Nuovo Cimento*, 1937, vol. 14, no. 4, pp. 171–186. https:// doi.org/10.1007/bf02961314

3. Fierz M. Über die relativistische theorie Kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 3–37.

4. Pauli W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 297–300.

5. Rarita W., Schwinger J. S. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 1941, vol. 60, no. 1, pp. 61–64. https://doi.org/10.1103/physrev.60.61

6. Bhabha H. J. Relativistic Wave Equations for the Elementary Particles. *Reviews of Modern Physics*, 1945, vol. 17, no. 2–3, pp. 200–216. https://doi.org/10.1103/revmodphys.17.200

7. Gelfand I. M., Yaglom A. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1948, vol. 18, no. 8, pp. 703–733 (in Russian).

8. Fradkin E. S. To the theory of particles with higher spins. *Zhurnal Eksperimentalnoy i Teoreticheskoy Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1950, vol. 20, no. 1, pp. 27–38 (in Russian).

9. Fedorov F. I. Generalized relativistic wave equations. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, 1952, vol. 82, no. 1, pp. 37–40 (in Russian).

10. Feinberg V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields. *Trudy Fizicheskogo instituta im. P. N. Lebedeva Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR*, 1955, vol. 6, pp. 269–332 (in Russian).

11. Petras M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2. *Czechoslovak Journal of Physics,* 1955, vol. 5, no. 3, pp. 418–419.

12. Bogush A. A., Kisel V. V. Equation for a 3/2 particle with anomalous magnetic moment. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika = Russian Physics Journal*, 1984, vol. 1, pp. 23–27 (in Russian).

13. Pletyukhov V. A., Strazhev V. I. To the theory of particles of spin 3/2. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika = Russian Physics Journal*, 1985, vol. 28, no. 1, pp. 91–95 (in Russian).

14. Pletyukhov V. A., Strazhev V. I. On the relationship between various formulations of particle theory with spin 3/2. *Vestsi Akademii navuk Belarusi BSSR. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics series*, 1985, vol. 5, pp. 90–95 (in Russian).

15. Red'kov V. M. *Particle Fields in the Riemann Space and the Lorents Group.* Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2009. 486 p. (in Russian).

16. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic Wave Equations and Internal Degrees of Freedom*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2015. 328 p. (in Russian).

17. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Ya. A., Balan V., Red'kov V. M. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. I. General Theory, II. Physical Problems*. New York, Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.

18. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Ivashkevich A. V., Red'kov V. M. Fradkin Equation for a Spin 3/2 Particle in Presence of External Electromagnetic and Gravitational Fields. *Ukraine Journal of Physics*, 2019, vol. 64, no. 12, pp. 1112–1117. https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1112

19. Ivashkevich A. V., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Zero mass field with the spin 3/2: solutions of the wave equation and the helicity operator. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 338– 354 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-338-354

20. Ivashkevich A. V., Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spherical solutions of the wave equation for a spin 3/2 particle. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 3, pp. 282–290 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-282-290

21. Ivashkevich A. V., Voynova Ya. A., Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spin 3/2 particle: Puali – Fierz theory, non-relativistic approximation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 335–349 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-335-349

22. Ivashkevich A. V., Vasiluyk O. A., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spin 3/2 particle: the Fradkin theory, non-relativistic approximation. *Nonlinear Dynamics and Applications*, 2021, vol. 27, pp. 138–175.

Информация об авторах

Ивашкевич Алина Валентиновна – магистрант, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Василюк Ольга Александровна – преподаватель, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: olya.vasiluyk.97@yandex.by

Information about the authors

Alina V. Ivashkevich – Undergraduate, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Olga A. Vasiluyk – Teacher, Brest State University named after A. S. Pushkin (21, boulevard Kosmonavtov, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: olya.vasiluyk.97@yandex.by

Elena M. Ovsiyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Theoretical

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Кисель Василий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasiliy_bspu@ mail.ru

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

Physics and Applied Informatics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Vasily V. Kisel – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasiliy_bspu@ mail.ru

Viktor M. Red'kov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center "Fundamental Interactions and Astrophysics", B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by