ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.988,519.63,519.65
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-401-416

Поступила в редакцию 30.09.2021
Received 30.09.2021

М. В. Игнатенко[1], Л. А. Янович[2]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
[2]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБРАТНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

Аннотация. Работа посвящена проблеме операторного интерполирования и функционального дифференцирования. Приведены некоторые сведения о вариационных производных и явные формулы точных решений простейших уравнений, содержащих первые вариационные производные искомого функционала. Для функционалов, заданных на множествах функций и квадратных матриц, построены различные интерполяционные многочлены эрмитова типа с двукратными узлами, содержащие первые вариационные производные интерполируемого оператора. Представленные решения интерполяционных задач Эрмита основаны на алгебраической чебышевской системе функций. Получены явные формулы первообразных функционалов для аналитических функций с аргументом из множества квадратных матриц. Найдено решение отдельных дифференциальных уравнений с интегральными операторами специального вида и первыми вариационными производными. Рассмотрена задача обратного интерполирования функций и операторов. Демонстрируются явные схемы построения обратных функций и функционалов, в том числе в случае функций матричной переменной, полученные с применением отдельных известных результатов теории интерполирования. Изложение материала иллюстрируется рядом примеров.

Ключевые слова: функциональное дифференцирование, вариационная производная, дифференциал Гато, операторное интерполирование эрмитова типа, обратное интерполирование

Для цитирования. Игнатенко, М. В. Функциональное дифференцирование интегральных операторов специального вида и некоторые вопросы обратного интерполирования / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 401–416. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-401-416

Marina V. Ignatenko[1], Leonid A. Yanovich[2]

[1]*Belarusian state University, Minsk, Belarus*
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

FUNCTIONAL DIFFERENTIATION OF INTEGRAL OPERATORS OF SPECIAL FORM AND SOME QUESTIONS OF THE INVERSE INTERPOLATION

Abstract. This article is devoted to the problem of operator interpolation and functional differentiation. Some information about the variational derivatives and explicit formulas for the exact solutions of the simplest equations containing the first variational derivatives of the required functional are given. For functionals defined on sets of functions and square matrices, various interpolating polynomials of the Hermite type with nodes of the second multiplicity, which contain the first variational derivatives of the interpolated operator, are constructed. The presented solutions of the Hermite interpolation problems are based on the algebraic Chebyshev system of functions. For analytic functions with an argument from a set of square matrices, explicit formulas for antiderivatives of functionals are obtained. The solution of some differential equations with integral operators of a special form and the first variational derivatives is found. The problem of the inverse interpolation of functions and operators is considered. Explicit schemes for constructing inverse functions and functionals, including the case of functions of a matrix variable, obtained using certain well-known results of interpolation theory, are demonstrated. Data representation is illustrated by a number of examples.

Keywords: functional differentiation, variational derivative, Gateaux differential, operator interpolation of Hermite type, inverse interpolation

For citation. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. Functional differentiation of integral operators of special form and some questions of the inverse interpolation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2021, vol. 57, no. 4, pp. 401–416 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-401-416

Введение. Функциональное (вариационное) дифференцирование операторов – один из разделов современного математического анализа. Теория вариационных производных, их свойства, дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с вариационными производными достаточно полно изложена, например, в монографиях [1–3] и работах [4–10] и имеет многочисленные приложения в статистической физике, квантовой теории поля, гидромеханике и других областях.

Явные формулы решений уравнений с вариационными производными известны лишь в немногих случаях. Это относится, главным образом, к множеству линейных уравнений [7–11], поэтому основными методами их решения являются приближенные.

Проблема приближенного решения уравнений с вариационными производными недостаточно исследована. При решении такого класса задач может оказаться полезным применение методов, которые учитывали бы заданные начальные и граничные значения. В частности, в задаче Коши для уравнения n-го порядка искомый функционал $F(x)$ может быть приближенно найден по известным в точке $x_0(t)$ значениям функционала $F(x_0)$ и его вариационных производных до $(n-1)$-го порядка. Для этого естественно использовать аппарат операторного интерполирования [12–15].

Некоторые предварительные сведения о вариационных производных. Пусть X – множество функций, на котором определен функционал $F: X \to Y$, где Y – некоторое числовое или функциональное множество. В частном случае X может быть одним из функциональных пространств $C = C[a,b]$ или $L_2 = L_2[a,b]$.

Напомним [5], что если дифференциал Гато $\delta F[x;h]$ функционала $F(x)$ представим в интегральном виде $\delta F[x;h] = \int\limits_a^b A(x,t)h(t)dt$, $h(t) \in X$, где $A(x,t)$ – некоторая функция, зависящая от $x = x(s)$ и переменной t, то ее называют вариационной (функциональной) производной первого порядка функционала $F(x)$ по x в точке t и обычно обозначают $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$.

В простейшем случае, если $F(x) = \int\limits_a^b p(t) f\left(x(t)\right)dt$, то дифференциал Гато

$$\delta F[x;h] = \frac{d}{d\lambda}\int\limits_a^b p(t) f\left[x(t) + \lambda h(t)\right]dt\Bigg|_{\lambda=0} = \int\limits_a^b p(t) f'\left[x(t)\right]h(t)dt, \tag{1}$$

и, следовательно, вариационная производная

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) f'\left[x(t)\right]. \tag{2}$$

Функционал

$$J(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\int\limits_a^b a_k(t)x(t)dt\right]^k, \tag{3}$$

где $a_k(t)$ $(k = 0,1,...n)$ – некоторые фиксированные функции, а независимая переменная $x(t)$ – элемент одного из пространств $C[a,b]$ или $L_2[a,b]$ – является первообразным для

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k(t)\left[\int\limits_a^b a_k(t)x(t)dt\right]^{k-1}, \tag{4}$$

так как дифференциал Гато

$$\delta J[x;h] = \sum_{k=1}^{n} k\int\limits_a^b a_k(t)\left[\int\limits_a^b a_k(t)x(t)dt\right]^{k-1} h(t)dt$$

и вариационная производная

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^{n} k a_k(t) \left[\int_a^b a_k(t) x(t) dt \right]^{k-1},$$

т. е. функционалы (3) и (4) связаны соотношением $\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)} = f(x).$

Решением уравнения

$$\frac{\delta I_1(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^{n} k c_k(t) x^{k-1}(t)$$

является функционал

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b c_k(t) x^k(t) dt.$$

Уравнение

$$\frac{\delta I_2(x)}{\delta x(t)} = c - \cos x(t) + x(t) \sin x(t)$$

имеет решение $I_2(x) = \int_a^b x(t)[c - \cos x(t)]dt,$ где c – const.

В случае функционала

$$I_3(x) = \exp \alpha \int_0^1 f\left[\beta x(t) dt\right],$$

где α и β – некоторые фиксированные числа или функции, функционал Гато и вариационная производная имеют вид

$$\delta I_3[x;h] = \alpha\beta I_3(x) \int_0^1 f'\left[\beta x(t)\right] h(t) dt, \quad \frac{\delta I_3(x)}{\delta x(t)} = \alpha\beta I_3(x) f'\left[\beta x(t)\right]$$

соответственно.

Для функционала

$$I_4(x) = \int_0^1 f\left[\beta x(t)\right] dt$$

имеют место равенства

$$\delta I_4[x;h] = \beta \int_0^1 f'\left[\beta x(t)\right] h(t) dt, \quad \frac{\delta I_4(x)}{\delta x(t)} = \beta f'\left[\beta x(t)\right].$$

Если функционал

$$I_5 = \int_a^b f\left[t, x(t), x'(t)\right] dt, x(t) \in C^{(1)}[a,b],$$

тогда получим, что

$$\delta I_5[x;h] = \int_a^b \left[f_x'(t,x,x') \right] h(t) dt, \quad \frac{\delta I_5(t)}{\delta x(t)} = \frac{\partial f(t,x,x')}{\partial x}.$$

Для функционала

$$I_6(x) = \int_a^b f\left[t, x(t), x^{(\alpha)}(t)\right] dt,$$

где

$$x^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^b \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

– дробная производная Римана – Лиувилля порядка α $(0 < \alpha < 1), t \in [a,b]$, а $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$ – гамма функция, дифференциал Гато и вариационная производная в точке $x(t)$ имеют следующий вид:

$$\delta I_6[x;h] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} f\left[t, x(t), x^{(\alpha)}(t)\right] h(t) dt, \quad \frac{\delta I_6(x)}{\delta x(t)} = \frac{\partial f}{\partial x}\left[t, x(t), x^{(\alpha)}(t)\right].$$

Пусть $I_7(x) = f\left[\int_0^1 K\left(t, s, x(s)\right) ds\right]$, тогда имеем

$$\delta I_7[x;h] = f'\left(\int_0^1 K\left(t, s, x(s)\right) ds\right) \int_0^1 K_x'\left[t, s, x(s)\right] h(s) ds,$$

$$\frac{\delta I_7(x)}{\delta x(t)} = f'\left[\int_0^1 K\left(t, s, x(s)\right) ds\right] K_x'\left(t, s, x(s)\right).$$

Двукратное интерполирование по алгебраической системе функций. Сначала приведем [16, 17] интерполяционную формулу эрмитова типа с двукратными узлами x_ν $(\nu = 0,1)$ для функций $f(x)$ скалярного аргумента в случае обычных производных и различных узлов

$$H_3(f;x) = h_{10}(x) f(x_0) + h_{11}(x) f(x_1) + q_{10}(x) f'(x_0) + q_{11}(x) f'(x_1), \tag{5}$$

где фундаментальные многочлены двукратного эрмитова интерполирования по алгебраической системе функций имеют вид

$$h_{10}(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right), \quad q_{10}(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 (x - x_0),$$

$$h_{11}(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right), \quad q_{11}(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 (x - x_1).$$

Для многочлена (5) справедливы следующие интерполяционные условия:

$$H_3(f;x_i) = f(x_i), \quad H_3'(f;x_i) = f'(x_i) \quad (i = 0,1).$$

Применим формулу (5) к конкретному матричному случаю. Пусть $x = \sigma(t), x_0 = \sigma_0(t)$, $x_1 = \sigma_1(t)$ – соответственно следы квадратных матриц $A(t), A_0(t), A_1(t)$; $\sigma(t), \sigma_i(t)$ $(i = 0,1)$ – элементы пространства $C[a,b]$ и разность $x_1 - x_0 = \sigma_1(t) - \sigma_0(t) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$; в точках следов известны также значения функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$. После замены x, x_0, x_1 на $\sigma, \sigma_0, \sigma_1$ в формуле (5) и функциях $h_{10}(x), h_{11}(x), q_{10}(x), q_{11}(x)$ придем к интерполяционной формуле (5), для которой выполняются равенства

$$H_3(f;\sigma_i) = f(\sigma_i), \quad H_3'(f;\sigma_i) = f'(\sigma_i) \quad (i = 0,1).$$

В случае произвольного значения $n \in \mathbb{N}$ и различных узлов x_ν $(\nu = 0,1,...,n)$ интерполяционная формула (5) имеет [11–17] вид

$$H_{2n+1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \left[h_{nk}(x) f(x_k) + q_{nk}(x) f'(x_k) \right], \tag{6}$$

где функции

$$h_{nk}(x) = l_{nk}^2(x) \left[1 - \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} (x - x_k) \right], \quad q_{nk}(x) = l_{nk}^2(x)(x - x_k),$$

$$l_{nk}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \quad (k = 0,1,...,n).$$

Многочлен (6) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$H_{2n+1}(f;x_\nu) = f(x_\nu), \quad H_{2n+1}'(f;x_\nu) = f'(x_\nu) \quad \left(\nu = 0,1,...,n\right).$$

Аналогичные интерполяционные формулы для функционалов. Пусть далее на функциональном пространстве X определен оператор $F: X \to R,$ для которого известны значения $F(x_\nu)$ и значения первых вариационных производных $\dfrac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}$ в узлах $\left\{ x_\nu(t) \right\}_{\nu=0}^{n} \in X.$

Рассмотрим несколько вариантов интерполяционных многочленов $H_{2n+1}(F;x): X \to R,$ удовлетворяющих условиям

$$H_{2n+1}(F;x_\nu) = F(x_\nu); \frac{\delta H_{2n+1}(x_\nu)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)} \ (\nu = 0,1,...,n). \tag{7}$$

Одной из таких формул [18] в случае двух узлов может быть

$$H_3(F;x) = \frac{1}{b-a} \left[F(x_0) \int_a^b h_{10}\left(x(t)\right) dt + F(x_1) \int_a^b h_{11}\left(x(t)\right) dt \right] +$$
$$+ \int_a^b \frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)} q_{10}\left(x(t)\right) dt + \int_a^b \frac{\delta F(x_1)}{\delta x(t)} q_{11}\left(x(t)\right) dt, \tag{8}$$

где функции $h_{10}(x)$, $h_{11}(x)$ и $q_{10}(x)$, $q_{11}(x)$ такие же, как и в равенстве (5) . При проверке выполнения интерполяционных условий вида (7) для формулы (8) необходимо воспользоваться правилом (2) применительно к интегралам, входящим в равенство (8), с учетом свойств функций $h_{1\nu}(x)$, $q_{1\nu}(x)$ $(\nu = 0,1)$.

Для функционала

$$F(x) \equiv P_2(x) = \int_a^b \int_a^b K(s_1,s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2, \tag{9}$$

где, например, $x \in L_2[a,b],$ $K:[a,b]^2 \to R$ – непрерывная функция своих аргументов, дифференциал Гато $\delta P_2[x;h]$ имеет [19] вид

$$\delta P_2[x;h] = \int_a^b \int_a^b K(s_1,s_2) x(s_1) h(s_2) ds_1 ds_2 + \int_a^b \int_a^b K(s_1,s_2) x(s_2) h(s_1) ds_1 ds_2,$$

а первая функциональная производная

$$\frac{\delta P_2(x)}{\delta x(t)} = \int_a^b K(s_1,t)x(s_1)ds_1 + \int_a^b K(t,s_2)x(s_2)ds_2.$$

Если в формуле (8) $F(x)$ заменить на квадратичный функционал (9), то для многочлена $H_3(P_2;x)$ будут выполняться равенства (7) в двух узлах $x_0(t)$ и $x_1(t)$. В этом несложно убедиться путем непосредственных вычислений.

Функциональные интерполяционные многочлены 2-го и 3-го порядков эрмитова типа с двукратными узлами. Пусть функции $x(t), x_0(t), x_1(t)$ из пространства $C[a,b]$ и $x_0(t) \neq x_1(t)$ для $a \le t \le b$. Для операторов

$$H_{2,\nu}(x) = I_\nu(x_0) + \int_a^b \frac{\delta I_\nu(x_0)}{\delta x(t)} q_{1,0}\left(x(t)\right)dt + \int_a^b \frac{\delta I_\nu(x_1)}{\delta x(t)} q_{1,1}\left(x(t)\right)dt \quad (\nu = 1,2,...,7),$$

где фундаментальные интерполяционные многочлены Эрмита имеют вид

$$q_{1,0}(x) = \frac{(x-x_0)(x+x_0-2x_1)}{2(x_0-x_1)}, \quad q_{1,1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)},$$

справедливы условия

$$H_{2,\nu}(x_i) = I_\nu(x_i), \frac{\delta H_{2,\nu}(x_i)}{\delta x(t)} = \frac{\delta I_\nu(x_i)}{\delta x(t)} \quad (\nu = 1,2,...,7;\, i = 0,1).$$

Также в случае двух узлов $x_0(t)$, $x_1(t)$ для аналогичных интерполяционных многочленов третьего порядка

$$H_{3,\nu}(x) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{1} I_\nu(x_k)\int_a^b h_{1,k}\left(x(t)\right)dt + \sum_{k=0}^{1}\frac{\delta I_\nu(x_k)}{\delta x(t)}\int_a^b q_{1,k}\left(x(t)\right)dt \quad (\nu = 1,2,...,7),$$

где

$$h_{1,0}(x) = \left[(x-x_1)(x_0-x_1)^{-1}\right]^2\left[1-2(x-x_0)(x_0-x_1)^{-1}\right],$$

$$h_{1,1}(x) = \left[(x-x_0)(x_1-x_0)^{-1}\right]^2\left[1-2(x-x_1)(x_1-x_0)^{-1}\right];$$

$$q_{1,0}(x) = \left[(x-x_1)(x_0-x_1)^{-1}\right]^2(x-x_0), \quad q_{1,1}(x) = \left[(x-x_0)(x_1-x_0)^{-1}\right]^2(x-x_1),$$

выполняются равенства

$$H_{3,\nu}(x_i) = I_\nu(x_i), \frac{\delta H_{3,\nu}(x_i)}{\delta x(t)} = \frac{\delta I_\nu(x_i)}{\delta x(t)} \quad (\nu = 1,2,...,7;\, i = 0,1).$$

Двукратное интерполирование и дифференцирование функционалов, заданных на множествах квадратных матриц. В случае двух матричных узлов $x_0(t)$ и $x_1(t)$ интерполяционный функциональный многочлен $H_3(F;x)$ с вариационными производными, являющийся аналогом формулы (5), для которого выполняются равенства (7), задается формулой

$$H_3(F;x) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{1} F(x_k)\int_a^b h_{1,k}\left(x(t)\right)dt + \sum_{k=0}^{1}\frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)}\int_a^b q_{1,k}\left(x(t)\right)dt, \tag{10}$$

где

$$h_{1,0}(x)=\left((x-x_1)(x_0-x_1)^{-1}\right)^2\left(I-2(x-x_0)(x_0-x_1)^{-1}\right),$$

$$h_{1,1}(x)=\left((x-x_0)(x_1-x_0)^{-1}\right)^2\left(I-2(x-x_1)(x_1-x_0)^{-1}\right);$$

$$q_{1,0}(x)=\left((x-x_1)(x_0-x_1)^{-1}\right)^2\left(x-x_0\right);\quad q_{1,1}(x)=\left((x-x_0)(x_1-x_0)^{-1}\right)^2(x-x_1),$$

и выполняются равенства

$$H_3(F;x_\nu)=F(x_\nu);\frac{\delta H_3(x_\nu)}{\delta x(t)}=\frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}\ (\nu=0,1). \tag{11}$$

Выполнение соотношений (11) для формулы (10) несложно проверить, используя формулу (2) и значения функций $h_{1k}(x), q_{1k}(x)$ и их производных в узлах $x = x_0$ и $x = x_1$:

$$h_{10}(x_0)=h_{11}(x_1)=I,\quad h_{10}(x_1)=h_{11}(x_0)=O;$$

$$q_{10}(x_0)=q_{11}(x_0)=q_{10}(x_1)=q_{11}(x_1)=q'_{10}(x_1)=q'_{11}(x_0)=O;\quad q'_{10}(x_0)=q'_{11}(x_1)=I,$$

а также нулевые значения производных $h'_{1k}(x)$ в узлах x_0 и x_1, где O – нулевая, I – единичная матрицы.

Пусть в формуле (10) $x(t)$ и узлы $x_0(t)$, $x_1(t)$ – соответственно квадратные функциональные матрицы $A(t), A_0(t), A_1(t)$. Перепишем интерполяционную формулу (10) для квадратичного функционала (9) непосредственно в этих матричных обозначениях:

$$H_3(P_2;A)=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{1}P_2(A_k)\int_a^b h_{1k}\left(A(t)\right)dt+\sum_{k=0}^{1}\frac{\delta P_2(A_k)}{\delta A(t)}\int_a^b q_{1k}\left(A(t)\right)dt,$$

где

$$h_{10}(A)=\left[(A-A_1)(A_0-A_1)^{-1}\right]^2\left[I-2(A-A_0)(A_0-A_1)^{-1}\right],$$

$$h_{11}(A)=\left[(A-A_0)(A_1-A_0)^{-1}\right]^2\left[I-2(A-A_1)(A_1-A_0)^{-1}\right];$$

$$q_{10}(A)=\left[(A-A_1)(A_0-A_1)^{-1}\right]^2(A-A_0);\quad q_{11}=\left[(A-A_0)(A_1-A_0)^{-1}\right]^2(A-A_1).$$

Выполнение интерполяционных условий

$$H_3(P_2;A_i)=P_2(A_i),\frac{\delta H_3\left(P_2(A_i)\right)}{\delta A_i(t)}=\frac{\delta P_2(A_i)}{\delta A_i(t)}\quad(i=0,1)$$

для рассматриваемого функционала несложно проверить, как и в случае формулы (10). При этом вычисление вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta A}\int_a^b h_{1k}\left(A(t)\right)dt,\quad \frac{\delta}{\delta A}\int_a^b q_{1k}\left(A(t)\right)dt$$

основано на равенстве (2), где, как и раньше, $p(t) = 1$.

Пусть X – множество квадратных функциональных матриц $A(t)$, $t\in T\subset R$ и $f(A)$ – аналитическая функция матричной переменной $A\in X$:

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k A^k(t), \tag{12}$$

где коэффициентами b_k могут быть числа, функции или матрицы. Ставится задача найти первообразный функционал $F(A)$ для функции $f(A)$, т. е. определить $F(A)$, для которого выполнялось бы равенство

$$\frac{\delta F(A)}{\delta A(t)} = f\left(A(t)\right).$$

Покажем, что искомый функционал $F(A)$ представим в виде

$$F(A) = F(A_0) + \int_0^1 ds \int_T f\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\left(A(t) - A_0(t)\right)dt. \tag{13}$$

Для этого сначала необходимо вычислить дифференциал Гато $\delta F\left[A; H\right], H \in X$:

$$\delta F[A;H] = \frac{d}{d\lambda}\int_0^1 ds \int_T f\left[s\left(A(t) + \lambda H(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\left(A(t) + \lambda H(t) - A_0(t)\right)dt =$$

$$= \int_0^1 ds \int_T f'\left[s\left(A(t) + \lambda H(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\left(A(t) + \lambda H(t) - A_0(t)\right)dt\Big|_{\lambda=0} +$$

$$+ \int_0^1 ds \int_T f\left[s\left(A(t) + \lambda H(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]H(t)dt\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_0^1 ds \int_T f'\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\left(A(t) - A_0(t)\right)sH(t)dt +$$

$$+ \int_0^1 ds \int f\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]H(t)dt.$$

Итак, искомый дифференциал Гато

$$\delta F[A;H] = \int_T \left\{\int_0^1 dsf'\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\left(A(t) - A_0(t)\right)s + \right.$$

$$\left. + f\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\right\} H(t)dt,$$

а вариационная производная

$$\frac{\delta F(A)}{\delta A(t)} = \int_0^1 dsf'\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\left(A(t) - A_0(t)\right)s +$$

$$+ f\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right].$$

Так как для функции $\varphi(s) = f\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]s$ производная

$$\varphi'(s) = f'\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right]\left(A(t) - A_0(t)\right)s + f\left[s\left(A(t) - A_0(t)\right) + A_0(t)\right],$$

имеем

$$\frac{\delta F(A)}{\delta A(t)} = \int_0^1 \varphi'(s)ds = \varphi(1) - \varphi(0) = f(A),$$

т. е. справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Функционал* (13) *является первообразным на множестве квадратных функциональных матриц для аналитической функции матричных переменных вида* (12).

Дифференциальные уравнения с вариационными производными. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка с известным решением $\tilde{x}(t)$:

$$l_n\left(x(t)\right) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = a(t), \tag{14}$$

и его матричный аналог также с обычными производными, где в качестве узлов берутся следы функциональных матриц. Как и раньше, след tr$A(t)$ матрицы $A(t)$ обозначим через $\sigma(t)$ и, соответственно, будем иметь

$$\mathrm{tr}A^{(k)}(t) \equiv \mathrm{tr}\frac{d^k}{dt^k}A(t) = \sigma^k(t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим матричный аналог уравнения (14) в виде

$$L_n\left(A\right) = \mathrm{tr}A^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\mathrm{tr}A^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\mathrm{tr}A'(t) + a_0(t)\mathrm{tr}A(t) = \mathrm{tr}B(t), \tag{15}$$

где $B(t)$ – заданная матрица со следом $a(t)$. Решением этого уравнения является матрица $A(t)$, след которой $\sigma(t) = \tilde{s}(t)$.

Уравнение (14) при $x(t) = \sigma(t)$ совпадает с равенством (15), записанным в терминах следа матриц A и B.

В качестве аналога уравнения (14) в случае дифференциальных уравнений с вариационными производными естественно рассмотреть следующее уравнение:

$$L_n\left(x(t)\right) = \frac{\delta^n F(x)}{\delta x^n(t)} + a_{n-1}(t)\frac{\delta^{n-1}F(x)}{\delta x^{n-1}(t)} + \ldots + a_1\left(t\right)\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} + a_0(t)F(x) = a(t). \tag{16}$$

Рассмотрим проблему решения отдельных дифференциальных уравнений (16) специального вида с вариационными производными. К этому классу относится и рассмотренная ранее задача о нахождении первообразных для функционалов, определенных на множествах функций и матриц. Далее продолжим исследование аналогичных задач.

Пусть на множестве X функций $x(t)$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, задан функционал

$$J(x) = J(x_0) + \int_0^1 ds \int_T f\left[s\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + P_n(x_0), a(t)\right]\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right)dt, \tag{17}$$

где $P_n(x)$ – алгебраический многочлен n-й степени с числовыми или функциональными коэффициентами от функции $x = x(t)$, а $a(t)$ – некоторая фиксированная функция, произвольно заданная на T.

Дифференциал Гато и вариационная производная функционала (17) задаются соответственно формулами

$$\delta J[x;h] = \int_0^1 ds\left\{\int_T \left\{f'\left[s\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + P_n(x_0), a(t)\right]sP_n'(x)\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + f\left[s\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + P_n(x_0), a(t)\right]P_n'(x)\right\}h(t)dt\right\},$$

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)} = \int_0^1 ds\left\{f'\left[s\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + P_n(x_0), a(t)\right]sP_n'(x)\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + \right.$$
$$\left. + f\left[s\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + P_n(x_0), a(t)\right]P_n'(x)\right\}.$$

Производная $\varphi'(s)$ функции $\varphi(s) = f\left[s\left(P_n(x) - P_n(x_0)\right) + P_n(x_0), a(t)\right]P_n'(x)s$ совпадает с выражением в фигурных скобках в приведенной выше формуле для вариационной производной и, следовательно,

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)}=\int_0^1 \varphi'(s)ds=\varphi(1)-\varphi(0)=f\left(P_n(x),a(t)\right)P_n'(x).$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 2. *Решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\delta J(x)}{\delta x(t)}=J_0+f\left(P_n(x),a(t)\right)P_n'(x) \tag{18}$$

с начальным условием $J(x_0)=J_0$ *является функционал* (17).

Рассмотрим уравнение (18) в случае, когда в качестве независимой переменной функционала f выступают алгебраические многочлены с функциональными коэффициентами

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(t)x^k \qquad \left(x=x(t),\, x_0=x_0(t),\, t\in T\right).$$

Через $J\left(P_n(x)\right)$ обозначим функционал

$$J\left(P_n(x)\right)=J\left(P_n(x_0)\right)+$$
$$+\int_0^1 ds\int_T f\left[s\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)dt. \tag{19}$$

Далее нам понадобятся представления в явном виде дифференциала Гато $\delta J[P_n(x);H]$ и вариационной производной $\dfrac{\delta J\left(P_n(x)\right)}{\delta P_n\left(x(t)\right)}$ функционала (19). По определению

$$\delta J[P_n(x);H]=\frac{d}{d\lambda}J\left(P_n(x)+\lambda H\right)=\frac{d}{d\lambda}\times$$
$$\times\int_0^1 ds\int_T f\left[s\left(P_n(x)+\lambda H(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]\left(P_n(x)+\lambda H(x)-P_n(x_0)\right)dt\Big|_{\lambda=0}=$$
$$=\int_0^1 ds\int_T f'\left[s\left(P_n(x)+\lambda H(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]\left(P_n(x)+\lambda H(x)-P_n(x_0)\right)dt\Big|_{\lambda=0}+$$
$$+\int_0^1 ds\int_T f\left[s\left(P_n(x)+\lambda H(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]H(x)dt\Big|_{\lambda=0},$$

т. е. дифференциал Гато

$$\delta J[P_n(x);H]=\int_0^1 ds\int_T f\left[s\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]sH(x)\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)dt+$$
$$+\int_0^1 ds\int_T f\left[s\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]H(x)dt.$$

Далее вычислим вариационную производную и соответственно будем иметь

$$\frac{\delta J\left(P_n(x)\right)}{\delta P_n\left(x(t)\right)}=\int_0^1 ds\left\{\int_T f\left[s\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)s+\right.$$
$$\left.+\int_T f\left[\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]\right\}dt=\int_0^1 ds\varphi'(s),$$

где $\varphi(s)=\int\limits_T f\left[s\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)+P_n(x_0),a(t)\right]\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)sdt.$

Таким образом,

$$\frac{\delta J\left(P_n(x)\right)}{\delta P_n\left(x(t)\right)}=f[P_n(x),a(t)]\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right)$$

и, следовательно, приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а 3. *Функционал* (19) *является решением уравнения*

$$\frac{\delta J\left(P_n(x)\right)}{\delta P_n\left(x(t)\right)}=J\left(P_n(x_0)\right)+f[P_n(x),a(t)]\left(P_n(x)-P_n(x_0)\right).$$

К теории обратного интерполирования функций и операторов. На практике и непосредственно в самой математике возникают задачи о нахождении по заданным значениям оператора соответствующих точных или приближенных значений их аргументов. Обратное интерполирование используется при решении различных классов уравнений, в том числе матричных.

Для функции $y=f(x)$, заданной таблицей, задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по указанному значению y определить значение аргумента x, который обычно рассматривается на фиксированном интервале. При практическом решении таких задач является естественным применение отдельных известных результатов теории интерполирования.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ вещественной оси и заданы $n+1$ значений $f(x_\nu)=f_\nu$ в узлах x_ν $(a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b)$. В этом случае интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}f_\nu, \tag{20}$$

где $\omega_n(x)=\prod\limits_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu)$, и соответственно $L_n(f;x_\nu)=f(x_\nu)$ $(\nu=0,1,\ldots,n)$.

Введем далее обозначения $y=f(x)$, $y_\nu=f(x_\nu)$ $(\nu=0,1,\ldots,n)$ и воспользуемся интерполяционной формулой этого же вида для обратной функции $x(y)$ по различным узлам y_ν $(\nu=0,1,\ldots,n)$:

$$H_n(x;y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\tilde\omega_n(y)}{\tilde\omega_n'(y_k)(y-y_\nu)}x_\nu, \tag{21}$$

где $\tilde\omega_n(y)=\prod\limits_{\nu=0}^{n}(y-y_\nu)$, y – независимая переменная; $H_n(x,y_\nu)=x_\nu$ $(\nu=0,1,\ldots,n)$.

В случае, когда $f(x)=P_n(x)$ и $x(y)=Q_n(y)$ – алгебраические многочлены степени не выше n, то для интерполяционных формул (20) и (21) имеют место равенства $L_n(f;x)=f(x)$ и $H_n(x,y)=x(y)$ в произвольных точках x и y, а не только в узлах интерполирования.

Применяются интерполяционные формулы и другой структуры в случае узлов y_ν.

П р и м е р 1. Рассмотрим численный пример построения интерполяционного многочлена Лагранжа для функции $y(x)=\sin x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ с узлами $x_0=0,\ x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=\frac{\pi}{4},\ x_3=\frac{\pi}{3},\ x_4=\frac{\pi}{2}.$ Имеем

$$L_4(y;x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{x_1x_2x_3x_4}y(x_0)+\frac{x(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{x_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y(x_1)+$$
$$+\frac{x(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{x_2(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y(x_2)+\frac{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{x_3(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y(x_3)+$$

$$+\frac{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{x_4(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y(x_4). \tag{22}$$

Очевидно, что $L_4(y,x_i)=y(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,4)$.

Значения функции $y(x)=\sin x$ в этих узлах интерполирования известны:

$$y_0=y(x_0)=0,\quad y_1=y(x_1)=\frac{1}{2},\quad y_2=y(x_2)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y_3=y(x_3)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y_4=y(x_4)=1.$$

Значения обратной функции $x=x(y)$ в узлах y_i $(i=0,1,\ldots,4)$ равны:

$$x_0=x(y_0)=0,\quad x_1=x(y_1)=\frac{1}{2},\quad x_2=x(y_2)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_3=x(y_3)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_4=x(y_4)=\frac{\pi}{2}.$$

Интерполяционный многочлен вида, аналогичного (22), для функции $x(y)$, построенный по узлам y_i $(i=0,1,\ldots,4)$, примет вид

$$L_4^{(-1)}(x;y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}{y_1y_2y_3y_4}x_0+\frac{y(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}{y_1(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_1-y_4)}x_1+$$
$$+\frac{y(y-y_1)(y-y_3)(y-y_4)}{y_2(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_2-y_4)}x_2+\frac{y(y-y_1)(y-y_2)(y-y_4)}{y_3(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_3-y_4)}x_3+$$
$$+\frac{y(y-y_1)(y-y_2)(y-y_4)}{y_4(y_4-y_1)(y_4-y_2)(y_4-y_3)}x_4, \tag{23}$$

и соответственно $L_4^{(-1)}(x,y_i)=x_i$ для $i=0,1,\ldots,4$.

Как обычно в задачах обратного интерполирования в общем случае, так и в этом примере интерполяционная формула (23) может быть использована для приближенного вычисления аргумента x $(x\neq x_i)$ функции $y=\sin x$. В частности, если $x=\frac{5\pi}{6}$, то $y=\sin x=\frac{1}{2}$, и значения y и y_i $(i=0,1,\ldots,4)$ известны для вычисления $L_4^{(-1)}(x,y)$, т. е. получим формулу (23).

П р и м е р 2. Рассмотрим еще один элементарный численный пример. Пусть $y(x)=\cos^2 x$, а узлы интерполирования $x_0=\frac{\pi}{6}$, $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$. В этом случае алгебраический интерполяционный многочлен второй степени имеет следующий вид:

$$L_2(y;x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y(x_1)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y(x_2). \tag{24}$$

Функция $y(x)=\cos^2 x$ в указанных узлах принимает значения

$$y_0=y(x_0)=\frac{3}{4},\quad y_1=y(x_1)=\frac{1}{2},\quad y_2=y(x_2)=\frac{1}{4}$$

соответственно.

Значения обратной функции $x=x(y)$ в узлах y_i $(i=0,1,2)$ таковы:

$$x_0=x\left(y_0\right)=\frac{\pi}{6},\quad x_1=x\left(y_1\right)=\frac{\pi}{4},\quad x_2=x\left(y_2\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Интерполяционный многочлен $L_2^{(-1)}(x;y)$ вида (24) для функции $x=x(y)$ по узлам $y_0=\frac{3}{4}$, $y_1=\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{1}{4}$ задается формулой

$$L_2^{(-1)}(x;y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}x(y_0)+\frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}x\left(y_1\right)+\frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}x\left(y_2\right), \qquad (25)$$

для которой справедливы равенства $L_2^{(-1)}(x;y_i)=x(y_i),\ i=0,1,2.$

Используя правило (25), для $y=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\frac{\pi}{2}=0$ по известным $y=0$ и $y_i\ (i=0,1,2)$ можем вычислить приближенное значение аргумента $\frac{\pi}{2}$. Подставляя в интерполяционный многочлен $L_2^{(-1)}(x;y)$ указанные численные значения и проведя соответствующие вычисления, придем к равенству $L_2^{(-1)}(x;0)=\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{12}$. В данном случае найденное приближенное значение аргумента $\frac{5\pi}{12}$ рассматриваемой обратной функции, вычисленное по интерполяционной формуле (25), отличается от точного значения $\frac{\pi}{2}$ на величину, равную $\frac{\pi}{12}$.

Далее приведем несколько общих сведений об обратном операторе и обратном операторном интерполировании.

Оператор B называют обратным к оператору A, если область определения оператора B совпадает с областью значений оператора A. Обратный оператор обычно обозначается через A^{-1}.

Если D – область определения оператора A, то для всех $x\in D$ верно равенство $A^{-1}(Ax)=x$, а также $(A^{-1})^{-1}=A$, т. е. $(A^{-1})^{-1}=I$ – единичный (тождественный) оператор для матриц A.

В качестве прямых и обратных операторов, определенных на функциональных пространствах, выступают широко известные интегральные операторы: преобразование Фурье по тригонометрической системе функций, по системе ортогональных алгебраических многочленов и многие другие.

Пусть оператор $F:X\to Y$, где X и Y – заданные линейные пространства. Напомним [12], что задача лагранжева операторного интерполирования состоит в построении по заданным значениям $F(x_k)$ оператора $F(x)$ в узлах $x_0,x_1,...,x_n\ (x_i\neq x_j,\ i\neq j)$ такого оператора $L_n:X\to Y$, который удовлетворял бы условиям $L_n(x_k)=F(x_k)\ (k=0,1,...,n)$.

Задача обратного интерполирования формулируется следующим образом. По значениям $y_k=F(x_k)$ оператора $F(x)$ в точках $x_k\ (k=0,1,...,n)$ необходимо построить оператор $L_n^{-1}:Y\to X$ такой, что $x_k=L_n^{-1}(y_k)\ (k=0,1,...,n)$.

Как следует из постановки задачи, способ обратного интерполирования основан на решении уравнения $F(x)=y^*\ (y^*\in Y)$ и применим, когда F имеет обратный оператор, однозначно определенный на X. Явный вид обратных операторов может быть построен в весьма немногочисленных случаях. Вместе с тем обратное интерполирование может быть использовано как один из возможных способов построения приближенного решения x^* уравнения $F(x)=y^*\ (y^*\in Y)$. Для этого составляется таблица значений $y_0,y_1,...,y_n$ оператора $y=F(x)$ в точках $x_0,x_1,...,x_n$ и по найденным значениями y_k строится интерполяционная формула вида $x=L_n^{-1}(y)$, для которой выполняются равенства $x_k=L_n^{-1}(y_k)\ (k=0,1,...,n)$. В случае, если точка y^* в каком-то смысле близка к одному из узлов y_k, то будет иметь место (в каждом конкретном случае это требует дополнительного исследования) приближенное соотношение $x^*\approx L_n^{-1}(y^*)$.

Далее приведем отдельные явные формулы обратного операторного интерполирования.

Известно [12], что общая структура интерполяционных формул лагранжева типа для данного оператора A с различными узлами $x_0,x_1,...,x_n$ из функционального пространства X имеет вид

$$L_n(A;x)=\sum_{k=0}^{n}\omega_{nk}(x)A(x_k). \qquad (26)$$

Здесь $\omega_{nk}(x)$ – операторы (функционалы), для которых $\omega_{nk}(x_\nu)=\delta_{k\nu}\ (k,\nu=0,1,...,n)$. В случае обычного умножения множитель $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера в общепринятом понимании; если же используется операторное умножение, то при $k = \nu$ оператор $\delta_{k\nu} = I$ является единичным (тождественным), а при $k \neq \nu$ $\delta_{k\nu} = O$ – нулевым оператором. Очевидно, что $L_n(A; x_\nu) = A(x_\nu)$ $(\nu = 0,1,...,n)$.

Введем обозначения $y = Ax$, $y_k = A(x_k)$ $(k = 0,1,...,n)$. Тогда интерполяционная формула для обратного оператора A^{-1} по различным узлам y_k $(k = 0,1,...,n)$ имеет общий вид, аналогичный (26):

$$L_n^{-1}(A^{-1}; y) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{\omega}_{nk}(y) A^{-1}(y_k)$$

или

$$L_n^{-1}(A^{-1}; y) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{\omega}_{nk}(y) x_k,$$

где $\tilde{\omega}_{nk}(y_\nu) = \delta_{k\nu}$, и, следовательно, $L_n^{-1}\left(A^{-1}; y_\nu\right) = x_\nu$ $(\nu = 0,1,...,n)$.

Пример 3. Рассмотрим пример обратного интерполирования для функций матричной переменной. Пусть функция $f(A)$ определена, а также принимает значения на множестве квадратных матриц $\{A\}$ одинаковой размерности; A_i $(i = 1,2,3)$ – узлы интерполирования, такие, что матрицы $A_2 - A_1$, $A_3 - A_1$, $A_3 - A_2$ обратимы.

Для матричного многочлена 2-й степени

$$\begin{aligned} L_2(f; A) = {} & (A - A_2)(A_1 - A_2)^{-1}(A - A_3)(A_1 - A_3)^{-1} f(A_1) + \\ & + (A - A_1)(A_2 - A_1)^{-1}(A - A_3)(A_2 - A_3)^{-1} f(A_2) + \\ & + (A - A_1)(A_3 - A_1)(A - A_2)^{-1}(A_3 - A_2)^{-1} f(A_3) \end{aligned} \tag{27}$$

справедливы интерполяционные условия $L_2(f; A_i) = f(A_i)$ $(i = 1,2,3)$.

Обратная функция f^{-1} определена на множестве значений функции f, т. е. на множестве $\{(A)\}$, и верны равенства $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$, $f^{-1}\left(f(A_i)\right) = A_i$.

Введем обозначения $B = f(A)$, $B_i = f(A_i)$, $(i = 1,2,3)$. Применив формулу (27) для случая обратной функции f^{-1}, получим, что

$$\begin{aligned} L_2(f^{-1}; B) = {} & (B - B_2)(B_1 - B_2)^{-1}(B - B_3)(B_1 - B_3)^{-1} A_1 + \\ & + (B - B_1)(B_2 - B_1)^{-1}(B - B_3)(B_2 - B_3)^{-1} A_2 + \\ & + (B - B_1)(B_3 - B_1)^{-1}(B - B_2)(B_3 - B_2)^{-1} A_3; \end{aligned}$$

$$L_2(f^{-1}; B_i) = A_i \quad (i = 1,2,3).$$

Таким образом, матрица $L_2(f^{-1}; B)$ обладает следующим свойством: при $B = B_i$ она совпадает с аргументом функции $f(A)$ для $A = A_i$ $(i = 1,2,3)$.

В заключение отметим, что представленные в работе результаты могут служить основой дальнейших теоретических исследований в области функционального дифференцирования, а также для построения точных и приближенных методов решения некоторых линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого порядка, встречающихся в различных прикладных областях и математической физике. Применение результатов, полученных для операторов общего вида в функциональных пространствах, к аппроксимации отдельных классов дифференциальных операторов рассмотрено в работах [19–22]. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографиях [12–15].

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.3.01.

Acknowledgments. This work was supported by the State Program of Scientific Research “Convergence-2025”, subprogram “Mathematical models and methods”, task 1.3.01.

Список использованных источников

1. Смирнов, В. И. Вариационное исчисление / В. И. Смирнов, В. И. Крылов, Л. В. Канторович. – Л.: Кубуч, 1933. – 204 с.

2. Леви, П. Конкретные проблемы функционального анализа / П. Леви. – М.: Наука, 1967. – 510 с.

3. Вайнберг, М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М. М. Вайнберг. – М.: Гостехиздат, 1956. – 345 с.

4. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтера. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

5. Далецкий, Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения / Ю. Л. Далецкий // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 4 (136). – С. 3–54.

6. Далецкий, Ю. Л. Дифференциальные уравнения с функциональными производными и стохастические уравнения для обобщенных случайных процессов / Ю. Л. Далецкий // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 166, № 5. – С. 1035–1038.

7. Задорожний, В. Г. О дифференциальных уравнениях второго порядка в вариационных производных / В. Г. Задорожний // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 1679–1683.

8. Данилович, В. П. Формула Коши для линейных уравнений с функциональными производными / В. П. Данилович, И. М. Ковальчик // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 8. – С. 1509–1511.

9. Ковальчик, И. М. Линейные уравнения с функциональными производными / И. М. Ковальчик // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 194, № 4. – С. 763–766.

10. Ковальчик, И. М. Представление решений некоторых уравнений с функциональными производными с помощью интегралов Винера / И. М. Ковальчик // Докл. АН УССР. Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки. – 1978. – Т. 12. – С. 1079–1083.

11. Авербух, В. И. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах / В. И. Авербух, О. Г. Смолянов // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 6 (138). – С. 201–260.

12. Макаров, В. Л. Интерполирование операторов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Л. А. Янович. – Киев: Наук. думка, 2000. – 407 с.

13. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – 517 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. – Vol. 83: Математика та її застосування).

14. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

15. Янович, Л. А. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики. – Минск: Беларус. навука, 2020. – 476 с.

16. Крылов, В. И. Вычислительные методы: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976–1977. – 2 т.

17. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1998. – 472 с.

18. Янович, Л. А. Интерполяционные функциональные многочлены ньютонова типа с двукратными узлами / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – С. 229–240.

19. Игнатенко, М. В. О точном и приближенном решении отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 51–71. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71

20. Янович, Л. А. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 7–23.

21. Игнатенко, М. В. К теории интерполирования дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 25, № 2. – С. 11–20.

22. Игнатенко, М. В. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 149–163. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163

References

1. Smirnov V. I., Krylov V. I., Kantorovich L. V. *Variation Calculus*. Leningrad, Kubuch Publ., 1933. 204 p. (in Russian).

2. Lévy P. *Concrete Problems of Functional Analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 510 p. (in Russian).

3. Vainberg M. M. *Variational Methods for Investigation of Non-linear Operators*. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956. 345 p. (in Russian.).

4. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York, Dover Publications, 2005. 288 p.

5. Daletsky Yu. L. Infinite-dimensional Elliptic Operators and Parabolic Equations Connected with them. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Successes of Mathematical Sciences*. 1967, vol 22, no. 4 (136), pp. 3–54 (in Russian).

6. Daletsky Yu. L. Differential Equations with Functional Derivatives and Stochastic Equations for Generalized Random Processes. *Doklady academii nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of USSR*, 1966, vol. 166, no. 5, pp. 1035–1038 (in Russian).

7. Zadorozhniy V. G. Second-order Differential Equations with Variational Derivatives. *Differentsial'nyye uravneniya = Differential equations*, 1989, vol. 25, no. 10, pp. 1679–1683 (in Russian).

8. Danilovich V. P., Kovalchik I. M. Cauchy Formula for Linear Equations with Functional Derivatives. *Differentsial'nyye uravneniya = Differential equations*, 1977, vol. 13, no. 8, pp. 1509–1511 (in Russian).

9. Kovalchik I. M. Linear Equations with Functional Derivatives. *Doklady academii nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of USSR*, 1970, vol. 194, no. 4, pp. 763–766 (in Russian).

10. Kovalchik I. M. Representation of Solutions of Certain Equations with Functional Derivatives Using Wiener Integrals. *Doklady academii nauk Ukraïni. Seriya A. Fiziko-matematicheskiye i tekhnicheskiye nauki = Doklady of the Academy of Sciences of Ukraine. Series A. Physical, Mathematical, and Technical Sciences*, 1978, vol. 12, pp. 1079–1083 (in Russian).

11. Averbukh V. I., Smolyanov O. G. The Theory of Differentiation in Linear Topological Spaces. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Successes of Mathematical Sciences*. 1967, vol. 22, no. 6 (138), pp. 201–260 (in Russian).

12. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. *Interpolation of Operator*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2000. 407 p. (in Russian).

13. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. *Methods of Operator Interpolation. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 83: Mathematics and its applications*. Kiev, 2010. 516 p.

14. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the theory of interpolation of functions of matrix variables*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2016. 281 p. (in Russian).

15. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Interpolation methods for approximation of operators defined on function spaces and sets of matrices*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2020. 476 p. (in Russian).

16. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrny P. I. *Computational methods. 2 vol.* Moscow, Nauka Publ., 1976–1977 (in Russian).

17. Mysovskikh I. P. *Lectures on computational methods: textbook*. St. Petersburg, Publishing House St. Petersburg State University, 1998. 472 p. (in Russian).

18. Yanovich, L. A., Ignatenko M. V. Newton-Type Interpolation Functional Polynomials with nodes of the second multiplicity. *Analiticheskiye metody analiza i differentsial'nykh uravneniy. Sbornik nauchnykh trudov = Analytical methods of analysis and differential equations. Collection of Sceintific Papers*. Minsk, Belarussian State University, 2012, pp. 229–240 (in Russian).

19. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. On the exact and approximate solution of several differential equations with variational derivatives of the first and second orders. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 51–71 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71

20. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. To the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 2, pp. 7–23 (in Russian).

21. Ignatenko M. V. To the interpolation theory of dierential operators of arbitrary order in partial derivatives. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noy akademii nauk Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).

22. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. Generalized interpolation Hermite – Birkhoff polynomials for arbitrary-order partial differential operators. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 149–163 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163

Информация об авторах

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Янович Леонид Александрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Information about the authors

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Leonid A. Yanovich – Corresponding Member, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanovich@im.bas-net.by