ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.956.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427

Поступила в редакцию 11.08.2021
Received 11.08.2021

В. И. Корзюк[1,2], Я. В. Рудько[2]

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБ АБСОЛЮТНО НЕУПРУГОМ УДАРЕ ПО ДЛИННОМУ УПРУГОМУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМУ СТЕРЖНЮ

Аннотация. Изучается классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости для одномерного волнового уравнения. На нижнем основании задаются условия Коши, причем второе из них имеет разрыв первого рода в точке. На боковой границе задается гладкое граничное условие, содержащее производные первого и второго порядков. Решение строится методом характеристик в явном аналитическом виде. Доказывается единственность и устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое решение. Рассматривается задача с условиями сопряжения.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение, неоднородное уравнение, смешанная задача, негладкие начальные условия, метод характеристик

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение одной задачи об абсолютно неупругом ударе по длинному упругому полубесконечному стержню / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 417–427. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427

Viktor I. Korzyuk[1,2], Jan V. Rudzko[2]

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

THE CLASSICAL SOLUTION OF ONE PROBLEM OF AN ABSOLUTELY INELASTIC IMPACT ON A LONG ELASTIC SEMI-INFINITE BAR

Abstract. In this article, we study the classical solution of the mixed problem in a quarter of a plane for a one-dimensional wave equation. On the bottom boundary, the Cauchy conditions are specified, meanwhile, the second of them has a discontinuity of the first kind at one point. The smooth boundary condition, which has the first and the second order derivatives, is set at the side boundary. The solution is built using the method of characteristics in an explicit analytical form. The uniqueness is proved and the conditions are established under which a piecewise-smooth solution exists. The problem with matcing conditions is considered.

Keywords: one-dimensional wave equation, nonhomogeneous equation, mixed problem, non-smooth initial conditions, method of characteristics

For citation. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. The classical solution of one problem of an absolutely inelastic impact on a long elastic semi-infinite bar. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2021, vol. 57, no. 4, pp. 417–427 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427

Введение. Основное явление в теории механического удара – это распространение волн смещений в твердых телах. Экспериментальное изучение почти всех явлений удара весьма затруднительно. При аналитическом изучении вызванных ударом колебаний интерес представляют задачи, в которых груз после удара остается в соприкосновении с ударяемым телом, для которых рассматриваются и описываются колебательные процессы [1, 2]. Как правило, математическая модель подобных явлений представляет собой смешанные задачи для уравнений с частными производными с присутствием заданных условий в начальный момент рассматриваемого процесса колебаний, которые отличны от нуля на множестве нулевой меры [3–5].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию свойств решения одной одномерной смешанной задачи, содержащей в граничном условии производные первого и второго порядков, для неоднородного волнового уравнения с разрывом в начальном условии. Указанная задача исследуется методом характеристик [6, 7].

Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ упругий полубесконечный однородный стержень постоянного поперечного сечения, конец которого $x = 0$ свободен, подвергся удару некоторым грузом по свободному концу, причем в дальнейшем груз остается в соприкосновении со стержнем. Кроме того, полагаем, что на стержень действует внешняя объемная сила, а смещения точек стержня и скорость их изменения в начальный момент времени не равны нулю. Тогда, пренебрегая весом стержня как силы и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений u требуется найти решение волнового уравнения в области $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x)\in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$,

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x\in[0,\infty),\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x\in(0,\infty) \end{cases} \tag{2}$$

и граничном условии

$$(\partial_t^2 + b^2\partial_x)u(t,0) = \mu(t),\ t\in[0,\infty). \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) $a^2 = E/\rho,\ b^2 = SE/M,$ где $E > 0$ – модуль упругости стержня, $\rho > 0$ – плотность материала стержня, $S > 0$ – площадь поперечного сечения стержня и $M > 0$ – масса ударившего груза, величина $\psi_2(0+) - \psi_1$ имеет физический смысл скорости ударяющего груза, величина $\mu(t)$ имеет физический смысл внешней воздействующей силы на конец стержня, деленной на массу ударившего груза.

Будем полагать, что функции f, φ, ψ_2, μ достаточно гладкие, а именно:

$$f\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi_2\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C([0,\infty)),$$

и, для определенности, $a > 0$ и $b > 0$.

Построение решения. Для построения решения задачи (1)–(3) рассмотрим вспомогательную задачу для волнового уравнения (1) на замыкании $\overline{Q}$ области Q. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x) = \varphi(x),\quad x\in[0,\infty),\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x\in[0,x^*),\ x^*>0, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x\in(x^*,\infty) \end{cases} \tag{4}$$

и граничное условие (3). При этом полагаем, что $\tilde{\psi}_1\in C^1([0,x^*]),\ \tilde{\psi}_2\in C^1([x^*,\infty)),\ \tilde{\psi}_2(x) = \psi_2(x)$ для $x\in(x^*,\infty),\ \tilde{\psi}_1(0) = \psi_1.$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [6]. Пусть $w:\overline{Q}\to\mathbb{R}$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным условиям Коши $w(0,x) = \partial_t w(0,x) = 0, \partial_t^2 w(0,x) = f(0,x).$ Такое решение w существует [6–8], и оно имеет вид [8]

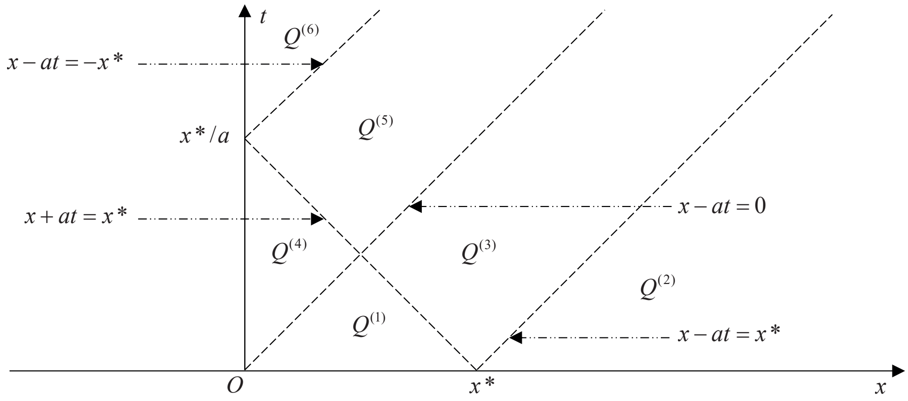
$$w(t,x) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f\big(\tau,|\lambda|\big)\,d\lambda. \tag{5}$$

Если $f\in C^1(\overline{Q}),$ то $w\in C^2(\overline{Q}).$

Тогда общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$u(t,x) = w(t,x) + g^{(1)}(x - at) + g^{(2)}(x + at), \tag{6}$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции. Для построения решения разделим область Q на шесть подобластей (рисунок):



Разделение области Q характеристиками $x-at=0$, $x+at=x^*$, $x-at=x^*$ и $x-at=-x^*$ на шесть подобластей $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ и $Q^{(6)}$

Separation of the domain Q by the characteristics $x-at=0$, $x+at=x^*$, $x-at=x^*$ and $x-at=-x^*$ into six subdomains $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, $Q^{(5)}$ and $Q^{(6)}$

$$\begin{aligned}
&Q^{(1)}=Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at<x^*, x-at<x^*, x-at>0\},\\
&Q^{(2)}=Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at>x^*, x-at>x^*, x-at>0\},\\
&Q^{(3)}=Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at>x^*, x-at<x^*, x-at>0\},\\
&Q^{(4)}=Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at<x^*, x-at<x^*, x-at<0\},\\
&Q^{(5)}=Q\cap\{(t,x)\,|\,x+at>x^*, x-at>-x^*, x-at<0\},\\
&Q^{(6)}=Q\cap\{(t,x)\,|\,x-at<-x^*\}.
\end{aligned}\tag{7}$$

Определим функции $u^{(i)}$ как локальные решения задачи (1), (3), (4) в подобластях $Q^{(i)}$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Пусть

$$u(t,x)=u^{(i)}(t,x),\ \text{если}\ (t,x)\in Q^{(i)},\quad i\in\{1,2,3,4,5,6\}.\tag{8}$$

Определение 1. *Функцию u, определяемую формулой* (8)*, назовем решением задачи* (1)*,* (3)*,* (4)*, если* $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ *для каждого* $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$*, функция* $u^{(j)}$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в* $Q^{(j)}$*, функция u удовлетворяет первому из* (4) *условию* $u(0,x)=\varphi(x)$, $x\in[0,\infty)$*, функция* $u^{(1)}$ *удовлетворяет второму из* (4) *условию Коши на полуоткрытом отрезке* $[0,x^*)$*, функция* $u^{(2)}$ *удовлетворяет этому условию на полупрямой* (x^*,∞)*, функция* $u^{(4)}$ *удовлетворяет граничному условию* (3) *на полуоткрытом отрезке* $[0,x^*/a)$*, функция* $u^{(6)}$ *удовлетворяет условию* (3) *на полупрямой* $(x^*/a,\infty)$*. Функции* $u^{(j)}$ *на границах* $\partial Q^{(j)}$ *раздела области Q удовлетворяют условиям сопряжения* (27).

В силу (6) имеем

$$u^{(i)}(t,x)=w(t,x)+g^{(1,i)}(x-at)+g^{(2,i)}(x+at),\quad i\in\{1,2,3,4,5,6\},\quad (t,x)\in Q^{(i)},\tag{9}$$

где $g^{(1,i)}$ и $g^{(2,i)}$ – некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

Удовлетворяя условия Коши в подобластях $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, получим формулы

$$\begin{aligned}
&g^{(1,1)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_1(\xi)d\xi+C^{(1)},\quad x\in(0,x^*),\\
&g^{(2,1)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_1(\xi)d\xi-C^{(1)},\quad x\in(0,x^*),\\
&g^{(1,2)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_2(\xi)d\xi+C^{(2)},\quad x\in(x^*,\infty),\\
&g^{(2,2)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x}\tilde\psi_2(\xi)d\xi-C^{(2)},\quad x\in(x^*,\infty),
\end{aligned}\tag{10}$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ – произвольные постоянные из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ примут вид

$$
\begin{aligned}
u^{(1)}(t,x) &= w(t,x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}_1(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in Q^{(1)}, \\
u^{(2)}(t,x) &= w(t,x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}_2(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in Q^{(2)}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Из формул (11) видно, что функции $u^{(j)}$ из класса дважды непрерывно-дифференцируемых $C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j=1,2$, если, например, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1\in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2\in C^1([x^*,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q})$, где $\overline{Q^{(j)}}$, $\overline{Q}$ – замыкания областей $Q^{(j)}$ и Q соответственно. Кроме того, функция $u^{(1,2)}(t,x)=u^{(j)}(t,x)$, $(t,x)\in\overline{Q^{(j)}}$ является непрерывной на части границы $\gamma^{(1,3)}\cup\gamma^{(2,3)}$ области $Q^{(3)}$, где $\gamma^{(j,3)}=\overline{Q^{(j)}}\cap\overline{Q^{(3)}}$, $j=1,2$. Учитывая данный факт, функцию $u^{(3)}$ определяем как решение в области $Q^{(3)}$ с условиями на характеристиках.

Согласно представлению (9) и формулам (11), имеем равенства

$$
\begin{aligned}
g^{(1,3)}(x^*) + g^{(2,3)}(x^*+2at) &= \frac{1}{2}\big(\varphi(x^*+2at)+\varphi(x^*)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x^*+2at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + \\
&\quad + C^{(1)} - C^{(2)}, \quad t\in[0,\infty), \\
g^{(1,3)}(x^*-2at) + g^{(2,3)}(x^*) &= \frac{1}{2}\big(\varphi(x^*-2at)+\varphi(x^*)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x^*-2at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \\
&\quad + C^{(1)} - C^{(2)}, \quad t\in[0,\infty).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Соотношения (9) для $i = 3$ и (12) в совокупности определяют функцию $u^{(3)}$ и

$$
\begin{aligned}
u^{(3)}(t,x) &= w(t,x) + \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + \\
&\quad + C^{(1)} - C^{(2)}, \quad (t,x)\in\overline{Q^{(3)}}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

В области $Q^{(4)}$ находим решение $u^{(4)}$ уравнения (1). Согласно представлениям (9) и граничному условию (3),

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_t^2 + b^2\partial_x\right)u(t,0) &= b^2\left(\partial_x w(t,0) + Dg^{(1,4)}(-at) + Dg^{(2,4)}(at)\right) + \\
&\quad + \partial_t^2 w(t,0) + a^2D^2g^{(1,4)}(-at) + a^2D^2g^{(2,4)}(at) = \mu(t), \quad t\in(0,x^*/a),
\end{aligned} \tag{14}
$$

где D – оператор обыкновенной производной. Отсюда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $g^{(1,4)}$:

$$
\begin{aligned}
& b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a},0\right) + Dg^{(1,4)}(z) + Dg^{(2,4)}(-z)\right) + \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},0\right) + \\
& + a^2D^2g^{(1,4)}(z) + a^2D^2g^{(2,4)}(-z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right), \; z\in(-x^*,0).
\end{aligned} \tag{15}
$$

В представлении решения (6) функция $g^{(2)}$ должна быть определена для всех положительных значений аргумента. Она определена уже согласно формулам (10). Поэтому для $z\in(-x^*,0)$ в выражении (15) полагаем $g^{(2,4)}(-z)=g^{(2,1)}(-z)$. Таким образом, уравнение (15) рассматриваем как дифференциальное уравнение относительно функции $g^{(1,4)}$ на отрезке $z\in[-x^*,0]$. С помощью формул (10) через значения функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(1,2)}$ функция $g^{(1)}$ представления (6) определена для положительных значений аргумента. Учитывая непрерывность функции $g^{(1)}$ в целом должны выполняться условия

$$g^{(1,4)}(0) = g^{(1,1)}(0) = C_1 + \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi,$$
$$Dg^{(1,4)}(0) = Dg^{(1,1)}(0) = \frac{1}{2}D\varphi(0) - \frac{1}{2a}\tilde{\psi}_1(0). \tag{16}$$

Уравнения (15) относительно $g^{(1,4)}$ вместе с условиями (16) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Решая эту задачу, получим

$$g^{(1,4)}(z) = C_1 + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{\varphi(0)}{2} +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^{z}\exp\left(-\frac{b^2\xi}{a^2}\right)\left(aD\varphi(0) - \tilde{\psi}_1(0) + \frac{2}{a}\int_0^{\xi}\mathcal{M}_4(\eta)\exp\left(\frac{b^2\eta}{a^2}\right)d\eta\right)d\xi, \quad z \in (-x^*, 0), \tag{17}$$

где

$$\mathcal{M}_4(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a}, 0\right) - a^2 D^2 g^{(2,4)}(-z) - b^2 Dg^{(2,4)}(-z) - b^2\partial_x w\left(-\frac{z}{a}, 0\right), \quad z \in (-x^*, 0).$$

В результате получаем

$$u^{(4)}(t,x) = \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\exp\left(-\frac{b^2\xi}{a^2}\right)\left(aD\varphi(0) - \tilde{\psi}_1(0) + \frac{2}{a}\int_0^{\xi}\mathcal{M}_4(\eta)\exp\left(\frac{b^2\eta}{a^2}\right)d\eta\right)d\xi +$$
$$+\frac{\varphi(x+at)}{2} + w(t,x) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in Q^{(4)}. \tag{18}$$

Поскольку области определения по внешнему аргументу функций $g^{(1,5)}$ и $g^{(1,4)}$ совпадают, то полагаем в представлении (9) для $i = 5$ $g^{(1,5)}(x-at) = g^{(1,4)}(x-at)$ для $(t,x) \in Q^{(5)}$. По этой же причине полагаем $g^{(2,5)}(x+at) = g^{(2,2)}(x+at)$ для $(t,x) \in Q^{(5)}$. В силу формул (9), (10) и (17) получаем решение $u^{(5)}$ в $Q^{(5)}$ в виде

$$u^{(5)}(t,x) = \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\exp\left(-\frac{b^2\xi}{a^2}\right)\left(aD\varphi(0) - \tilde{\psi}_1(0) + \frac{2}{a}\int_0^{\xi}\mathcal{M}_4(\eta)\exp\left(\frac{b^2\eta}{a^2}\right)d\eta\right)d\xi +$$
$$+C^{(1)} - C^{(2)} + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi + w(t,x), \quad (t,x) \in Q^{(5)}. \tag{19}$$

В области $Q^{(6)}$ решение $u^{(6)}$ построим таким образом, чтобы оно было непрерывно-дифференцируемым при переходе через характеристику $x - at = -x^*$. Это можно сделать следующим образом. Функция $u^{(6)}$, согласно представлению (9), определяется через значения функций $g^{(1,6)}$ и $g^{(2,6)}$. Заметим, что для $(t,x) \in Q^{(6)}$ соотношения $x - at \in (-\infty, -x^*)$, $x + at \in (x^*, \infty)$. Согласно (10), функция $g^{(2)}$ частично определена через $g^{(2,2)}$ для $x + at \in (x^*, \infty)$. Поэтому $g^{(2,6)}(x+at) = g^{(2,2)}(x+at)$ для всех $(t,x) \in Q^{(6)}$. Осталось определить $g^{(1,6)}(x-at)$ для $(t,x) \in Q^{(6)}$, т. е. $g^{(1,6)}(z)$ для $z \in (-\infty, -x^*)$. Это можно сделать из требований, что $u^{(6)}$ должна удовлетворять условию (3), и того, что функция

$$u^{(5,6)}(t,x) = \begin{cases} u^{(5)}(t,x), & (t,x) \in \overline{Q^{(5)}}, \\ u^{(6)}(t,x), & (t,x) \in \overline{Q^{(6)}} \end{cases}$$

должна принадлежать классу $C^1(\overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$, предполагая при этом

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*]), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty)), \quad \mu \in C([0,\infty)).$$

Удовлетворяя условию (3), получаем относительно функции $g^{(1,6)}$ дифференциальное уравнение второго порядка

$$b^2\left(\partial_x w\left(-\frac{z}{a},0\right) + Dg^{(1,6)}(z) + Dg^{(2,6)}(-z)\right) + \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},0\right) +$$
$$+ a^2 D^2 g^{(1,6)}(z) + a^2 D^2 g^{(2,6)}(-z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right), \ z \in (-\infty, -x^*). \tag{20}$$

Из требования $u^{(5,6)} \in C^1(\overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$ имеем условия

$$g^{(1,6)}(-x^*) = g^{(1,4)}(-x^*), \quad Dg^{(1,6)}(-x^*) = Dg^{(1,4)}(-x^*). \tag{21}$$

Решая задачу Коши (20), (21) относительно функции $g^{(1,6)}$, получим

$$g^{(1,6)}(z) = C_1 + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*} \tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{\varphi(0)}{2} +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^z \exp\left(-\frac{b^2\xi}{a^2}\right)\left(aD\varphi(0) - \tilde{\psi}_1(0) + \frac{2}{a}\int_0^\xi \mathcal{M}_6(\eta)\exp\left(\frac{b^2\eta}{a^2}\right)d\eta\right)d\xi, \quad z \in (-\infty, x^*), \tag{22}$$

где

$$\mathcal{M}_6(z) = \begin{cases} \mu\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},0\right) - a^2D^2g^{(2,4)}(-z) - b^2Dg^{(2,4)}(-z) - b^2\partial_x w\left(-\frac{z}{a},0\right), & z \in (-x^*, 0), \\ \mu\left(-\frac{z}{a}\right) - \partial_t^2 w\left(-\frac{z}{a},0\right) - a^2D^2g^{(2,6)}(-z) - b^2Dg^{(2,6)}(-z) - b^2\partial_x w\left(-\frac{z}{a},0\right), & z \in (-\infty, -x^*). \end{cases}$$

В соотношениях (22) полагаем $g^{(2,6)}(-z) = g^{(2,2)}(-z).$ В результате получаем

$$u^{(6)}(t,x) = \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \exp\left(-\frac{b^2\kappa_2}{a^2}\right)\left(aD\varphi(0) - \tilde{\psi}_1(0) + \frac{2}{a}\int_0^{\kappa_2} \mathcal{M}_6(\kappa_1)\exp\left(\frac{b^2\kappa_1}{a^2}\right)d\kappa_1\right)d\kappa_2 +$$
$$+C_1 - C_2 + w(t,x) + \frac{1}{2a}\int_0^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi + \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi, \ (t,x) \in Q^{(6)}. \tag{23}$$

Выясним, что представляет собой разность $C^{(1)} - C^{(2)}$ в формулах (12) и (19). Для этого воспользуемся начальными условиями в точке $x = x^*$. Возьмем $(t,x) \in Q^{(3)}$ и будем устремлять ее к точке $(0,x^*)$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x \to x^*}} u^{(3)}(t,x) = \varphi(x^*) + C^{(1)} - C^{(2)} = \varphi(x^*). \tag{24}$$

Из (24) имеем, что $C^{(1)} - C^{(2)} = 0.$

Гладкость решения. Если

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*]), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty)), \quad \mu \in C([0,\infty)),$$

то из формул (11), (13), (18), (19) и (23) следует, что $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}}),\ j = 1,2,\ldots,6.$

Т е о р е м а 1. *Если выполняются условия гладкости для заданных функций*

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*]), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty)), \quad \mu \in C([0,\infty)),$$

то существует единственное классическое решение задачи (1), (3), (4) *в смысле определения* 1, *и оно представляется формулами* (11), (13), (18), (19) *и* (23).

Доказательство следует из формул (11), (13), (18), (19) и (23). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции удовлетворяют уравнению (1) и условиям (3), (4). Единственность доказывается методом от противного. Если предположить, что существует два решения, тогда для их разности получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (3)–(4), из которых следует нулевое решение согласно формулам (11), (13), (18), (19) и (23).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi \in C^2([0,\infty)),\quad \tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*]),\quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty)),\quad \mu \in C([0,\infty)).$$

Тогда решение задачи (1), (3), (4) *в смысле определения* 1, *которое представлено формулами* (11), (13), (18), (19) *и* (23) *принадлежит классу* $C(\overline{Q})$.

Доказательство. Для каждого $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Это следует из формул (11), (13), (18), (19) и (21). Значит, чтобы $u \in C(\overline{Q})$, должны выполняться условия

$$\begin{aligned}
&u^{(1)}(t,x=at)=u^{(4)}(t,x=at),\ \text{при}\ x+at<x^*,\\
&u^{(5)}(t,x=at)=u^{(3)}(t,x=at),\ \text{при}\ x+at>x^*,\\
&u^{(5)}(t,x=at-x^*)=u^{(6)}(t,x=at-x^*),\\
&u^{(4)}(t,x=x^*-at)=u^{(5)}(t,x=x^*-at),\ \text{при}\ x-at<0,\\
&u^{(1)}(t,x=x^*-at)=u^{(3)}(t,x=x^*-at),\ \text{при}\ x-at>0,\\
&u^{(2)}(t,x=x^*+at)=u^{(3)}(t,x=x^*+at),\ \text{при}\ x-at>0.
\end{aligned}\tag{25}$$

Равенства (25) следуют из формул (11), (13), (18), (19) и (23). Вычислив выражения, входящие в равенства (25), получим, что условия (24) верны.

Исследуем разрыв частных производных первого и второго порядков на границах подобластей $Q^{(i)}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Имеет место следующее

Утверждение. *Частные производные решения и задачи* (1), (3), (4) *имеют разрывы на характеристиках* $x-at=0$, $x \pm at = x^*$ *и* $x-at=-x^*$, *а именно:*

1) частные производные первого порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t u^{(2)}-\partial_t u^{(3)}\right)(t,x=x^*+at)=\delta\psi/2,\qquad \left(\partial_t u^{(3)}-\partial_t u^{(1)}\right)(t,x=x^*-at)=\delta\psi/2,$$

$$\left(\partial_t u^{(5)}-\partial_t u^{(4)}\right)(t,x=x^*-at)=\delta\psi/2 \quad \text{и} \quad \left(\partial_t u^{(5)}-\partial_t u^{(6)}\right)(t,x=at-x^*)=0;$$

$$\left(\partial_x u^{(2)}-\partial_x u^{(3)}\right)(t,x=x^*+at)=-\delta\psi/(2a),\qquad \left(\partial_x u^{(3)}-\partial_x u^{(1)}\right)(t,x=x^*-at)=\delta\psi/(2a),$$

$$\left(\partial_x u^{(5)}-\partial_x u^{(4)}\right)(t,x=x^*-at)=\delta\psi/(2a) \quad \text{и} \quad \left(\partial_x u^{(5)}-\partial_x u^{(6)}\right)(t,x=at-x^*)=0$$

на характеристиках $x \pm at = x^*$ *и* $x-at=-x^*$;

2) частные производные второго порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t^2 u^{(2)}-\partial_t^2 u^{(3)}\right)(t,x=x^*+at)=-a\delta\psi^{(1)}/2,\qquad \left(\partial_t^2 u^{(3)}-\partial_t^2 u^{(1)}\right)(t,x=x^*-at)=a\delta\psi^{(1)}/2,$$

$$\left(\partial_t^2 u^{(5)}-\partial_t^2 u^{(4)}\right)(t,x=x^*-at)=a\delta\psi^{(1)}/2 \quad \text{и} \quad \left(\partial_t^2 u^{(5)}-\partial_t^2 u^{(6)}\right)(t,x=at-x^*)=\frac{b^2\delta\psi+a^2\delta\psi^{(1)}}{2a};$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(2)}-\partial_x^2 u^{(3)}\right)(t,x=x^*+at)=-\delta\psi^{(1)}/(2a),\qquad \left(\partial_x^2 u^{(3)}-\partial_x^2 u^{(1)}\right)(t,x=x^*-at)=\delta\psi/(2a),$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(5)}-\partial_x^2 u^{(4)}\right)(t,x=x^*-at)=\delta\psi^{(1)}/(2a) \quad \text{и} \quad \left(\partial_x^2 u^{(5)}-\partial_x^2 u^{(6)}\right)(t,x=at-x^*)=\frac{b^2\delta\psi+a^2\delta\psi^{(1)}}{2a^3};$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(2)}-\partial_t\partial_x u^{(3)}\right)(t,x=x^*+at)=\delta\psi^{(1)}/2,\qquad \left(\partial_t\partial_x u^{(3)}-\partial_t\partial_x u^{(1)}\right)(t,x=x^*-at)=\delta\psi^{(1)}/2,$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(5)} - \partial_t\partial_x u^{(4)}\right)(t, x = x^* - at) = \delta\psi^{(1)} / 2 \quad \text{и} \quad \left(\partial_t\partial_x u^{(5)} - \partial_t\partial_x u^{(6)}\right)(t, x = at - x^*) = \frac{b^2\delta\psi + a^2\delta\psi^{(1)}}{-2a^2}$$

на характеристиках $x \pm at = x^*$ *и* $x - at = -x^*$;

3) частные производные первого порядка не имеют разрыва на характеристике $x - at = 0$;

4) частные производные второго порядка имеют разрывы

$$\left(\partial_t^2 u^{(1)} - \partial_t^2 u^{(4)}\right)(t, x = at) = \left(\partial_t^2 u^{(3)} - \partial_t^2 u^{(5)}\right)(t, x = at) = f(0,0) - \mu(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0),$$

$$\left(\partial_x^2 u^{(1)} - \partial_x^2 u^{(4)}\right)(t, x = at) = \left(\partial_x^2 u^{(3)} - \partial_x^2 u^{(5)}\right)(t, x = at) = \left(f(0,0) - \mu(0) + a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0)\right) / a^2,$$

$$\left(\partial_t\partial_x u^{(1)} - \partial_t\partial_x u^{(4)}\right)(t, x = at) = \left(\partial_t\partial_x u^{(3)} - \partial_t\partial_x u^{(5)}\right)(t, x = at) =$$
$$= \left(\mu(0) - f(0,0) - a^2D^2\varphi(0) - b^2D\varphi(0)\right) / a$$

на характеристике $x - at = 0$;
где использованы обозначения

$$\delta\psi = \tilde{\psi}_2(x^*) - \tilde{\psi}_1(x^*), \quad \delta\psi^{(1)} = D\tilde{\psi}_2(x^*) - D\tilde{\psi}_1(x^*). \tag{26}$$

Соотношения утверждения доказываются непосредственной проверкой.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*]), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*, \infty)), \quad \mu \in C([0,\infty)).$$

Тогда решение задачи (1), (3), (4) *в смысле определения* 1, *которое представлено формулами* (11), (13), (18), (19) *и* (23), *принадлежит классу* $C^1(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ для каждого $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, то для того, чтобы решение было из класса $C^1(\overline{Q})$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = 0$, $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого порядка. А из утверждения следует, что они выполняются только при $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \tilde{\psi}_1 \in C^1([0, x^*]), \quad \tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*, \infty)), \quad \mu \in C([0,\infty)).$$

Тогда решение задачи (1), (3), (4) *в смысле определения* 1, *которое представлено формулами* (11), (13), (18), (19) *и* (23), *принадлежит классам* $C^2(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}})$ *и* $C^2(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$ *тогда и только тогда, когда* $D\tilde{\psi}_1(x^*) = D\tilde{\psi}_2(x^*)$ *и* $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ для каждого $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$, то для того, чтобы решение было из классов $C^2(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}} \cup \overline{Q^{(3)}})$ и $C^2(\overline{Q^{(4)}} \cup \overline{Q^{(5)}} \cup \overline{Q^{(6)}})$, должны быть выполнены однородные условия сопряжения на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$ и $x - at = -x^*$ для решения и его производных первого и второго порядков. А из утверждения следует, что они выполняются только при $D\tilde{\psi}_1(x^*) = D\tilde{\psi}_2(x^*)$ и $\tilde{\psi}_1(x^*) = \tilde{\psi}_2(x^*)$.

Задача с условиями сопряжения. Рассмотрим задачу, когда хоть один какой-то разрыв, указанный в утверждении, не равен нулю. В этом случае можно рассматривать задачу с условиями сопряжения, которые задаются на характеристиках $x + at = x^*$, $x - at = x^*$, $x - at = 0$ и $x - at = -x^*$. Сформулируем такую задачу.

Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (4), граничному условию (3) и следующим условиям сопряжения:

$$
\begin{aligned}
&[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, at - x^*) = 0,\\
&[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x^* - at) = [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x^* + at) = \frac{\delta\psi}{2},\\
&\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right](t, at - x^*) = \frac{b^2\delta\psi + a^2\delta\psi^{(1)}}{2a},\\
&\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right](t, x^* - at) = \left[\left(\partial_t^2 u\right)^- - \left(\partial_t^2 u\right)^+\right](t, x^* + at) = a\frac{\delta\psi^{(1)}}{2},\\
&[u^+ - u^-](t, at) = [(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, at) = 0,\\
&\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right](t, at) = f(0,0) - \mu(0) + a^2 D^2\varphi(0) + b^2 D\varphi(0).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Здесь использованы обозначения $()^{\pm}$ – предельные значения функции u и ее производных ∂_t, ∂_t^2 с разных сторон на характеристиках вида $x = r(t)$, т. е. $\left(\partial_t^p u\right)^{\pm}\left(t, r(t)\right) = \lim\limits_{\Delta t \to 0+} \partial_t^p u\left(t, r(t) \pm \Delta t\right)$, где $p = 1,2$ и r – функция действительного переменного.

Предельный переход. Возвращаемся к исходной задаче (1)–(3). Ее решение может быть получено предельным переходом из решения задачи (1), (3), (4). Устремив x^* к нулю, получим, что области $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(5)}$ уменьшаются и в пределе становятся пустыми множествами, но их значения будут влиять на значения решения на характеристике $x - at = 0$, поскольку замыкание множеств $Q^{(3)}$ и $Q^{(5)}$ станет характеристикой $x - at = 0$, а замыкание $Q^{(1)}$ и $Q^{(4)}$ станет точкой (0,0). В то же время области $Q^{(2)}$ и $Q^{(6)}$ останутся, и решение будет иметь вид

$$
u(t,x) = \begin{cases}
u^{(2)}(t,x), & x - at > 0,\\
[u^{(1)} \text{ или } u^{(4)}](t,x), & t = 0,\ x = 0,\\
[u^{(3)} \text{ или } u^{(5)}](t,x), & x - at = 0,\ x > 0,\\
u^{(6)}(t,x), & x - at < 0,
\end{cases}
\tag{28}
$$

где функции $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(5)}$ и $u^{(6)}$ определены формулами (11), (13), (19) и (23) при $x^* = 0$.

Для корректности предельного перехода необходимо, чтобы кусочно-заданная функция u была дважды непрерывно-дифференцируемой в $Q^{(i)}$ для каждого $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Это будет выполнятся, если будет выполняться условия гладкости $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\tilde{\psi}_1 \in C^1([0,x^*])$, $\tilde{\psi}_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\mu \in C([0,\infty))$. Для единственности решения необходимы попарные равенства функций $u^{(3)}$ и $u^{(5)}$, $u^{(1)}$ и $u^{(4)}$, а также их частных производных до второго порядка включительно, на характеристике $x - at = 0$, что будет сделано при выполнении условия $f(0,0) - \mu(0) + a^2 D^2\varphi(0) + b^2 D\varphi(0) = 0$.

В точке (0,0) можно положить u равным $\varphi(0)$. Такой же результат можно получить непосредственно из формулы (28) предельным переходом, так как непрерывность u на множестве $\overline{Q}$ будет сохранена. Также останутся в силе и некоторые другие свойства решения, относящиеся к непрерывности. Так, например, если выполнены условия $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi_1 \in C^1([0,x^*])$, $\psi_2 \in C^1([x^*,\infty))$, $\mu \in C([0,\infty))$, то решение будет из классов $C(\overline{Q})$, $C^2(\{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at > 0\})$ и $C^2\left(\{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at < 0\}\right)$. Более того, u будет принадлежать классу $C(\overline{Q}) \cap C^2(Q_-) \cap C^2(Q_+)$, где

$$
\begin{aligned}
&Q_- = \{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at > 0\},\\
&Q_+ = \{(t,x) \mid t > 0, x > 0, x - at < 0\}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Для решения задачи (1)–(3), представленного формулой (28) при $x^* = 0$, можно вычислить разрывы производных первого и второго порядков в явном виде на характеристике $x - at = 0$, а именно:

$$\begin{aligned}
&\left[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\right](t, at) = (\psi_2(0+) - \psi_1)/2,\\
&\left[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\right](t, at) = \left(\psi_1 - \psi_2(0+)\right)/(2a),\\
&\left[\left(\partial_t^2 u\right)^+ - \left(\partial_t^2 u\right)^-\right](t, at) = f(0,0) - \mu(0) + a^2 D^2\varphi(0) + \frac{b^2\left(\psi_2(0+) - \psi_1 + 2aD\varphi(0)\right)}{2a},\\
&\left[\left(\partial_x^2 u\right)^+ - \left(\partial_x^2 u\right)^-\right](t, at) = \frac{b^2\left(\psi_2(0+) - \psi_1\right)}{2a^3} + D^2\varphi(0) + \frac{f(0,0) - \mu(0) + b^2 D\varphi(0)}{a^2},\\
&\left[(\partial_t\partial_x u)^+ - (\partial_t\partial_x u)^-\right](t, at) = \frac{b^2\left(\psi_1 - \psi_2(0+)\right) - 2a\left(a^2D^2\varphi(0) + b^2D\varphi(0) + f(0,0) - \mu(0)\right)}{2a^2}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Сформулируем результат в виде теоремы.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi \in C^2([0,\infty)),\quad \psi_2 \in C^1([0,\infty)),\quad \mu \in C([0,\infty)),$$

тогда решение задачи (1)–(3) *в смысле определения* 1 *при* $x^* = 0$, *представленное формулой* (28), *является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* $\mu(0) = f(0,0) + a^2 D^2\varphi(0) + b^2 D\varphi(0)$. *Кроме того, оно принадлежит классу* $C(\overline{Q}) \cap C^2(Q_-) \cap C^2(Q_+)$ *и удовлетворяет условиям сопряжения* (30).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из рассуждений выше.

Заключение. В работе были сформулированы условия согласования, при выполнении которых существует классическое решение задачи в случае достаточной гладкости ее условий. Построено классическое решение смешанной задачи в четверти плоскости двух независимых переменных и показана зависимость от гладкости заданных функций. Также сформулирована задача с условиями сопряжения, доказана корректность ее постановки. Одним из важнейших результатов является рассмотрение задачи, когда одна функция из условий Коши задается на множестве нулевой меры Жордана. В этом случае получены не только условия существования решения, но и доказаны необходимые и достаточные условия для единственности решения.

Список использованных источников

1. Лазарян, В. А. О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей / В. А. Лазарян // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. – 1950. – Вып. 20. – С. 3–32.

2. Маврин, А. И. К теории ударного погружения свай / А. И. Маврин // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1967. – № 8. – С. 24–28.

3. Boussinesq, J. Du choc longitudinal d'une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l'autre / J. Boussinesq // Comptes Rendus. – 1883. – Vol. 97, № 2. – P. 154–157.

4. Гайдук, С. И. О некоторых задачах, связанных с теорией поперечного удара по стержням / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1233–1243.

5. Гайдук, С. И. Математическое рассмотрение некоторых задач, связанных с теорией продольного удара по конечным стержням / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 11. – С. 2009–2025.

6. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Изд. 2-е, испр. и доп. – URSS, 2021. – 480 с.

7. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск: БГУ, 2017. – Ч. 2. – 50 с.

8. Юрчук, Н. И. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны / Н. И. Юрчук, Е. Н. Новиков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 116–120.

References

1. Lazaryan V. A. On dynamic forces in harness devices of homogeneous trains with resistance to relative movements of carriages. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta* [Proceedings of the Dnepropetrovsk Institute of Railway Engineers], 1950, no. 20, pp. 3–32 (in Russian).

2. Mavrin A. I. To the theory of shock piling. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura* [News of Universities. Building and Architecture], 1967, no. 8, pp. 24–28 (in Russian).

3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d'une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l'autre. *Comptes Rendus*, 1883, vol. 97, no. 2, pp. 154–157 (in French).

4. Gayduk S. I. Certain problems that are connected with the theory of a transversal shock along rods. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 7, pp. 1233–1243 (in Russian).

5. Gayduk S. I. A mathematical discussion of some problems connected with the theory of longitudinal shock along finite rods. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 11, pp. 2009–2025 (in Russian).

6. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. URSS Publ., 2021. 480 p. (in Russian).

7. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical Problem Solutions for Hyperbolic Equations. Part 2.* Minsk, Belarusian State University, 2017. 52 p. (in Russian).

8. Yurchuk N. I., Novikov E. N. Necessary conditions for existence of classical solutions to the equation of semi-bounded string vibration. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 116–120 (in Russian).

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Рудько Ян Вячеславович – магистрант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Jan V. Rudzko – Master's Degree Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106