МАТЭМАТЫКА

УДК 519.65

А. П. ХУДЯКОВ[1], *Л. А. ЯНОВИЧ*[2]

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭРМИТА – БИРКГОФА ДЛЯ СЛУЧАЯ ЧЕБЫШЕВСКИХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

[1]*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина*
[2]*Институт математики НАН Беларуси*

(Поступило в редакцию 24.04.2015)

Введение. Отличием обобщенного интерполирования Эрмита – Биркгофа от общепринятого является требование совпадения в узлах не производных интерполируемой функции и интерполяционного многочлена, а некоторых дифференциальных или другого вида операторов. Такого типа формулы построены и исследованы [1, 2] для тригонометрических, двух видов рациональных и экспоненциальных функций. Эти формулы обобщены на случай функций матричного аргумента [3–5]. В данной работе рассмотрена одна из интерполяционных задач Эрмита – Биркгофа типа для чебышевских систем общего вида и дается ее решение. Приводятся некоторые частные случаи.

Пусть задана некоторая чебышевская система функций $\varphi_k(x) \in C^{n+1}(T)$ $(k = 0,1,\ldots,n+1)$, $x \in T \subseteq \mathbb{R}$, где $C^{n+1}(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых $n+1$ раз на отрезке T функций. Введем также функции $g_n(\cdot;\cdot)$, заданные посредством определителей

$$g_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_0(x_n)\\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}, \qquad (1)$$

где $x_k \in T$ $(k = 0,1,\ldots,n)$.

Очевидно, что при перестановке местами любых двух аргументов-точек x_i и x_j $(i \neq j)$ или аргументов-функций φ_l и φ_m $(l \neq m)$ функция (1) меняет знак на противоположный, а если хотя бы два числовых аргумента и (или) аргумента-функции одинаковы, то $g_n(\cdot;\cdot) = 0$. Это следует из свойств определителя.

Введем обозначение $\tilde{g}_n = g_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\ldots,x_n)$ и многочлен

$$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k g_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n,x)f(x_k), \qquad (2)$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$L_n(x_i) = f(x_i) \ \ (i = 0,1,\ldots,n), \qquad (3)$$

который существует [6] и он единственен.

Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа по произвольной чебышевской системе функций. Пусть $f(x) \in C^{n+1}(T)$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D_{n+1} f(x) = W_n^{-1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n;\, x) W_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f;\, x), \tag{4}$$

где $W_n(\cdot; x)$ и $W_{n+1}(\cdot; x)$ – вронскианы для указанных в качестве аргументов систем функций. Очевидно, что функции $\varphi_k(x)$ являются решениями дифференциального уравнения $D_{n+1} f(x) = 0$, т. е.

$$D_{n+1}\varphi_k(x) = 0, \;\; k = 0, 1, \dots, n. \tag{5}$$

Эквивалентное [6] определение оператора (4) имеет вид

$$D_{n+1} f(x) = \big(D - b_n(x)\big)\big(D - b_{n-1}(x)\big) \cdots \big(D - b_0(x)\big) f(x) = \big(D - b_n(x)\big) D_n f(x), \;\; D = \frac{d}{dx}, \tag{6}$$

где $b_0(x) = \dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$, $b_k(x) = \dfrac{\big(D_k\varphi_k(x)\big)'}{D_k\varphi_k(x)}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Методом математической индукции при $k = 0, 1, \dots, n$ можно показать, что здесь $b_k(x) \in C^{n-k}(T)$ и $D_{k+1} f(x) \in C^{n-k}(T)$.

Т е о р е м а 1. *Интерполяционный многочлен*

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_{n+1}(x) D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)}, \tag{7}$$

где $L_n(x)$ *определяется формулой* (2),

$$\Omega_{n+1}(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1};\, x_0, x_1, \dots, x_n, x), \;\; D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j) \neq 0,$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_i) = f(x_i) \;\; (i = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_j) = D_{n+1}(f; x_j) \tag{8}$$

и инвариантен относительно многочленов вида

$$P_{n+1}(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_{n+1}\varphi_{n+1}(x), \tag{9}$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{n+1}$ *– произвольные действительные числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойств функции (1) имеем $g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1};\, x_0, x_1, \dots, x_n, x_i) = 0$ при $i = 0, 1, \dots, n$, поэтому для этих же точек x_i имеем $\Omega_{n+1}(x_i) = 0$. Учитывая далее (3), получим, что первая часть интерполяционных условий (8) выполняется.

Раскладывая функции $g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n;\, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ и $g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1};\, x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ по элементам последнего столбца соответствующих определителей, нетрудно показать, что многочлен $\tilde{L}_{n+1}(x)$ можно представить в виде

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)} \varphi_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Из (5) в силу линейности оператора $D_{n+1} f(x)$ будем иметь $D_{n+1}\tilde{L}_{n+1}(x) = \dfrac{D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)} D_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$, откуда при $x = x_j$ следует выполнение последнего равенства в (8).

Докажем инвариантность формулы (7) относительно многочленов вида (9). Полином $L_n(x)$ можно представить в виде

$$L_n(x) = -\frac{1}{\tilde{g}_n}\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ f(x_0) & \dots & f(x_n) & 0 \end{vmatrix}.$$

При $f(x) = \varphi_k(x)$ $(k = 0,1,\dots,n)$ будем иметь

$$L_n(\varphi_k;x) = -\frac{1}{\tilde{g}_n}\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ \varphi_k(x_0) & \dots & \varphi_k(x_n) & 0 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Раскладывая правую часть (10) по элементам последнего столбца, получим

$$L_n(\varphi_k;x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_n(\varphi_0,\dots,\varphi_{i-1},\varphi_{i+1},\dots,\varphi_n,\varphi_k;\, x_0,x_1,\dots,x_n)\varphi_i(x). \tag{11}$$

При $i \neq k$ определители в (11) равны нулю, так как в каждом из них есть две одинаковых строки. В определителе при $i = k$, переместив последнюю строку таким образом, чтобы она оказалась между строками с номерами k и $k+1$, будем иметь

$$L_n(\varphi_k;x) = \frac{(-1)^{n+k}}{\tilde{g}_n}(-1)^{n-k} g_n(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\, x_0,x_1,\dots,x_n)\varphi_k(x) = \varphi_k(x).$$

И так как $D_{n+1}\varphi_k(x) \equiv 0$ при $k = 0,1,\dots,n$, получим

$$\tilde{L}_{n+1}(\varphi_k;x) \equiv \varphi_k(x).$$

Если $f(x) = \varphi_{n+1}(x)$, то

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \Omega_{n+1}(x) = -\frac{1}{\tilde{g}_n}\varphi\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(x_0) & \dots & \varphi_{n+1}(x_n) & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\tilde{g}_n}\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(x_0) & \dots & \varphi_{n+1}(x_n) & \varphi_{n+1}(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\tilde{g}_n}\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_{n+1}(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\tilde{g}_n}\varphi_{n+1}(x)\tilde{g}_n = \varphi_{n+1}(x).$$

В силу линейности оператора (4) и того, что значения функции $f(x)$ входят в (7) линейно, формула (7) точна для многочленов вида (9). Теорема 1 доказана.

Представление погрешности интерполирования. Построим представление погрешности для формулы (7). Введем функцию $\tilde{\Omega}_{n+2}(x)$:

$$\tilde{\Omega}_{n+2}(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)}\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & 0 & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & 0 & \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(x_0) & \dots & \varphi_{n+1}(x_n) & D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j) & \varphi_{n+1}(x) \\ \varphi_{n+2}(x_0) & \dots & \varphi_{n+2}(x_n) & D_{n+2}(\varphi_{n+2};x_j) & \varphi_{n+2}(x) \end{vmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что функция $\tilde{\Omega}_{n+2}(x)$ удовлетворяет условиям

$$\tilde{\Omega}_{n+2}(x_i) = 0 \ \ (i = 0,1,\dots,n); \quad D_{n+1}(\tilde{\Omega}_{n+2};x_j) = 0.$$

Дополним систему базисных функций функцией $\varphi_{n+2}(x)$ и доопределим оператор $D_{n+2}f(x)$ по формуле (6). Будем предполагать, что $\varphi_k(x) \in C^{n+2}(T)$, $k = 0,1,\dots,n+2$. Тогда $b_k(x) \in C^{n-k+1}(T)$ и $D_{k+1}f(x) \in C^{n-k+1}(T)$.

Т е о р е м а 2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема $n+2$ раз в интервале T, то остаточный член $R_{n+1}(x)$ формулы* (7) *имеет вид*

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+2}(f;\xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2};\xi)}\tilde{\Omega}_{n+2}(x),$$

где $\xi \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in T$, $x \neq x_k$ $(k = \overline{0,n})$. Обозначим $K = \dfrac{f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)}{\tilde{\Omega}_{n+2}(x)}$ и рассмотрим функцию $\psi(t) = f(t) - \tilde{L}_{n+1}(t) - K\tilde{\Omega}_{n+2}(t)$, тогда

$$D_{n+1}\psi(t) = D_{n+1}f(t) - D_{n+1}\tilde{L}_{n+1}(t) - KD_{n+1}\tilde{\Omega}_{n+2}(t).$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что $\psi(t) \in C^{n+2}(T)$, а $D_{n+1}\psi(t) \in C^1(T)$. Так как $\psi(x_0) = \psi(x_1) = \ldots = \psi(x_n) = \psi(x) = 0$, то по обобщению теоремы Ролля [6] функция $D_{n+1}\psi(t)$ имеет по крайней мере один нуль η в интервале T: $D_{n+1}(\psi;\eta) = 0$. Нетрудно заметить, что $D_{n+1}\left(\tilde{\Omega}_{n+2};x_j\right) = 0$. Учитывая, кроме этого, последнее интерполяционное условие в (8), будем иметь $D_{n+1}(\psi;x_j) = 0$.

Функция $D_{n+1}\psi(t)$ на интервале T обращается в нуль по крайней мере два раза с учетом кратности. Тогда также по обобщению теоремы Ролля функция $D_{n+2}\psi(t)$ обращается в нуль по крайней мере один раз: $D_{n+2}(\psi;\xi) = 0$. Вычислим $D_{n+2}\psi(t)$:

$$D_{n+2}\psi(t) = D_{n+2}f(t) - D_{n+2}\tilde{L}_{n+1}(t) - KD_{n+2}\tilde{\Omega}_{n+2}(t) = D_{n+2}f(t) - KD_{n+2}\varphi_{n+2}(t).$$

Тогда $D_{n+2}f(\xi) - KD_{n+2}\varphi_{n+2}(\xi) = 0$, откуда $K = \dfrac{D_{n+2}(f;\xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2};\xi)}$. Следовательно

$$f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+2}(f;\xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2};\xi)}\tilde{\Omega}_{n+2}(x),$$

где $\xi \in T$. Теорема 2 доказана.

Введем обозначения. Пусть $M_{n+2} = \max\limits_{x\in T}\left|D_{n+2}f(x)\right|$, $B_{n+2} = \min\limits_{x\in T}\left|D_{n+2}\varphi_{n+2}(x)\right|$, $C_{n+2} = \max\limits_{x\in T}\left|\tilde{\Omega}_{n+2}(x)\right|$. Справедлива оценка погрешности

$$\left|f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)\right| \leq \frac{M_{n+2}}{B_{n+2}}C_{n+2}.$$

Рассмотрим частный случай формулы (7) при $n = 1$. Многочлен $\tilde{L}_2(x)$ в данном случае имеет вид

$$\tilde{L}_2(x) = L_1(x) + \frac{\Omega_2(x)D_2(f;x_j)}{D_2(\varphi_2;x_j)}, \tag{12}$$

где

$$L_1(x) = \frac{\left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x)\right)f(x_0) - \left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_0) - \varphi_0(x_0)\varphi_1(x)\right)f(x_1)}{\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_0)},$$

$$\Omega_2(x) = \varphi_2(x) - \frac{\left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x)\right)\varphi_2(x_0) - \left(\varphi_0(x)\varphi_1(x_0) - \varphi_0(x_0)\varphi_1(x)\right)\varphi_2(x_1)}{\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_0)},$$

а дифференциальный оператор $D_2f(x)$ задается формулой

$$D_2 f(x)=\frac{1}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x)-\varphi'\varphi_0(x)\varphi_1(x)}\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x) & f(x)\\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & f'(x)\\ \varphi_0''(x) & \varphi_1''(x) & f''(x)\end{vmatrix}=$$

$$=f''(x)-\frac{\big(\varphi_0(x)\varphi_1''(x)-\varphi_0''(x)\varphi_1(x)\big)f'(x)-\big(\varphi_0'(x)\varphi_1''(x)-\varphi_0''(x)\varphi_1'(x)\big)f(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x)-\varphi_0'(x)\varphi_1(x)}. \qquad (13)$$

Нетрудно проверить, что для (12) выполняются интерполяционные условия $\tilde{L}_2(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,1)$; $D_2(\tilde{L}_2;x_j)=D_2(f;x_j)$.

Получим выражение для оператора $D_2 f(x)$, используя формулу (6)

$$\begin{aligned}D_2 f(x)&=\big(D-b_1(x)\big)\big(D-b_0(x)\big)f(x)=\big(D-b_1(x)\big)\big(f'(x)-b_0(x)f(x)\big)=\\&=f''(x)-\big(b_0(x)+b_1(x)\big)f'(x)+\big(b_0(x)b_1(x)-b_0'(x)\big)f(x).\end{aligned} \qquad (14)$$

Далее, так как

$$b_0(x)=\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)},\quad b_1(x)=\frac{\big(D_1\varphi_1(x)\big)'}{D_1\varphi_1(x)}=\frac{\big(\varphi_1'(x)-b_0(x)\varphi_1(x)\big)'}{\varphi_1'(x)-b_0(x)\varphi_1(x)}=$$

$$=\frac{\varphi_1''(x)\varphi_0^2(x)-\varphi_0''(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)+\varphi_0'(x)\varphi_0'(x)\varphi_1(x)-\varphi_0'(x)\varphi_1'(x)\varphi_0(x)}{\varphi_0(x)\big(\varphi_1'(x)\varphi_0(x)-\varphi_0'(x)\varphi_1(x)\big)},$$

то

$$b_0(x)+b_1(x)=\frac{\varphi_0(x)\varphi_1''(x)-\varphi_0''(x)\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x)-\varphi_0'(x)\varphi_1(x)}, \qquad (15)$$

$$b_0(x)b_1(x)-b_0'(x)=\frac{\varphi_0'(x)\varphi_1''(x)-\varphi_0''(x)\varphi_1'(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x)-\varphi_0'(x)\varphi_1(x)}. \qquad (16)$$

Подставляя (15), (16) в (14), получим (13).

Тригонометрический вариант формулы (7). Рассмотрим частный случай формулы (7) при $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_{2k-1}(x)=\sin kx,\ \varphi_{2k}(x)=\cos kx,\ k=1,2,\ldots,n.$ Дифференциальный оператор (4) в этом случае задается равенством

$$D_{2n+1}f(x)=W_{2n}^{-1}(1,\sin x,\cos x,\ldots,\sin nx,\cos nx;\ x)W_{2n+1}(1,\sin x,\cos x,\ldots,\sin nx,\cos nx,f(x);\ x), \qquad (17)$$

где $W_{2n}(\cdot;x)$ и $W_{2n+1}(\cdot;x)$ – вронскианы для указанных систем функций.

Рассмотрим оператор

$$D_{2n+1}f(x)=\big(D-n\,\mathrm{tg}(nx)\big)\big(D+n\,\mathrm{tg}(nx)\big)\cdots\big(D-\mathrm{tg}\,x\big)\big(D+\mathrm{tg}\,x\big)Df(x),\ D=\frac{d}{dx}, \qquad (18)$$

заданный в форме (6). Здесь $b_0(x)=0,\ b_{2k-1}(x)=-k\,\mathrm{tg}\,kx,\ b_{2k}(x)=k\,\mathrm{tg}\,kx,\ k=1,2,\ldots,n.$ Далее так как

$$\begin{aligned}(D-k\,\mathrm{tg}\,kx)(D+k\,\mathrm{tg}\,kx)f(x)&=f''(x)-k\,\mathrm{tg}\,kx\,f'(x)+\big(k\,\mathrm{tg}\,kx\,f(x)\big)'-k^2\,\mathrm{tg}^2\,kx\,f(x)=\\&=f''(x)+k^2f(x)=(D^2+k^2)f(x),\end{aligned}$$

то (18) можно записать в более простой форме

$$D_{2n+1}f(x)=(D^2+n^2)(D^2+(n-1)^2)\cdots(D^2+1^2)Df(x),\ D=\frac{d}{dx}. \qquad (19)$$

Оператор (19) является перестановочным, поэтому нетрудно показать, что функции $1,\ \sin x,\ \cos x,\ldots,\sin nx,\ \cos nx$ являются решениями соответствующего дифференциального уравнения

$$D_{2n+1}f(x)=0. \qquad (20)$$

Очевидно, что эту же фундаментальную систему решений имеет уравнение (20), где оператор $D_{2n+1} f(x)$ определяется формулой (17). Так как оба линейных однородных дифференциальных уравнения имеют общую фундаментальную систему решений, то операторы (17) и (19) тождественны между собой [7, с. 190].

Многочлен $L_{2n}(x)$ в данном случае принимает вид

$$L_{2n}(x) = H_n(x) = -\frac{1}{\tilde{g}_{2n}} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \sin x_0 & \cdots & \sin x_{2n} & \sin x \\ \cos x_0 & \cdots & \cos x_{2n} & \cos x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin nx_0 & \cdots & \sin nx_{2n} & \sin nx \\ \cos nx_0 & \cdots & \cos nx_{2n} & \cos nx \\ f(x_0) & \cdots & f(x_{2n}) & 0 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

где $\tilde{g}_{2n} = g_{2n}(1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx;\ x_0, x_1, \ldots, x_{2n})$.

Тригонометрический интерполяционный многочлен

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2} \cdots \sin\frac{x-x_{k-1}}{2} \sin\frac{x-x_{k+1}}{2} \cdots \sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_k-x_0}{2} \cdots \sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2} \sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2} \cdots \sin\frac{x_k-x_{2n}}{2}} f(x_k), \tag{22}$$

совпадает с (21), так как оба многочлена удовлетворяют лагранжевым интерполяционным условиям и имеют степень не выше n [8, с. 18, 124].

По определению

$$\Omega_{2n+1}(x) = \frac{1}{\tilde{g}_{2n}} g_{2n+1}(1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin(n+1)x;\ x_0, x_1, \ldots, x_{2n}, x). \tag{23}$$

Тригонометрический многочлен (23) степени не выше $n+1$ имеет нулями точки $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, следовательно, он представим в виде

$$\Omega_{2n}(x) = \left(\alpha \sin\frac{x}{2} + \beta \cos\frac{x}{2}\right) \prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{x-x_k}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \tag{24}$$

Л е м м а. *Справедливо тригонометрическое тождество*

$$\prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{x-x_k}{2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sin\frac{1}{2}\big((2n+1)x - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{2n})\big) + \tilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x), \tag{25}$$

где $\tilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка $\frac{2n-1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$\sin\frac{x-x_0}{2} \sin\frac{x-x_1}{2} \sin\frac{x-x_2}{2} = \frac{1}{2} \sin\frac{x-x_0}{2} \times$$

$$\times \left(\cos\frac{x_2-x_1}{2} - \cos\frac{1}{2}\big(2x-(x_1+x_2)\big)\right) = -\frac{1}{4} \sin\frac{1}{2}\big(3x-(x_0+x_1+x_2)\big) + T_{\frac{1}{2}}(x).$$

Предположим, что соотношение (25) верно при $n = m$ и покажем, что оно справедливо также и при $n = m+1$

$$\prod_{k=0}^{2m+2} \sin\frac{x-x_k}{2} = \left(\frac{(-1)^m}{2^{2m}} \sin\frac{1}{2}\big((2m+1)x - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{2m})\big) + \tilde{T}_{\frac{2m-1}{2}}(x)\right) \times$$

$$\times\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x_{2m+2}-x_{2m+1}}{2}-\cos\frac{1}{2}\big(2x-(x_{2m+1}+x_{2m+2})\big)\right)=$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m+2}}\left(\sin\frac{1}{2}\big((2m+3)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2m+2})\big)+\tilde{T}_{\frac{2m+1}{2}}(x).\right.$$

Лемма доказана.

Определим значения α и β в (24). Раскладывая (23) по элементам первого столбца можно показать, что $\Omega_{2n+1}(x)$ имеет вид

$$\Omega_{2n+1}(x)=\sin(n+1)x+\tilde{T}_n(x), \tag{26}$$

где $\tilde{T}_n(x)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше n. С учетом (24)–(26) будем иметь

$$\sin(n+1)x+\tilde{T}_n(x)=\left(\alpha\sin\frac{x}{2}+\beta\cos\frac{x}{2}\right)\left(\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sin\frac{1}{2}\big((2n+1)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\big)+\tilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x)\right)=$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\left(\left[\alpha\cos\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})+\beta\sin\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]\cos(n+1)x+\right.$$
$$\left.+\left[\alpha\sin\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})-\beta\cos\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]\sin(n+1)x\right)+\tilde{T}_n(x). \tag{27}$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos(n+1)x$ и $\sin(n+1)x$ в левой и правой частях последнего равенства, получим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\left[\alpha\cos\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})+\beta\sin\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]=0,\\[2ex] \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\left[\alpha\sin\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})-\beta\cos\dfrac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\right]=1,\end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\alpha=(-1)^{n+1}2^{2n+1}\sin\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n}),\ \beta=(-1)^n2^{2n+1}\cos\frac{1}{2}(x_0+x_1+\ldots+x_{2n}). \tag{28}$$

Подставляя (28) в (24) и проводя преобразования, получим

$$\Omega_{2n+1}(x)=(-1)^n2^{2n+1}\cos\frac{1}{2}\big(x+x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\big)\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

Вычислим далее выражение $D_{2n+1}(\varphi_{2n+1};x_j)$:

$$D_{2n+1}\varphi_{2n+1}(x)=(D^2+n^2)(D^2+(n-1)^2)\cdots(D^2+1^2)D\sin(n+1)x.$$

Так как

$$D\sin(n+1)x=(n+1)\cos(n+1)x,$$
$$(D^2+k^2)\cos(n+1)x=-\big((n+1)^2-k^2\big)\cos(n+1),\ k=1,2,\ldots,n,$$

то

$$D_{2n+1}(\varphi_{2n+1};x_j)=D_{2n+1}\sin(n+1)x\big|_{x=x_j}=(-1)^n(2n+1)!\cos(n+1)x_j. \tag{29}$$

Таким образом, многочлен (7) в данном случае имеет вид

$$\tilde{L}_{2n+1}(x)=T_{n+1}(x)=H_n(x)+\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{D_{2n+1}(f;x_j)}{\cos(n+1)x_j}\cos\frac{1}{2}\left(x+x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}, \quad (30)$$

где $H_n(x)$ определяется формулой (22). Для него выполняются интерполяционные условия

$$T_{n+1}(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\ldots,2n);\quad D_{2n+1}(T_{n+1};x_j)=D_{2n+1}(f;x_j). \quad (31)$$

В [1, 2] построен и исследован аналогичного типа тригонометрический интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа

$$\overline{T}_{n+1}(x)=H_n(x)+\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\overline{\Omega}_{n+1}(x)}{\cos\frac{1}{2}\left((2n+2)x_j-x_0-\sum\limits_{k=0}^{2n}x_k\right)}D_{2n+1}(f;x_j), \quad (32)$$

где

$$H_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{l_n(x)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)l_n'(x_k)}f(x_k),$$

$$l_n(x)=\sin\frac{1}{2}(x-x_0)\sin\frac{1}{2}(x-x_1)\cdots\sin\frac{1}{2}(x-x_{2n}),\qquad \overline{\Omega}_{n+1}(x)=\sin(x-x_0)\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{1}{2}(x-x_k), \quad (33)$$

удовлетворяющий условиям вида (31). Здесь дифференциальный оператор $D_{2n+1}f(x)$ также определяется формулой (19), а многочлен (33) тождественен (22) [8, с. 18, 125]. В [3] построены матричные аналоги формулы (32). Оба тригонометрических многочлена (30) и (32) имеют степень не выше $n+1$, но отличаются слагаемым, содержащим значение дифференциального оператора.

Рассмотрим параметрическое семейство тригонометрических интерполяционных многочленов степени не выше $n+1$ вида

$$T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)=H_n(x)+\frac{\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta}(x)D_{2n+1}(f;x_j)}{D_{2n+1}(\Omega_{2n}^{\alpha,\beta};x_j)}, \quad (34)$$

где $\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta}(x)$ задается соотношением (24), удовлетворяющих интерполяционным условиям (31), частными случаями которого являются формулы (30) и (32). Многочлен (30) получается при значениях α и β, определенных равенствами (28), а полином (32) при $\tilde{\alpha}=2\sin\frac{x_0}{2}$, $\tilde{\beta}=2\cos\frac{x_0}{2}$.

Действительно, в данном случае $\Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)=\overline{\Omega}_{n+1}(x)$ имеет вид

$$\Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)=2\cos\frac{x-x_0}{2}\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}=\left(2\sin\frac{x_0}{2}\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x_0}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

Кроме того, используя лемму, можно показать, что

$$\Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sin\left((n+1)x-\frac{1}{2}\left(2x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\right)+\widehat{T}_n(x), \quad (35)$$

где $\widehat{T}_n(x)$ – тригонометрический многочлен степени не выше n.

Из (29) и (35) следует, что

$$D_{2n+1}\left(\Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}};x_j\right)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}D_{2n+1}\sin\left((n+1)x-\frac{1}{2}\left(2x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\right)\Bigg|_{x=x_j}=$$

$$=\frac{(2n+1)!}{2^{2n}}\cos\frac{1}{2}\left((2n+2)x_j-\left(2x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\right)\right). \quad (36)$$

Подставляя (36) в (34), получим формулу (32).

Вычислим значение оператора $D_{2n+1}(\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta};x_j)$ в случае произвольно заданных параметров α и β, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Аналогично (29) можно показать, что выполняется тождество

$$D_{2n+1}\cos(n+1)x=(-1)^{n+1}(2n+1)!\sin(n+1)x. \tag{37}$$

Представляя $\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta}(x)$ в виде правой части (27) и используя соотношения (29), (37), будем иметь

$$D_{2n+1}(\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta};x_j)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\Bigg(\alpha\sin\frac{1}{2}\big((2n+2)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\big)+$$
$$+\beta\cos\frac{1}{2}\big((2n+2)x-(x_0+x_1+\ldots+x_{2n})\big)\Bigg). \tag{38}$$

Подставляя (38) в (34), получим явное выражение для тригонометрического интерполяционного многочлена Эрмита – Биркгофа степени не выше $n+1$, удовлетворяющего условиям (31).

Случай чебышевской экспоненциальной системы функций. Рассмотрим еще один частный случай формулы (7) при $\varphi_k(x)=e^{\lambda_k x}$, $k=0,1,\ldots,n+1$, $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{n+1}$. Тогда дифференциальный оператор $D_{n+1}f(x)$ примет вид

$$D_{n+1}f(x)=(D-\lambda_n)\cdots(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)Df(x),\quad D=\frac{d}{dx}. \tag{39}$$

Так как

$$D_{n+1}\varphi_{n+1}(x)=(D-\lambda_n)\cdots(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)De^{\lambda_{n+1}x}=\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)e^{\lambda_{n+1}x},$$

то соответственно интерполяционный многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(x)=L_n(x)+\frac{e^{-\lambda_{n+1}x_j}\Omega_{n+1}(x)D_{n+1}(f;x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}, \tag{40}$$

где

$$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_n(1,e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\ldots,e^{\lambda_n x};\,x_0,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n,x)f(x_i),$$
$$\Omega_n(x)=\frac{1}{\tilde{g}_n}g_{n+1}(1,e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\ldots,e^{\lambda_{n+1}x};\,x_0,x_1,\ldots,x_n,x),$$

удовлетворяет условиям вида (8), где дифференциальный оператор $D_{n+1}f(x)$ определяется равенством (39). Такого вида многочлен был построен и исследован в [9, 10] без явного указания выражений для $L_n(x)$ и $\Omega_{n+1}(x)$; в общем случае он приведен в [1, 2]. Получены частные [3, 5] и общий [4] случаи матричного аналога формулы (40). Интерполяционные многочлены вида (7) по системам двух видов рациональных функций построены и исследованы в [1, 2], их матричные аналоги получены в [4].

Заключение. В данной работе получены следующие новые результаты: для функции скалярного аргумента построен интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа по чебышевской системе общего вида; получены явное представление и оценка погрешности интерполирования; рассмотрены частные случаи для тригонометрических и экспоненциальных систем функций; построено параметрическое семейство тригонометрических интерполяционных многочленов одинаковой степени.

Литература

1. *Худяков А. П.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 29–36.
2. *Худяков А. П.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 1. С. 13–21.
3. *Yanovich L. A., Hudyakov A. P.* // J. Numer. Appl. Math. 2011. № 2 (105). P. 136–147.

4. *Худяков А. П., Янович Л. А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 2. С. 103–114.
5. *Янович Л. А., Худяков А. П.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 1. С. 16–22.
6. *Хаусхолдер А. С.* Основы численного анализа. М., 1956.
7. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1959.
8. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск, 1968.
9. *Худяков А. П.* Некоторые задачи теории интерполирования. Saarbrücken, Deutschland, 2014.
10. *Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A.* Methods of Operator Interpolation. Киев, 2010. Т. 83.

A. P. HUDYAKOV, L. A. YANOVICH

GENERALIZED INTERPOLATION FORMULAS OF HERMITE – BIRKHOFF TYPE FOR THE CASE OF CHEBYSHEV SYSTEMS OF FUNCTIONS

Summary

The generalized interpolation formula of Hermite – Birkhoff type with respect to the arbitrary Chebyshev system of functions is constructed. Theorem on the satisfaction of the interpolation conditions is proved. A class of polynomials, for which the interpolation formula is exact, is determined. The error estimate of the obtained formula is constructed. The particular cases of the interpolation formula for the systems of trigonometric and exponential functions are considered.