ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-464-469

Поступила в редакцию 29.10.2021
Received 29.10.2021

Ю. П. Выблый, О. Э. Кургузова

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ФРОЙНДА – НАМБУ

Аннотация. Рассмотрена система уравнений Эйнштейна и уравнения безмассового скалярного поля Фройнда – Намбу для статических сферически-симметричных и аксиально-симметричных полей. Показано, что данная система полевых уравнений расцепляется на гравитационную и скалярную подсистемы. Во втором постньютоновском приближении получены решения для сферически-симметричного и медленновращающегося источников. Обсуждается применение полученных решений к задачам астрофизики.

Ключевые слова: гравитация, уравнения Эйнштейна, скалярное поле, сферическая симметрия, аксиальная симметрия, астрофизика

Для цитирования. Выблый, Ю. П. Статические решения в скалярно-тензорной теории гравитации Фройнда – Намбу / Ю. П. Выблый, О. Г. Кургузова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 464–469. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-464-469

Yuri P. Vyblyi, Oksana G. Kurguzova

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Btlarus

STATIC SOLUTIONS IN THE FREUND – NAMBU SCALAR-TENSOR THEORY OF GRAVITATION

Abstract. Herein, the system of Einstein equations and the equation of the Freund – Nambu massless scalar field for static spherically symmetric and axially symmetric fields are considered. It is shown that this system of field equations decouples into gravitational and scalar subsystems. In the second post-Newtonian approximation, the solutions for spherically symmetric and slowly rotating sources are obtained. The application of the obtained solutions to astrophysical problems is discussed.

Keywords: gravitation, Einstein's equations, scalar field, spherical symmetry, axial symmetry, astrophysics

For citation. Vyblyi Yu. P., Kurguzova O. G. Static solutions in the Freund – Nambu scalar-tensor theory of gravitation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 464–469 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-464-469

Введение. В течение длительного времени скалярно-тензорные теории гравитации с нелинейным скалярным полем рассматриваются как возможные альтернативы космологической ΛCDM-модели [1]. С другой стороны, они часто используются в астрофизике для описания компактных объектов и движения пробных частиц в их полях [2–6]. Особый интерес с точки зрения астрофизики представляет собой класс таких теорий, в котором скалярное поле дополнительно взаимодействует с материей [7, 8]. Простейшие модели компактных источников с линейным массивным и безмассовым скалярными полями исследованы достаточно подробно, однако рассмотрение нелинейных скалярных полей обычно предполагает наличие определенной мотивации для выбора лагранжиана скалярного поля.

В настоящей работе для описания полей сферически-симметричного и аксиально-симметричного медленно вращающегося источника используется скалярно-тензорная модель Фройнда – Намбу [9]. Скалярное полевое уравнение этой теории определяется тем условием, что источником линейного скалярного поля является след его собственного тензора энергии-импульса. Для космологической задачи в данной теории существенна масса скалярного поля, поскольку именно ее наличие приводит к эффективному отрицательному давлению и наблюдаемому эффекту ускорения космологического расширения [10]. Однако для случая полей компактных объектов она не играет существенной роли, поэтому мы будем рассматривать безмассовую модель.

Модель Фройнда – Намбу. Рассмотрим скалярное поле φ, источником которого является след его собственного тензора энергии-импульса T^φ и тензора энергии-импульса материи T^M:

$$(\Box - m^2)\varphi = q(T^\varphi + T^M), \tag{1}$$

где $\Box$ – оператор Даламбера, m – масса скалярного поля, q – константа скалярного взаимодействия. Уравнение (1) может быть получено из лагранжиана

$$L_\varphi + L_M = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi}{1+2q\varphi} - m^2\varphi^2\right)\sqrt{-g} + L_M\left((1+2q\varphi)g_{\mu\nu}, Q_M\right), \tag{2}$$

где Q_M – поля материи. Из (2) следует, что уравнение скалярного поля и его тензор энергии-импульса имеют вид

$$(\Box - m^2)\varphi = q\left(-\frac{\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi}{1+2q\varphi} + 2m^2\varphi^2 + T^M\right), \tag{3}$$

$$T_\varphi^{\mu\nu} = \frac{\partial^\nu\varphi\partial^\mu\varphi}{1+2q\varphi} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi}{1+2q\varphi} - m^2\varphi^2\right), \tag{4}$$

а метрика $g_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса скалярного поля (4) в правой части. Отметим, что для уравнения скалярного поля с источником в виде следа собственного тензора энергии-импульса может быть получено более общее выражение, содержащее кроме константы скалярного взаимодействия и массы скалярного поля еще один параметр.

Сферически-симметричное решение. Рассмотрим сферически-симметричное внешнее решение системы уравнений Эйнштейна и безмассового скалярного поля

$$G_\nu^\mu = kT_{\nu(\varphi)}^\mu, \tag{5}$$

$$\Box\varphi = qT_{(\varphi)}, \tag{6}$$

где k – постоянная Эйнштейна. Записываем интервал для метрики в виде

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{7}$$

Необходимые компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля и его след имеют вид

$$T_0^0 = -T_1^1 = \frac{1}{2\Phi}e^{-\lambda}\varphi'^2, T = \frac{1}{\Phi}e^{-\lambda}\varphi'^2, \tag{8}$$

где $\Phi \equiv 1 + 2q\varphi$. Переходя от переменной φ к переменной Φ, получаем систему уравнений

$$(\nu + \lambda)' = \frac{r}{4q^2}\frac{\Phi'^2}{\Phi}, \tag{9}$$

$$(\nu - \lambda)' = \frac{2}{r}(e^\lambda - 1), \tag{10}$$

$$\Phi'' + \frac{(e^\lambda + 1)}{r}\Phi' - \frac{\Phi'^2}{2\Phi} = 0. \tag{11}$$

Первый интеграл уравнения (11) имеет вид

$$\frac{\Phi'^2}{\Phi} = Ae^{-2p}, \tag{12}$$

где A − константа интегрирования,

$$p = \int \frac{e^{\lambda} + 1}{r} dr. \tag{13}$$

Используя уравнение (10), находим

$$\frac{\Phi'^2}{\Phi} = \frac{A}{r^4} e^{(\lambda - \nu)}. \tag{14}$$

Следовательно, уравнения Эйнштейна расцепляются с уравнением скалярного поля, и система (9)–(11) принимает вид

$$(\nu + \lambda)' = \frac{Ak}{4q^2 r^3} e^{(\lambda - \nu)}, \tag{15}$$

$$(\nu - \lambda)' = \frac{2}{r}(e^{\lambda} - 1), \tag{16}$$

$$\Phi'^2 = \frac{A}{r^4} e^{(\lambda - \nu)} \Phi. \tag{17}$$

Рассмотрим приближенные решения уравнений (15), (16) с точностью до членов второго порядка по величине $x = \frac{M}{r}$, где M − масса источника. Представим компоненты метрики в следующем виде (удерживая члены порядка x^3, коэффициенты, перед которыми войдут после дифференцирования в члены второго порядка по x):

$$e^{\nu} = 1 + ax + bx^2 + cx^3, \tag{18}$$

$$e^{\lambda} = 1 + px + sx^2 + tx^3. \tag{19}$$

Используя (18), (19), находим

$$\nu' = -\frac{M}{r^2}\left[a - (a^2 - 2b) + (a^3 - 3ab + 3c)x^2\right], \tag{20}$$

$$\lambda' = -\frac{M}{r^2}\left[p - (p^2 - 2s) + (p^3 - 3ps + 3t)x^2\right]. \tag{21}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (15)–(16) и приравнивая коэффициенты при степенях $\frac{1}{r}$, получаем две алгебраические системы для определения коэффициентов в разложении метрики:

$$a + p = 0, \quad a^2 - 2b + p^2 - 2s = -\frac{B}{M^2},$$

$$a(a^2 - 3b) + 3c + p(p^2 - 3s) + 3t = \frac{B}{M^2}(a - p), \tag{22}$$

$$a + p = 0, \quad a^2 - 2b + p^2 = 0, \quad a(a^2 - 3b) + 3c - p(p^2 - 3s) - t = 0. \tag{23}$$

Из соотношений (22), (23) получаем коэффициенты в разложении метрики

$$a = -2, \quad b = 0, \quad c = \frac{5B}{3M^2}, \quad p = 2, \quad t = 8 - \frac{2B}{M^2}, \quad s = 4 + \frac{B}{2M^2}, \tag{24}$$

где $B = \frac{Ak}{4q^2}$, которые при $B = 0$ совпадают с соответствующими коэффициентами в разложении метрики Шварцшильда. Выражение для метрики принимает вид

$$g_{00}=1-\frac{2M}{r},\quad g_{11}=-\left(1+\frac{2M}{r}+\left(4+\frac{B}{2M^2}\right)\frac{M^2}{r^2}\right),\quad g_{22}=-r^2. \tag{25}$$

С использованием найденных выражений для метрики находим, что решение уравнения (14), для которых поле φ исчезает на бесконечности, имеет вид

$$\Phi=\left[1-\frac{\sqrt{A}M}{2r^2}\left(1+\left(\frac{4}{3}+\frac{B}{12M^2}\right)\frac{M}{r}\right)\right]^2, \tag{26}$$

и с точностью до членов второго порядка по величине порядка M/r

$$\Phi=1-\frac{\sqrt{A}M}{r^2}. \tag{27}$$

Константа A (или B) должна определяться из условий сшивки с некоторым внутренним решением. В него входят, как правило, три константы, связанные с уравнением состояния материи, как, например, в решениях Толмена для идеальной жидкости [11]. Кроме того, в него войдут две константы, связанные с внутренним решением для скалярного поля. Таким образом, нужно будет определить 6 констант из шести условий сшивки величин g_{00}, g_{11}, Φ и их первых производных.

Аксиально-симметричное решение. Рассмотрим аксиально-симметричную метрику, являющуюся решением уравнений (5), (6), и представим интервал в виде

$$ds^2=e^{\nu}dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+\frac{\omega}{r}\left(1+qa(r)\right)\sin^2\theta dtd\varphi, \tag{28}$$

где зависимость величины a от радиуса обусловлена наличием скалярного поля. Система уравнений Эйнштейна и скалярного поля будет записываться как

$$G_0^0=kT_0^0,\quad G_1^1=kT_1^1,\quad G_3^0=kT_3^0,\quad \Box\varphi=qT. \tag{29}$$

Контравариантные компоненты метрики (27) имеют вид

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{\omega\alpha}{r^3\Delta}\\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0\\ \frac{\omega\alpha}{r^3\Delta} & 0 & 0 & \frac{-e^{\nu}}{r^2\Delta\sin^2\theta}\end{pmatrix}, \tag{30}$$

где

$$\Delta=e^{\nu}+\alpha^2\frac{\omega^2}{r^4}\sin^2\theta,\quad \alpha=(1+qa).$$

Ограничимся приближением медленного вращения, пренебрегая квадратичными и высшими степенями ω. Тогда компоненты G_0^0, G_1^1, T_0^0 и T_1^1 совпадают с соответствующими величинами для сферически-симметричной задачи, а $T_3^0=0$ тождественно. Соответственно два уравнения Эйнштейна для величин ν и λ совпадут с уравнениями (9) и (10), а уравнение для α примет вид (программный пакет RGTC, G_0^3)

$$\alpha''-\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{2}(\nu+\lambda)'\right)\alpha'-\frac{3}{2r}(\nu+\lambda)'\alpha=0. \tag{31}$$

В принятом приближении детерминант метрического тензора и след тензора энергии-импульса скалярного поля T также совпадают со случаем центрально симметричного поля, и уравнения (15)–(17) остаются в силе.

С учетом найденного выражения для выражения $e^{(\lambda-\nu)}$ уравнение (31) примет вид

$$\alpha'' - \frac{2}{r}\left(1+\frac{B}{4r^2}\right)\alpha' - \frac{3B}{2r^4}\left[1+\frac{4M}{r}+\left(12+\frac{B}{2M^2}\right)\frac{M^2}{r^2}\right]\alpha = 0. \tag{32}$$

Разлагая величину α и ее производные по степеням $\frac{M}{r}$ и подставляя в уравнение (32), находим

$$\alpha = 1+\frac{3B}{20r^2}. \tag{33}$$

Таким образом, во втором постньютоновском приближении аксиально-симметричная метрика для случая медленного вращения имеет вид

$$\begin{gathered} g_{00} = 1-\frac{2M}{r},\ g_{11} = -\left(1+\frac{2M}{r}+\left(4+\frac{B}{2M^2}\right)\frac{M^2}{r^2}\right), \\ g_{22} = -r^2,\ g_{03} = \frac{\omega}{r}\left(1+\frac{3B}{20r^2}\sin^2\theta\right). \end{gathered} \tag{34}$$

Заключение. Полученные сферически-симметричное и аксиально-симметричное решения полевых уравнений могут быть использованы в астрофизических задачах при расчетах движения пробных частиц и электромагнитных волн в этих полях. Существенно, что учет взаимодействия скалярного поля с материей приводит к тому, что материя, в том числе пробные частицы, движется в пространстве с эффективной конформной метрикой $f_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}$ [12]. В этом случае необходимо использовать выражение для скалярного поля (26) в сферически-симметричной задаче и получить аналогичное решение уравнения (14) для поля с аксиальной симметрией.

Благодарности. Авторы выражают благодарность И. А. Сивцову за помощь в проведении вычислений. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф20МЦ-003).

Acknowledgements. The authors are grateful to I. A. Sivtsov for the help in performing the calculations. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф20МЦ-003).

Список использованных источников

1. Sahny, Y. The cosmological constant problem and quintessence / Y. Sahny // Class. Quant. Grav. – 2002. – Vol. 19, № 13. – P. 3435–3448. https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/13/304

2. Matos, T. Possible astrophysical signatures of scalar fields / T. Matos, H. V. Brena // Class. Quant. Grav. – 2000. – Vol. 17, № 6. – P. 1455–1465. https://doi.org/10.1088/0264-9381/17/6/310

3. Matos, T. An axially symmetric scalar field as a gravitational lens / T. Matos, R. Beccerril // Class. Quant. Grav. – 2001. – Vol. 18, № 11. – P. 2015–2024. https://doi.org/10.1088/0264-9381/18/11/303

4. Scherrer, R. J. Thawing quintessence with a nearly flat potential / R. J. Scherrer, A. A. Sen // Phys. Rev D. – 2008. – Vol. 77, № 8. – P. 083515. https://doi.org/10.1103/physrevd.77.083515

5. Sotoni, H. Slowly rotating relativistic stars in scalar-tensor gravity / H. Sotoni // Phys. Rev. D. – 2012. – Vol. 86, № 12. – P. 124036. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.124036

6. Doneva, D. D. Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity / D. D. Doneva // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 88, № 8. – P. 084060. https://doi.org/ 10.1103/PhysRevD.88.084060

7. Khoury, J. Chameleon cosmology / J. Khoury, A. Weltman // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 69, № 4. – P. 044026. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.044026

8. Das, S. Superacceleration as the signature of a dark sector interaction / S. Das, P. S. Corasaniti, J. Khoury. // Phys. Rev. D. – 2006. – Vol. 73, № 8. – P. 083509. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.083509

9. Freund, P. Scalar field coupled to the trace of the energy-momentum tensor / P. Freund, Y. Nambu // Phys. Rev. D. – 1968. – Vol. 174, № 5. – P. 1741. https://doi.org/ 10.1103/PhysRev.174.1741

10. Горбунов, Д. С. Ведение в теорию ранней вселенной. Теория горячего большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 616 с.

11. Tolman, R. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid / R. C. Tolman // Phys. Rev. – 1939. – Vol. 55, № 4. – P. 364. https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.364

12. Dudko, I. Scalar field with the source in the form of the stress-energy tensor as a dark energy model / I. Dudko, Y. Vyblyi // Grav. Cosm. – 2016. – Vol. 22, № 4. – P. 368–373. https://doi.org/10.1134/s020228931604006x

References

1. Sahny Y. The cosmological constant problem and quintessence. *Classical and Quantum Gravity*, 2002, vol. 19, no. 13, pp. 3435–3448. https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/13/304

2. Matos T., Brena H. V. Possible astrophysical signatures of scalar fields. *Classical and Quantum Gravity*, 2000, vol. 17, no. 6, pp. 1455–1465. https://doi.org/10.1088/0264-9381/17/6/310

3. Matos T., Beccerril R. An axially symmetric scalar field as a gravitational lens. *Classical and Quantum Gravity*, 2001, vol. 18, no. 11, pp. 2015. https://doi.org/10.1088/0264-9381/18/11/303

4. Scherrer R. J., Sen A. A. Thawing quintessence with a nearly flat potential. *Physical Review D*, 2008, vol. 77, no. 8, pp. 083515. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.083515

5. Sotoni H. Slowly rotating relativistic stars in scalar-tensor gravity. *Physical Review D*, 2012, vol. 86, no. 12, pp. 124036. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.124036

6. Doneva D. D. Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity. *Physical Review D*, 2013, vol. 88, no. 8, pp. 084060. https://doi.org/ 10.1103/PhysRevD.88.084060

7. Khoury J., Weltman A. Chameleon cosmology. *Physical Review D*, 2004, vol. 69, no. 4, pp. 044026. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.044026

8. Das S., Corasaniti P. S., Khoury J. Superacceleration as the signature of a dark sector interaction. *Physical Review D*, 2006, vol. 73, no. 8, pp. 083509. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.083509

9. Freund P., Nambu Y. Scalar field coupled to the trace of the energy-momentum tensor. *Physical Review*, 1968, vol. 174, no. 5, pp. 1741. https://doi.org/ 10.1103/PhysRev.174.1741

10. Gorbunov D. S., Rubakov V. A. *Introduction to Early Universe Theory. The Hot Big Bang Theory.* Moscow, LENAND, 2016. 616 p. (in Russian).

11. Tolman R. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. *Physical Review*, 1939, vol. 55, no. 4, pp. 364. https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.364

12. Dudko I., Vyblyi Y. Scalar field with the source in the form of the stress-energy tensor as a dark energy model. *Gravitation and Cosmology*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 368–373. https://doi.org/10.1134/s020228931604006x

Информация об авторах

Выблый Юрий Петрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vyblyi@gmail.com

Кургузова Оксана Георгиевна – младший научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kuppory@gmail.com

Information about the authors

Yuri P. Vyblyi – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus), E-mail: vyblyi@gmail.com

Oksana G. Kurguzova – Junior Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus), E-mail: kuppory@gmail.com