ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 536.21+536.24
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-435-446

Поступила в редакцию 11.07.2021
Received 11.07.2021

А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

К АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Аннотация. Предлагаются два аналитических метода расчета стационарного температурного поля в круговой цилиндрической оболочке. Выполнен анализ их эффективности в смысле точности в сопоставлении с классическим подходом, основанным на применении бесселевых функций. Предлагаемые аналитические алгоритмы содержат сравнительно простые вычислительные операции; так как специальные функции в них не применяются, они могут быть использованы при решении широкого круга задач.

Ключевые слова: уравнение стационарной теплопроводности, алгоритм построения решения

Для цитирования. Кашпар, А. И. К аналитическим методам расчета стационарного температурного поля в круговой цилиндрической оболочке / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 435–446. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-435-446

Alexandr I. Kashpar, Valery N. Laptinskiy

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus

ON ANALYTICAL METHODS FOR CALCULATING THE STEADY-STATE TEMPERATURE FIELD IN A CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL

Abstract. The present paper presents two analytical methods for calculating the steady-state temperature field in a circular cylindrical shell. The effectiveness of the methods in terms of accuracy in comparison with the classical approach, based on Bessel functions, is analyzed. The proposed analytical algorithms contain relatively simple computational operations. Since they do not use special functions, the algorithms can be used to solve a wide range of problems.

Keywords: steady-state heat conduction equation, solution algorithm

For citation. Kashpar A. I., Laptinskiy V. N. On analytical methods for calculating the steady-state temperature field in a circular cylindrical shell. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 435–446 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-435-446

Введение. В работе [1] (см. также [2]) по методу [3] разработаны алгоритмы построения решения общей двухточечной краевой задачи типа Валле-Пуссена и дано их применение [4] для решения задачи теплофизики [5, 6]. Данная работа подготовлена на основе результатов, изложенных в [1, 4]. В прикладном аспекте она является продолжением и развитием [2]. Выполнен сравнительный анализ используемых алгоритмов. В предлагаемых алгоритмах используются достаточно [6] простые вычислительные операции, поэтому они применимы к широкому кругу задач. В [4] это проиллюстрировано на простейших модельных задачах (одно- и двумерной).

1. Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим задачу об определении распределения температуры в круговой цилиндрической оболочке (стенке), имеющей достаточно большую длину, чтобы теплоотводом с торцов можно было пренебречь, при этом граничные условия не зависят от полярного угла φ и продольной координаты *z* (см., напр., [5, с. 36]). Поле температур в стационарном случае изменяется только по радиусу *r*. Изучим температурное поле в цилиндрической стенке с постоянно действующим внутренним источником теплоты в случае, когда его удельная мощность − линейная функция температуры вида $q_V = w_0(1 + bT)$.

Соответствующая краевая задача для уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид [6, с. 29]

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{w_0}{\lambda_0}(1+bT)=0;\quad T(r_1)=\tilde{T}_1,\quad T(r_2)=\tilde{T}_2,\quad 0<r_1<r_2, \tag{1}$$

где w_0 − удельная мощность постоянно действующего внутреннего источника теплоты при $t = 0$ °C, b − экспериментальная постоянная, λ_0 − коэффициент теплопроводности, r_1 и r_2 − внутренний и внешний радиусы стенки.

Наряду с этой будем рассматривать задачу с параметром λ:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\lambda\left(\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{w_0 b}{\lambda_0}T\right)+\frac{w_0}{\lambda_0}=0;\quad T(r_1,\lambda)=\tilde{T}_1,\quad T(r_2,\lambda)=\tilde{T}_2,\quad 0<r_1<r_2. \tag{2}$$

Задачу (2) сведем к эквивалентной системе

$$\frac{dT}{dr}=Y, \tag{3}$$

$$\frac{dY}{dr}=-\lambda\left[\frac{1}{r}Y+\frac{w_0}{\lambda_0}(1+bT)\right], \tag{4}$$

$$T(r_1,\lambda)=\tilde{T}_1,\quad T(r_2,\lambda)=\tilde{T}_2,\quad 0<r_1<r_2. \tag{5}$$

Будем решать задачу охлаждения стенки: $\tilde{T}_2\le T(r,\lambda)\le\tilde{T}_1$. Этим ограничением мы исключаем случай, когда при определенных значениях исходных параметров задачи стенка станет нагреваться, что чревато ее возможным разрушением при соответствующих температурных режимах [4].

При получении выражений для конкретных вычислений возьмем следующие исходные данные в системе СИ:

$$\lambda_0=47{,}4,\quad w_0=1000,\quad b=0{,}1,\quad r_1=1,\quad r_2=1{,}1,\quad \tilde{T}_1=100,\quad \tilde{T}_2=10. \tag{6}$$

Имеем задачу Валле-Пуссена [1, 2], при этом в соответствии с обозначениями, принятыми в [1, 2], полагаем

$$F(t)=-w_0/\lambda_0,\ \ A(t)=0,\ \ B(t)=0,\ \ A_1(t)=w_0b/\lambda_0,\ \ A_2(t)=1/r,\ \ B_i(t)=0\quad (i=1,2),$$

$$\omega=r_2-r_1=0{,}1,\ \ \alpha=0,\ \ \beta=0,\ \ \alpha_1=w_0b/\lambda_0,\ \ \beta_1=0,\ \ \alpha_2=1,\ \ \beta_2=0,\ \lambda_U=1,\ \lambda_V=1,\ \ \gamma=10,\ \ \varepsilon=|\lambda|,$$

$$a_1=\frac{\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1)=0{,}00734,\ \ b_1=\gamma\frac{\omega^3}{3}\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2)=0{,}00333,$$

$$a_2=\frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1)=0{,}11,\ \ b_2=\frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2)=0{,}05.$$

Решение задачи (3)–(5) сначала будем строить по алгоритму

$$T^I(r,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k T^I{}_k(r),\quad Y^I(r,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k Y^I{}_k(r), \tag{7}$$

где

$$T_0^I(r)=\tilde{T}_1+\int_{r_1}^{r}Y_0^I(s)ds,\qquad Y_0^I(r)=-q\int_{r_1}^{r_2}\varphi(r,s)ds+\frac{\tilde{T}_2-\tilde{T}_1}{r_2-r_1},$$

$$T_{k+1}^I(r)=\int_{r_1}^{r} Y_{k+1}^I(s)ds, \qquad Y_{k+1}^I(r)=-\int_{r_1}^{r_2}\varphi(r,s)\left(pT_k^I(s)+\frac{1}{s}Y_k^I(s)\right)ds,$$

при этом

$$p=\frac{w_0 b}{\lambda_0}, \quad q=\frac{w_0}{\lambda_0}, \quad \varphi(r,s)=\begin{cases}\dfrac{s-r_1}{r_2-r_1}, & r_1\le s\le r\le r_2,\\ \dfrac{s-r_2}{r_2-r_1}, & r_1\le r< s\le r_2;\end{cases}$$

здесь для различения алгоритмов будем использовать в решениях соответствующие верхние индексы.

Затем воспользуемся алгоритмом решения задачи (1), основанным на введении параметра λ следующим образом при тех же граничных условиях:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\lambda pT+q=0, \quad T(r_1)=\tilde{T}_1, \quad T(r_2)=\tilde{T}_2, \quad 0<r_1<r_2. \tag{8}$$

Задача (8) (точнее, соответствующая ей задача типа (3)–(5)) эквивалентна интегральному уравнению

$$T(r)=\frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\tilde{T}_1+\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\tilde{T}_2+\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{s}\left(\int_{r_1}^{s}\sigma\big(\lambda pT(\sigma)+q\big)d\sigma\right)ds-$$
$$-\int_{r_1}^{r}\frac{1}{s}\left(\int_{r_1}^{s}\sigma\big(\lambda pT(\sigma)+q\big)d\sigma\right)ds. \tag{9}$$

Очевидно, из (9) следует соотношение

$$Y(r)\equiv\frac{dT}{dr}=\frac{\tilde{T}_2-\tilde{T}_1}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}+\frac{1}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{s}\left(\int_{r_1}^{s}\sigma\big(\lambda pT(\sigma)+q\big)d\sigma\right)ds-\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}s(\lambda pT+q)ds.$$

Решения задачи (9) при λ = 1 построим в виде рядов типа (7):

$$\begin{aligned}T^{II}(r)&=T_0^{II}(r)+T_1^{II}(r)+T_2^{II}(r)+\ldots,\\ Y^{II}(r)&=Y_0^{II}(r)+Y_1^{II}(r)+Y_2^{II}(r)+\ldots,\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$T_0^{II}(r)=\frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\tilde{T}_1+\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\tilde{T}_2+\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{ds}{s}\int_{r_1}^{s}\sigma q d\sigma-\int_{r_1}^{r}\frac{ds}{s}\int_{r_1}^{s}\sigma q d\sigma,$$

$$Y_0^{II}(r)=\frac{\tilde{T}_2-\tilde{T}_1}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}+\frac{1}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{ds}{s}\int_{r_1}^{s}\sigma q d\sigma-\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}sqds,$$

$$T_{k+1}^{II}(r)=\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{ds}{s}\int_{r_1}^{s}\sigma p T_k^{II}(\sigma)d\sigma-\int_{r_1}^{r}\frac{ds}{s}\int_{r_1}^{s}\sigma p T_k^{II}(\sigma)d\sigma,$$

$$Y_{k+1}^{II}(r)=\frac{1}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{ds}{s}\int_{r_1}^{s}\sigma p T_k^{II}(\sigma)d\sigma-\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r}sp T_k^{II}(s)ds. \qquad (11)$$

Очевидно, полученные решения задач (2), (8) при $\lambda = 1$ дают решение задачи (1).

2. Обсуждение результатов, численные оценки. Для задачи (2), (8) при одинаковых исходных данных (6) и при $\lambda = 1$ получим

$$Y_0^I(r)=-\frac{w_0}{\lambda_0}\int_{r_1}^{r_2}\varphi(r,s)ds+\frac{\tilde{T}_2-\tilde{T}_1}{r_2-r_1}=-21{,}097046r-877{,}848101,$$

$$T_0^I(r)=\tilde{T}_1+\int_{r_1}^{r}Y_0^I(s)ds=-10{,}548523r^2-877{,}848101r+988{,}396624,$$

$$Y_1^I(r)=-\int_{r_1}^{r_2}\varphi(r,s)\left(\frac{w_0 b}{\lambda_0}T_0^I(s)+\frac{1}{s}Y_0^I(s)\right)ds=7{,}418089r^3+926{,}000107r^2-$$
$$-2064{,}127900r+877{,}848101\cdot\ln r+1094{,}542309,$$

$$T_1^I(r)=\int_{r_1}^{r}Y_1^I(s)ds=1{,}854522r^4+308{,}666702r^3-1032{,}063950r^2+$$
$$+877{,}848101r\cdot\ln r+216{,}694208r+504{,}848517.$$

Найдем приближенные решения задачи (1) на основе первых двух слагаемых в (7):

$$T(r)\approx\tilde{T}_1^I(r)=T_0^I(r)+T_1^I(r)=1{,}854224r^4+308{,}666702r^3-1042{,}612473r^2-$$
$$-661{,}153893r+877{,}848101r\ln r+1493{,}245142. \qquad (12)$$

Для второго алгоритма получим из (10)

$$T_0^{II}(r)=1049{,}20587\ln\left(\frac{1{,}1}{r}\right)+116{,}54154\ln r-5{,}27426\mathrm{r}^2+5{,}27426,$$

$$Y_0^{II}(r)=-932{,}66433\frac{1}{r}-10{,}548523r;$$

$$T_1^{II}(r)=0{,}69545r^4+491{,}91157r^2\ln r-547{,}43597r^2+607{,}58398\cdot\ln r+546{,}740521,$$

$$Y_1^{II}(r)=2{,}78178r^3+983{,}82313r\cdot\ln r-602{,}96037r+607{,}58398\frac{1}{r};$$

$$T(r)\approx\tilde{T}_1^{II}(r)=T_0^{II}(r)+T_1^{II}(r)=0{,}69545r^4+491{,}91157r^2\ln r-552{,}71023r^2-$$
$$-325{,}08035\cdot\ln r+652{,}01478. \qquad (13)$$

Сравним полученные приближенные решения (12) и (13) с точным решением задачи (1) [6, с. 29]:

$$T(r)=c_1J_0\left(r\sqrt{w_0b/\lambda_0}\right)+c_2Z_0\left(r\sqrt{w_0b/\lambda_0}\right)-1/b, \qquad (14)$$

где J_0, Z_0 − функции Бесселя I и II родов нулевого порядка. Классический метод бесселевых функций, по-видимому, является наиболее востребованным в задачах определенного типа ([5–7] и др.).

Для получения значений J_0, Z_0 воспользуемся специальными функциями, встроенными в Mathcad. Используя исходные данные (6) в (4), составим систему уравнений:

$$0,538174c_0 + 0,362111c_1 - 10 = 100,$$
$$0,456695c_0 + 0,419636c_1 - 10 = 10.$$

Решая полученную систему линейных уравнений, получим

$$c_1 = 643,660798, \quad c_2 = -652,843422.$$

Расчет табличных максимальных относительных погрешностей в (12), (13) для обоих алгоритмов дал следующий результат:

$$\sigma_1^I = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \widetilde{T_1^I}(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0,018\,\%, \quad \sigma_1^{II} = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \widetilde{T_1^{II}}(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0,00068\,\%,$$

при этом оценки абсолютных погрешностей приближенных и точного решений характеризуются неравенствами

$$\max_{1 \le r \le 1,1} \left| T(r) - \widetilde{T_1^I}(r) \right| \le 0,00703, \quad \max_{1 \le r \le 1,1} \left| T(r) - \widetilde{T_1^{II}}(r) \right| \le 0,00031;$$

теоретическая оценка погрешности, полученная на основе общей оценки [1], имеет вид $\left| T(r) - \widetilde{T}_1(r) \right| \le 0,223.$

В прикладных задачах теплофизики часто возникает необходимость вычисления величины $Y(r) = dT(r)/dr.$ Для наших исходных данных точное выражение для $Y(r)$ имеет вид

$$Y(r) = -934,905874J_1(1,452482r) + 948,243472Z_1(1,452482r), \tag{15}$$

где J_1, Z_1 − функции Бесселя I и II родов первого порядка.

Соотношения для $\widetilde{Y}_1^I(r)$, $\widetilde{Y}_1^{II}(r)$ имеют вид

$$Y(r) \approx \widetilde{Y}_1^I(r) = Y_0^I(r) + Y_1^I(r) = 7,418089r^3 + 926,00011r^2 - 2082,224946r + \\ +877,848101\ln r + 216,694208, \tag{16}$$

$$Y(r) \approx \widetilde{Y}_1^{II}(r) = Y_0^{II}(r) + Y_1^{II}(r) = 2,78178r^3 + 983,82313r\ln r - \\ -613,50889r - 325,08035\frac{1}{r}. \tag{17}$$

Максимальные относительные погрешности для $\widetilde{Y}_1^I(r), \widetilde{Y}_1^{II}(r)$:

$$\delta_1^I = \max_i \left| \frac{Y(r_i) - \widetilde{Y}_1^I(r_i)}{Y(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0,0731\,\%,$$

$$\delta_1^{II} = \max_i \left| \frac{Y(r_i) - \widetilde{Y}_1^{II}(r_i)}{Y(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0,0011\,\%;$$

оценки на основе (15)−(17) абсолютных погрешностей приближенных и точного значений производных составляют

$$\max_{1\le r\le 1,1}\left|Y(r)-\widetilde{Y}_1^{I}(r)\right|\le 0,295,\quad \max_{1\le r\le 1,1}\left|Y(r)-\widetilde{Y}_1^{II}(r)\right|\le 0,011;$$

соответствующая теоретическая оценка, полученная на основе [1], имеет вид $\left|Y(r)-\widetilde{Y}_1(r)\right|\le 3,34$.

Для улучшения точности приближенных решений задачи (1), полученных обоими способами, найдем третьи слагаемые.

Для первого алгоритма имеем

$$Y_2^I(r)=-\int_{r_1}^{r_2}\varphi(r,s)\left(\frac{w_0 b}{\lambda_0}T_1^I(s)+\frac{1}{s}Y_1^I(s)\right)ds=-0,782499r^5-162,798894r^4+$$
$$+723,310672r^3-228,580388r^2+999,046639\mathrm{r}-926,000107\mathrm{r}^2\ln r-$$
$$-438,924051\cdot\ln^2 r-1094,542309\ln r-1330,877402,$$

$$T_2^I(r)=\int_{r_1}^{r}Y_2^I(s)ds=-0,130416r^6-32,559779r^5+180,827668r^4+26,695438r^3+$$
$$+499,523320r^2-1114,183194r+26,695438r^3\ln r-216,694208r\ln r-$$
$$-438,924051r\ln^2 r+439,826964;$$

$$T(r)\approx\widetilde{T_2^I}(r)=T_0^I(r)+T_1^I(r)+T_2^I(r)=-0,130416r^6-32,559779r^5+182,682190r^4+$$
$$+335,362140r^3-543,089153r^2-1775,337088r-308,666702r^3\ln r-$$
$$-661,153893r\ln r-438,924051r\ln^2 r+1933,072105, \tag{18}$$

$$Y(r)\approx\widetilde{Y_2^I}(r)=Y_0^I(r)+Y_1^I(r)+Y_2^I(r)=-0,782499r^5-162,798894r^4+730,728761r^3+$$
$$+697,419719r^2-1086,178307r-926,000107r^2\ln r-438,924051\ln^2 r-$$
$$-216,694208\ln r-1114,183194. \tag{19}$$

Аналогично для второго алгоритма получим

$$T_2^{II}(r)=-0,0407616r^6-64,86176r^4\ln r+104,61389r^4-320,45569r^2\ln r+$$
$$+32,09043r^2-97,06365\ln r-136,66357,$$

$$Y_2^{II}(r)=-0,24453r^5-259,44703r^3\ln r+353,59381r^3-$$
$$-256,27482r-640,91138r\ln r-97,06365\frac{1}{r};$$

$$T(r)\approx\widetilde{T_2^{II}}(r)=T_0^{II}(r)+T_1^{II}(r)+T_2^{II}(r)=-0,040762r^6-64,86176r^4\ln r+105,30934r^4+$$
$$+171,45588r^2\ln r-520,6198r^2+627,0619\ln r+1049,20587\frac{1}{r}+415,35121, \tag{20}$$

$$Y(r)\approx\widetilde{Y_2^{II}}(r)=Y_0^{II}(r)+Y_1^{II}(r)+Y_2^{II}(r)=-0,244531r^5-259,44703r^3\ln r+$$
$$+353,37559r^3-869,78371r+342,91176r\ln r-422,14399\frac{1}{r}. \tag{21}$$

Расчет на основе (18), (20) табличных относительных погрешностей дал следующий результат:

$$\sigma_2^I=\max_i\left|\frac{T(r_i)-\widetilde{T_2^I}(r_i)}{T(r_i)}\right|\cdot 100\,\%=0,00037\,\%,\quad \sigma_2^{II}=\max_i\left|\frac{T(r_i)-\widetilde{T_2^{II}}(r_i)}{T(r_i)}\right|\cdot 100\,\%=0,0000015\,\%.$$

Вычислим на основе (19), (21) максимальные табличные относительные погрешности для $\widetilde{Y_2^I}(r)$ и $\widetilde{Y_2^{II}}(r)$:

$$\delta_2^I = \max_i \left| \frac{Y(r_i) - \widetilde{Y_2^I}(r_i)}{Y(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0{,}00061\,\%, \quad \delta_2^I = \max_i \left| \frac{Y(r_i) - \widetilde{Y_2^I}(r_i)}{Y(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0{,}000002\,\%.$$

Расчетные табличные оценки абсолютных погрешностей приближенных решений составляют

$$\max_{1 \le r \le 1,1} \left| T(r) - \widetilde{T_2^I}(r) \right| \le 0{,}00017, \quad \max_{1 \le r \le 1,1} \left| Y(r) - \widetilde{Y_2^I}(r) \right| \le 0{,}00532,$$

$$\max_{1 \le r \le 1,1} \left| T(r) - \widetilde{T_2^{II}}(r) \right| \le 0{,}00000067, \quad \max_{1 \le r \le 1,1} \left| Y(r) - \widetilde{Y_2^{II}}(r) \right| \le 0{,}000022;$$

соответствующие теоретические оценки погрешностей даются соотношениями

$$\left| T(r) - \widetilde{T_2}(r) \right| \le 0{,}013, \quad \left| Y(r) - \widetilde{Y_2}(r) \right| \le 0{,}19.$$

Заметим, что оценки, полученные путем непосредственного оценивания (т. е. на основе (7), (10), (11)) приближенных и точных решений, на порядки ниже теоретических, а результат, полученный по второму алгоритму, является достаточно точным при меньшем количестве итераций.

Получим оценку области локализации решения, исходя из (9), (10):

$$T^{II} \le T_0^{II} + p \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma T^{II} d\sigma + p \int_{r_1}^{r} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma T^{II} d\sigma \le \left\| T_0^{II} \right\|_C + 2p \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma d\sigma \left\| T^{II} \right\|_C \le$$

$$\le \left\| T_0^{II} \right\|_C + p \int_{r_1}^{r_2} \frac{s^2 - r_1^2}{s} ds \left\| T^{II} \right\|_C \le \left\| T_0^{II} \right\|_C + p \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \left\| T^{II} \right\|_C = \left\| T_0^{II} \right\|_C + \varphi \left\| T^{II} \right\|_C,$$

где $\left\| T \right\|_C = \max\limits_{r_1 \le r \le r_2} T(r)$,

$$\varphi = p \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right] = \frac{w_0 b}{\lambda_0} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \tag{22}$$

Отсюда при $\varphi < 1$ следует оценка

$$\left\| T^{II} \right\|_C \le \left\| T_0^{II} \right\|_C \Big/ (1 - \varphi). \tag{23}$$

Далее имеем на основе (11)

$$T_0^{II} \le \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + 2q \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma d\sigma = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + q \int_{r_1}^{r_2} \frac{s^2 - r_1^2}{s} ds =$$

$$= \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + q \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right] = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + q\varphi / p.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\| T_0^{II} \right\|_C \le \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + q\varphi / p. \tag{24}$$

Используя (24), получим из (23)

$$\left\|T^{II}\right\|_C \le \left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + q\varphi/p\right)\Big/(1-\varphi). \tag{25}$$

Аналогичные оценки выполним для производной:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right| \le \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma(pT+q)d\sigma + \frac{1}{r_1}\int_{r_1}^{r_2} s(pT+q)ds \le$$

$$\le \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{q}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma d\sigma + \frac{q}{r_1}\int_{r_1}^{r_2} sds + \frac{p}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma d\sigma \|T\|_C + \frac{q}{r_1}\int_{r_1}^{r_2} sds\|T\|_C =$$

$$= \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{q}{2r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{s^2 - r_1^2}{s} ds + \frac{q\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2r_1} + \frac{p}{2r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{s^2 - r_1^2}{s} ds \|T\|_C + \frac{p\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2r_1}\|T\|_C =$$

$$= \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{q + p\|T\|_C}{2r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - r_1^2 \ln\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{q + p\|T\|_C}{2r_1}(r_2^2 - r_1^2) =$$

$$= \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{q + p\|T\|_C}{2r_1}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}} - 2r_1^2 + r_2^2\right).$$

Отсюда следует оценка

$$\max_{r_1 \le r \le r_2}\left|\frac{dT}{dr}\right| \le \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{q + p\|T\|_C}{2r_1}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}} - 2r_1^2 + r_2^2\right) = h + \mu\|T\|_C,$$

где

$$h = \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}} + \frac{q}{2r_1}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}} - 2r_1^2 + r_2^2\right), \quad \mu = \frac{p}{2r_1}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}} - 2r_1^2 + r_2^2\right).$$

Из этой оценки на основе (25) имеем

$$\max_{r_1 \le r \le r_2}\left|\frac{dT}{dr}\right| \le h + \frac{\mu}{1-\varphi}\left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \frac{q\varphi}{p}\right).$$

Запишем величину, используемую в условии сходимости приближенных решений [1]:

$$\psi = \frac{\varepsilon\omega}{2}\left[\frac{\omega}{4}(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_2 + \beta_2\right] = \frac{r_2 - r_1}{2}\left[\frac{w_0 b(r_2 - r_1)}{4\lambda_0} + 1\right]. \tag{26}$$

Далее получим условие сходимости непосредственно к рассматриваемой задаче, исходя из формул (11). Очевидно, что это условие совпадает с приведенным условием однозначной разрешимости, получаемым на основе оценки (23):

$$T_{k+1} \le \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma p T_k^{II}(\sigma) d\sigma + \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma p T_k^{II}(\sigma) d\sigma \le 2p \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} \sigma T_k^{II}(\sigma) d\sigma =$$

$$= p \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^{s} T_k^{II} d\sigma^2 = p \left\| T_k^{II} \right\|_C \int_{r_1}^{r_2} (s^2 - r_1^2) \frac{ds}{s} = \frac{w_0 b}{\lambda_0} \left[\frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) - r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \left\| T_k^{II} \right\|_C = \varphi \left\| T_k^{II} \right\|_C .$$

Отсюда следует оценка $\left\| T_{k+1}^{II} \right\|_C \le \varphi \left\| T_k^{II} \right\|_C$. Для исходных данных (6) имеем $\varphi = 0,021,\ \psi = 0,053.$

Изучим целесообразность использования решений (7), (10) (точнее, соответствующих алгоритмов) в различных случаях, при этом будем рассматривать ψ и φ как функции от r_2.

Поскольку, согласно (22), (26),

$$\varphi(1,1) < \psi(1,1) < 1, \tag{27}$$

то в случае $r_2 = 1,1$ предпочтение, разумеется, следует отдать алгоритму (10).

В связи с (27) возникает вопрос о возможности обратной ситуации. Ответ дает анализ уравнения

$$\varphi(x) = \psi(x), \tag{28}$$

где $x = r_2$.

Уравнение (28) имеет решение $x^* = 1,285...$, при этом $\varphi(x) < \psi(x)$ в области $r_1 < x < x^*$; $\varphi(x) > \psi(x)$ в области $x > x^*$. Учитывая, что уравнения $\varphi(x) - 1 = 0,\ \ \psi(x) - 1 = 0$ имеют корни соответственно $\tilde{x} = 1,735...,\ \tilde{\tilde{x}} = 2,203...,$ оценки реальных областей следует выполнять с учетом значений $\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}.$ Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\varphi(x) < \psi(x), \quad r_1 < x < x^* < \tilde{x}, \tag{29}$$

$$\psi(x) < \varphi(x), \quad x^* < x < \tilde{\tilde{x}}. \tag{30}$$

При этом в случае (29) $(r_1 \le r \le r_2 < x^* < \tilde{x})$ сходятся оба алгоритма, а алгоритм (10) сходится быстрее. В случае (30) $(r_1 \le r \le r_2;\ x^* < r_2 < \tilde{\tilde{x}})$ сходится быстрее алгоритм (7); при $\tilde{x} < r_2 < \tilde{\tilde{x}}$ алгоритм (10) расходится.

Заметим, что изложенный анализ имеет оценочный характер, поскольку функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ получены в результате выполнения оценок. Реальную картину дает применение алгоритмов (7), (10) в более широких областях, чем (29), (30). Конечно, реальные области всегда будут шире (в зависимости от содержания рассматриваемых задач). В случае задачи (2), (8) при λ = 1 имеют место соотношения $x_a^* = 1,4...,\ \tilde{x}_a = 3,12...,\ \tilde{\tilde{x}}_a = 3,11...,$ где индексом *a* отмечены величины, полученные на основе вычислительных экспериментов непосредственно с алгоритмами (7), (10).

З а м е ч а н и е 1. Обозначим

$$\Delta(r_1, r_2, p, 1) = \begin{vmatrix} J_0\left(r_1\sqrt{p}\right) & Z_0\left(r_1\sqrt{p}\right) \\ J_0\left(r_2\sqrt{p}\right) & Z_0\left(r_2\sqrt{p}\right) \end{vmatrix};$$

это определитель, возникающий при вычислении постоянных c_1, c_2 для задач (2), (8) с λ = 1.

Метод функций Бесселя формально применим при $x < r_0$, где r_0 – минимальный положительный корень уравнения

$$\det \Delta(\tilde{r}_1, r_2, \tilde{p}, 1) = 0, \tag{31}$$

где $\tilde{r}_1 = 1, \quad \tilde{p} = 2,203...$.

На основании [7, с. 158] заключаем, что величина r_0, полученная из (31), отвечает первому (ненулевому) собственному значению $\mu_1 = \sqrt{w_0 b / \lambda_0} = \sqrt{p} = 1{,}452...$ соответствующей однородной задачи

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + pT = 0; \quad T(r_1, p) = T(r_2, p) = 0, \quad 0 < r_1 < r_2.$$

При этом справедлива следующая оценка: $\tilde{\tilde{x}} < r_0$. В нашем случае $r_0 = 3{,}129916...$.

Замечание 2. На основе анализа уравнения (31) установлено, что формальным собственным значением для промежутка [1;1,1] является число $\mu^* = 31{,}412...$. Однако в рассматриваемой задаче следует учесть, что $10 \le T(r) \le 100$ в промежутке $r_1 \le r \le r_2$, при этом $dT/dr < 0$ в том же промежутке. С учетом этих ограничений имеем $x = r_2 < \widetilde{r_0} = 2{,}09156...$, т. е. истинное решение определено в промежутке $r_1 \le r \le r_2 < \widetilde{r_0}$; это промежуток допустимых значений r_2. Тем самым метод функций Бесселя при $\widetilde{r_0} < r_2 < r_0$ не дает физически корректных результатов: при $r > r_0$ функция $T(r)$ принимает отрицательные значения; отметим, что решается задача охлаждения стенки.

Далее обратимся к соотношению (30). В частности, при $x = 1{,}6$ имеем $\psi(1{,}6) = 0{,}399$, $\varphi(1{,}6) = 0{,}683$, т. е. $\psi(1{,}6) < \varphi(1{,}6) < 1$. Таким образом, при $r_2 = 1{,}6$ предпочтение следует отдать алгоритму (7). В этом случае о динамике сходимости можно судить по относительным и абсолютным погрешностям для второго, третьего и четвертого приближений для промежутка [1;1,6].

Сначала приведем табличные максимальные относительные погрешности вычисления $\widetilde{T_1^I}(r)$ и $\widetilde{T_1^{II}}(r)$ для этого промежутка:

$$\sigma_1^I = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \widetilde{T_1^I}(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0{,}140736\,\%, \quad \sigma_2^{II} = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \widetilde{T_2^{II}}(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0{,}841255\,\%;$$

затем максимальные относительные погрешности для $\widetilde{Y_1^I}(r)$ и $\widetilde{Y_1^{II}}(r)$:

$$\delta_1^I = \max_i \left| \frac{Y(r_i) - \widetilde{Y_1^I}(r_i)}{Y(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 0{,}220342\,\%, \quad \delta_1^{II} = \max_i \left| \frac{Y(r_i) - \widetilde{Y_1^{II}}(r_i)}{Y(r_i)} \right| \cdot 100\,\% = 1{,}941442\,\%.$$

Расчетные оценки абсолютных погрешностей приближенных решений составляют

$$\max_{1 \le r \le 1{,}6} \left| T(r) - \widetilde{T_1^I}(r) \right| \le 0{,}063739, \quad \max_{1 \le r \le 1{,}6} \left| Y(r) - \widetilde{Y_1^I}(r) \right| \le 0{,}336733,$$

$$\max_{1 \le r \le 1{,}6} \left| T(r) - \widetilde{T_1^{II}}(r) \right| \le 0{,}415609, \quad \max_{1 \le r \le 1{,}6} \left| Y(r) - \widetilde{Y_1^{II}}(r) \right| \le 2{,}643898;$$

соответствующие теоретические оценки погрешностей имеют вид

$$\left| T(r) - \widetilde{T}_1(r) \right| \le 54{,}127, \quad \left| Y(r) - \widetilde{Y}_1(r) \right| \le 135{,}316.$$

Максимальные расчетные относительные погрешности для $\widetilde{T_2^I}(r)$, $\widetilde{T_2^{II}}(r)$; $\widetilde{Y_2^I}(r)$, $\widetilde{Y_2^{II}}(r)$ имеют вид

$$\sigma_2^I = 0{,}011536\,\%, \quad \sigma_2^{II} = 0{,}066304\,\%; \quad \delta_2^I = 0{,}037256\,\%, \quad \delta_2^{II} = 0{,}143348\,\%.$$

Расчетные оценки абсолютных погрешностей приближенных системных решений принимают значения

$$\max_{1\le r\le 1.6}\left|T(r)-\widetilde{T_2^{I}}(r)\right|\le 0{,}007333,\quad \max_{1\le r\le 1.6}\left|Y(r)-\widetilde{Y_2^{I}}(r)\right|\le 0{,}050737,$$

$$\max_{1\le r\le 1.6}\left|T(r)-\widetilde{T_2^{II}}(r)\right|\le 0{,}032259,\quad \max_{1\le r\le 1.6}\left|Y(r)-\widetilde{Y_2^{II}}(r)\right|\le 0{,}195215;$$

соответствующие теоретические оценки погрешностей имеют вид

$$\left|T(r)-\widetilde{T}_2(r)\right|\le 30{,}545,\quad \left|Y(r)-\widetilde{Y}_2(r)\right|\le 76{,}361.$$

Вычисление максимальных относительных погрешностей $\widetilde{T_3^{I}}(r)$, $\widetilde{T_3^{II}}(r)$, $\widetilde{Y_3^{I}}(r)$ и $\widetilde{Y_3^{II}}(r)$ дало следующий результат:

$$\sigma_3^{I}=0{,}000641\,\%,\quad \sigma_3^{II}=0{,}005155\,\%;\quad \delta_3^{I}=0{,}005273\,\%,\quad \delta_3^{II}=0{,}010987\,\%.$$

Расчетные оценки погрешностей приближенных системных решений составляют

$$\max_{1\le r\le 1.6}\left|T(r)-\widetilde{T_3^{I}}(r)\right|\le 0{,}000481,\quad \max_{1\le r\le 1.6}\left|Y(r)-\widetilde{Y_3^{I}}(r)\right|\le 0{,}007181,$$

$$\max_{1\le r\le 1.6}\left|T(r)-\widetilde{T_3^{II}}(r)\right|\le 0{,}002497,\quad \max_{1\le r\le 1.6}\left|Y(r)-\widetilde{Y_3^{II}}(r)\right|\le 0{,}014962;$$

при этом соответствующие теоретические оценки погрешностей имеют вид

$$\left|T(r)-\widetilde{T}_3(r)\right|\le 17{,}237,\quad \left|Y(r)-\widetilde{Y}_3(r)\right|\le 43{,}092.$$

Расчет относительных погрешностей дал следующий результат:

$$\sigma_4^{I}=0{,}000041\,\%,\quad \sigma_4^{II}=0{,}000399\,\%;\quad \delta_4^{I}=0{,}000307\,\%,\quad \delta_4^{II}=0{,}000848\,\%.$$

Расчетные оценки абсолютных погрешностей приближенных решений составляют

$$\max_{1\le r\le 1.6}\left|T(r)-\widetilde{T_4^{I}}(r)\right|\le 0{,}000017,\quad \max_{1\le r\le 1.6}\left|Y(r)-\widetilde{Y_4^{I}}(r)\right|\le 0{,}000418,$$

$$\max_{1\le r\le 1.6}\left|T(r)-\widetilde{T_4^{II}}(r)\right|\le 0{,}000193,\quad \max_{1\le r\le 1.6}\left|Y(r)-\widetilde{Y_4^{II}}(r)\right|\le 0{,}001155;$$

соответствующие теоретические оценки погрешностей имеют вид

$$\left|T(r)-\widetilde{T}_4(r)\right|\le 9{,}727,\quad \left|Y(r)-\widetilde{Y}_4(r)\right|\le 24{,}318.$$

З а м е ч а н и е 3. Поскольку $r_2 > r_1$ $(r_2 = x)$, то изложенный анализ имеет смысл при $x > r_1$, при этом существование областей (29), (30) возможно при выполнении условия

$$0 < r_1 < \sqrt{1+\frac{1}{2p}}.$$

В данной задаче значение величины r_1 выбрано с учетом этого условия.

З а м е ч а н и е 4. Из аналитической структуры рассмотренных алгоритмов и условий их сходимости видно, что подобная ситуация с характером их сходимости может повториться и в ряде других задач. Алгоритмы (7), (10) построения решения задачи (1) с исходными данными (6) иллюстрируют общие алгоритмы, приведенные в [1]. Заметим, что классический метод решения задачи (2) связан с использованием бесселевых функций. Предлагаемые аналитические алгоритмы содержат сравнительно простые вычислительные операции; в них специальные функции не применяются, поэтому они могут быть использованы при решении широкого круга задач.

Список использованных источников

1. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка. Ч. 1 / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 48 с. – (Препринт / Ин-т технологии металлов НАН Беларуси; № 35).

2. Кашпар, А. И. О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весц. Нац. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 50–61. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-50-61

3. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

4. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка. Ч. 2 / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 40 с. – (Препринт / Ин-т технологии металлов НАН Беларуси; № 39).

5. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский [и др.]. – М.: Машиностроение, 1975. – 624 с.

6. Теория тепломассообмена / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – М.: Высш. шк., 1979. – 495 с.

7. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М.: Высш. шк., 2001. – 553 с.

References

1. Laptinskii V. N., Kashpar A. I. *Constructive Analysis of Boundary Value Problem de la Vallee-Poussin for Linear Matrix Equation Lyapunov Second Order. Part I.* Preprint. Mogilev, Belarusian-Russian University Publ., 2015. 48 p. (in Russian).

2. Kashpar A. I., Laptinskiy V. N. Solvability and construction of solution to the de la Vallee-Poussin problem for the second-order matrix Lyapunov equation with a parameter. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 50–61 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-50-61

3. Laptinskii V. N. *Constructive Analysis of Controlled Oscillatory Systems.* Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus Publ., 1998. 300 p. (in Russian).

4. Laptinskii V. N., Kashpar A. I. *Constructive Analysis of Boundary Value Problem de la Vallee-Poussin for Linear Matrix Equation Lyapunov Second Order. Part II.* Preprint. Mogilev, Belarusian-Russian University Publ., 2015. 40 p. (in Russian).

5. Avduevskii V. S., Galitseiskii B. M., Glebov G. A., Danilov Iu. I., Dreitser G. A., Kalinin E. K., Koshkin V. K., Mikhailov T. V., Molchanov A. M., Ryzhov Iu. A., Solntsev V. P. *Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Rocket and Space Technology.* Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 624 p. (in Russian).

6. Isaev S. I., Kozhinov I. A., Kofanov V. I., Leont'ev A. I., Mironov B. M., Nikitin V. M., Petrazhitskii G. B., Khvostov V. I., Chukaev A. G., Shishov E. V., Shkola V. V. *Theory of Heat and Mass Transfer.* Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1979. 495 p. (in Russian).

7. Kartashov E. M. *Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids.* Moscow, Vysshaia shkola Publ., 2001. 553 p. (in Russian).

Информация об авторах

Кашпар Александр Иванович – помощник ректора, Белорусско-Российский университет (пр. Мира, 43, 212000, г. Могилев, Республика Беларусь). E-mail: alex.kashpar@tut.by

Лаптинский Валерий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусско-Российский университет (пр. Мира, 43, 212000, г. Могилев, Республика Беларусь). E-mail: lavani@tut.by

Information about the authors

Alexandr I. Kashpar – Assistant Rector, Belarusian-Russian University (43, Mira Ave., 212000, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: alex.kashpar@tut.by

Valery N. Laptinskiy – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian-Russian University (43, Mira Ave., 212000, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: lavani@tut.by