УДК 517.925

И. П. МАРТЫНОВ, Е. С. ЛЫСЮК

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 06.03.2015)

Введение. Представляет интерес исследование дифференциальных уравнений и систем, имеющих подвижные особые линии. Установлено, что нет уравнений второго порядка с рациональной правой частью, имеющих подвижную особую линию [1]. Простейшим уравнением с подвижной особой линией является уравнение Шази [2] третьего порядка $y''' = 2yy'' - 3\left(y'\right)^2$. Исследованию дифференциальных уравнений и систем третьего и высших порядков с подвижной особой линией посвящены, например, [2–8]. В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение четвертого порядка с подвижной особой линией.

Основная часть. Как в [3, 6], рассмотрим преобразование

$$y(t) = f'(t) \cdot u\left(z \right), z = f(t), \tag{1}$$

где f – дробно-линейная функция от t. Будем обозначать производные по t через y', y'', y''', $y^{(4)}$; производные по z – $\dot u, \ddot u, \dddot u, \ddddot u$.

Заметим, что при преобразовании (1)

$$2yy'' - 3(y')^2 = (f')^4 \left(2u\ddot u - 3\left(\dot u\right)^2\right),$$
$$y^2 y''' - 6yy'y'' + 6(y')^3 = (f')^6 \left(u^2 \dddot u - 6u\dot u\ddot u + 6\dot u^3\right),$$
$$yy^{(4)} - 10y'y''' + 10\left(y''\right)^2 = \left(f'\right)^6 \left(u \ddddot u - 10\dot u \dddot u + 10\left(\ddot u\right)^2\right).$$

Следовательно, уравнение

$$y^3 y^{(4)} = 10y^2 y'y''' - 10y^2\left(y''\right)^2 + a\left(2yy'' - 3(y')^2\right)^2 + by^2\left(y^2y''' - 6yy'y'' + 6(y')^3\right) + c\,y^4\left(2yy'' - 3(y')^2\right) \tag{2}$$

инвариантно при преобразовании (1). Подберем a, b, c так, чтобы резонансы уравнения (2) были целыми и различными.

Если искать решение уравнения (2) в виде ряда

$$y = \alpha(t - t_0)^{-1} + \ldots + h(t - t_0)^{r-1} + \ldots,$$

то получим

$$c\alpha^2 = 4 - a,$$
$$(r^2 - 1)(r^2 - b\alpha r + 8 - 2a) = 0.$$

С другой стороны, если положить $t - t_0 = \varepsilon z$, где ε – параметр, то упрощенное для (2) уравнение имеет вид

$$y^3 y^{(4)} = 10y^2 y'y''' - 10y^2\left(y''\right)^2 + a\left(2yy'' - 3(y')^2\right)^2. \tag{3}$$

Полагая

$$y' = 2xy, \tag{4}$$

для x получим уравнение

$$x''' = 12xx'' - (8a - 26)(x')^2 + 32(1-a)x^2x' + 16(a-1)x^4. \tag{5}$$

Согласно [2], для отсутствия у решения уравнения (5) многозначных подвижных особых точек необходимо $a = 1$. Тогда

$$c\alpha^2 = 3,$$
$$(r^2 - 1)(r^2 - b\alpha r + 6) = 0,$$

откуда $b\alpha = \pm 5$. Поэтому получим $c = 3$, $b = 5$. Значит, $\alpha^2 = 1$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$y^3y^{(4)} = 10y^2y'y''' - 10y^2\left(y''\right)^2 + \left(2yy'' - 3(y')^2\right)^2 + 5y^2\left(y^2y''' - 6yy'y'' + 6(y')^3\right) + 3y^4\left(2yy'' - 3(y')^2\right). \tag{6}$$

Уравнение (3) при $a = 1$ имеет вид

$$y^3y^{(4)} = 10y^2y'y''' - 10y^2\left(y''\right)^2 + \left(2yy'' - 3(y')^2\right)^2. \tag{7}$$

Если искать решение уравнения (7) в виде ряда

$$y = \alpha(t - t_0)^{-s} + \ldots + h_r(t - t_0)^{r-s} + \ldots,$$

то получим $s = 2$, резонансы $r = -1, -2, -3, 0$.

Выполнив замену (4), с учетом (7), для x получим уравнение

$$x''' = 12xx'' - 18(x')^2. \tag{8}$$

Как известно [2], уравнение Шази (8) имеет подвижную особую линию, которая является прямой или окружностью [9].

В [9] показано, что решение уравнения (8) в виде ряда Дирихле имеет вид

$$x = -\frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}, \tag{9}$$

где α_1 – произвольное, остальные коэффициенты α_k, $k = 2,3,4,\ldots$, определяются по рекуррентной формуле

$$\alpha_k = \frac{6}{k^2(k-1)} \sum_{n=1}^{k-1} (3kn - 5n^2)\alpha_n\alpha_{k-n}, \quad k = 2,3,4,\ldots,$$

при этом ряд (9) сходится абсолютно в области $\mathrm{Re}\, t > \eta$, где η – абсцисса абсолютной сходимости ряда (9).

Из (4), с учетом (9), можем записать решение уравнения (7)

$$y = C_1 \exp\left(-\frac{1}{6}t - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-kt}\right), \tag{10}$$

где C_1 – произвольное, $\beta_k = \dfrac{2}{k}\alpha_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. β_1 – произвольное, остальные коэффициенты β_k, $k = 2,3,4,\ldots$, определяются по рекуррентной формуле

$$\beta_k = \frac{3}{k^3(k-1)} \sum_{n=1}^{k-1} n(k-n)(3kn - 5n^2)\beta_n\beta_{k-n}, \quad k = 2,3,4,\ldots, \tag{11}$$

при этом ряд (11) сходится абсолютно в области $\mathrm{Re}\, t > \eta$.

С учетом инвариантности уравнения (7) при преобразовании (1), полагая $f(t)=\dfrac{h}{t-t_0}-\ln A$, из (10) получаем общее решение уравнения (7) в области $\operatorname{Re}\dfrac{h}{t-t_0}>\eta+\ln|A|$:

$$y=\frac{C}{(t-t_0)^2}\exp\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{h}{t-t_0}-\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k A^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}\right), \tag{12}$$

где $C=-C_1hA^{\frac{1}{6}}$, h, A, t_0 – произвольные, $\beta_1=1$, остальные коэффициенты β_k, $k=2,3,4,...$, определяются по рекуррентной формуле (11).

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Рядом* (12) *в области* $\operatorname{Re}\dfrac{h}{t-t_0}>\eta+\ln|A|$ *дано общее решение уравнения* (7).

З а м е ч а н и е 1. Общее решение уравнения (8) в области $|t-t_0|>R$ дается формулой

$$x=-\frac{1}{t-t_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{(t-t_0)^{k+1}},$$

где h_1 (или t_0), h_2, h_3 – произвольные постоянные, а остальные коэффициенты h_k, $k=4,5,6,...$, определяются по рекуррентной формуле

$$(k-1)(k-2)(k-3)h_k=6\sum_{m=1}^{k-1}(m+1)(3k-5m-1)h_m h_{k-m},\ k=4,5,6,... .$$

Используя (4), можно записать

$$y=\frac{\alpha}{(t-t_0)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{(t-t_0)^{k+2}}, \tag{13}$$

где γ_k и h_k связаны условиями $\gamma_1=-2\alpha h_1$, $k\gamma_k+2\alpha h_k+2\sum_{m=1}^{k-1}h_m\gamma_{k-m}=0$, $k=2,3,4,...$. Поэтому ряд Лорана (13) задает общее решение уравнения (7) в области $|t-t_0|>R$, при этом α, γ_1 (или t_0), γ_2, γ_3 – произвольные постоянные.

С учетом (6) и (4) запишем систему

$$\begin{cases} x'''=12xx''-18x'^2+5y(x''-6xx'+4x^3)+6y^2(x'-x^2),\\ y'=2xy. \end{cases} \tag{14}$$

Заменой $(x,y,t;\varepsilon^{-1}x,y,\varepsilon t)$, где ε – параметр, (14) преобразуется в систему

$$\begin{cases} x'''=12xx''-18x'^2+5\varepsilon y(x''-6xx'+4x^3)+6\varepsilon^2y^2(x'-x^2),\\ y'=2xy, \end{cases} \tag{15}$$

которая при $\varepsilon=0$ имеет решение (9), (12). Поэтому по теореме Пуанкаре при достаточно малых ε, $\varepsilon\neq 0$, решения системы (15) можно разложить в ряды

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k,\quad y=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k.$$

Тогда из (15) получим

$$x_0'''=12x_0x_0''-18x_0'^2, \tag{16}$$

$$y_0'=2x_0y_0,$$

$$\begin{cases} x_n'''=12x_0x_n''-36x_0'x_n'+12x_0''x_n+F_n,\\ y_n'=2x_0y_n+G_n,\ n=1,2,..., \end{cases}$$

где F_n зависит от тех x_k, y_m, для которых $k < n$, $m < n$; G_n зависит от тех x_k, y_m, для которых $k \le n$, $m < n$. Откуда заключаем, что если подвижная особая линия уравнения Шази (16) является окружностью, т. е. если x_0 имеет место внутри или вне некоторого круга Ω, то все x_i, y_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, а значит, и x, y, также будут иметь место в области, находящейся внутри или вне круга Ω.

Если искать решение системы (14) в виде рядов

$$\begin{cases} x = \alpha\left(t-t_0\right)^{-s_1} + \ldots + h_1\left(t-t_0\right)^{r-s_1} + \ldots, \\ y = \beta\left(t-t_0\right)^{-s_2} + \ldots + h_2\left(t-t_0\right)^{r-s_2} + \ldots, \end{cases}$$

то получим $\alpha = -\frac{1}{2}$, $s_1 = s_2 = 1$ и $\beta = 1$, $r = -1, 1, 2, 3$; $\beta = -1$, $r = -1, -2, -3, 1$.

Таким образом, подставляя ряды

$$x = -\frac{1}{2}\left(t-t_0\right)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(t-t_0\right)^{k-1}, \tag{17}$$

$$y = \left(t-t_0\right)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(t-t_0\right)^{k-1} \tag{18}$$

в систему (14), имеем t_0, β_1, β_2, β_3 – произвольные, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$, остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k = \frac{k}{2}\beta_k - \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n \beta_{k-n},\ k = 2, 3, 4, \ldots, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \beta_k = \frac{2}{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \left(((k^3 - 5k^2 + 5k + 17)\beta_{k-n} - 36\alpha_{k-n})\alpha_n + \frac{3}{2}\beta_n\beta_{k-n} \right) + \right. \\ +3\sum_{n=1}^{k-2} (9\beta_{k-n-1} - 10\alpha_{k-n-1}) n\alpha_{n+1} + \sum_{n=1}^{k-3} \left((12\alpha_{k-n-2} + 5\beta_{k-n-2}) n(n+1)\alpha_{n+2} - 18n(k-n-2)\alpha_{n+1}\alpha_{k-n-1} \right) + \\ +2\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{n=1}^{m-1} \left((10\alpha_{k-m} - 21\beta_{k-m})\alpha_{m-n} + 3\beta_{m-n}\beta_{k-m} \right)\alpha_n + 6\sum_{m=2}^{k-2}\sum_{n=1}^{m-1} (\beta_{m-n}\beta_{k-m-1} - 5\alpha_{m-n}\beta_{k-m-1}) n\alpha_{n+1} + \\ \left. +2\sum_{p=3}^{k-1}\sum_{m=2}^{p-1}\sum_{n=1}^{m-1} (10\alpha_{p-m}\beta_{k-p} - 3\beta_{p-m}\beta_{k-p})\alpha_n\alpha_{m-n} \right),\ k = 4, 5, 6, \ldots . \end{gathered} \tag{20}$$

Покажем, что ряды (17), (18) сходятся при $0 < |t - t_0| < \delta$.

Если положить

$$x = \tau^{-1}\left(-\frac{1}{2} + u_1\right),\ x' = \tau^{-2}\left(\frac{1}{2} + u_2\right),\ x'' = \tau^{-3}\left(-1 + u_3\right),\ y = \tau^{-1}\left(1 + u_4\right),$$

где $\tau = t - t_0$, то из системы (14) для функций u_k, $k = 1,2,3,4$, получим систему Брио и Буке

$$\begin{cases} \tau u_1' = u_1 + u_2, \\ \tau u_2' = 2u_2 + u_3, \\ \tau u_3' = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 3u_4 + g(u_1, u_2, u_3, u_4), \\ \tau u_4' = 2u_1 + 2u_1u_4, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} g(u_1, u_2, u_3, u_4) = -36u_1^2 - 18u_2^2 + \frac{3}{2}u_4^2 - 30u_1u_2 + 12u_1u_3 + 12u_1u_4 + 27u_2u_4 + 5u_3u_4 + \\ +20u_1^3 - 30u_1u_2u_4 - 42u_1^2u_4 + 6u_1u_4^2 + 6u_2u_4^2 - 6u_1^2u_4^2 + 20u_1^3u_4. \end{gathered}$$

Определяющее уравнение системы (21) имеет вид $\begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-r & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 2-r & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = 0$, откуда $(r-1)(r-2)(r-3)(r+1)=0$. Видим, что элементарные делители $r-1$, $r-2$, $r-3$, $r+1$ матрицы системы (21) простые. Значит, решение системы (21) можно представить в виде рядов

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (t-t_0)^k,\, u_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (t-t_0)^k,\, u_3 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (t-t_0)^k,\, u_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (t-t_0)^k, \tag{22}$$

которые сходятся при $|t-t_0|<\delta$ [10, 11]. Подставляя (22) в систему (21), получим $t_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ – произвольные, $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$, остальные коэффициенты α_k, $k=2, 3, 4,\ldots$, β_k, $k=4, 5, 6,\ldots$, определяются по рекуррентным формулам, аналогичным (19), (20) соответственно, и $c_k = (k-1)\alpha_k$, $d_k = (k-1)(k-2)\alpha_k$, $k=1, 2, 3,\ldots$.

Итак, имеет место

Т е о р е м а 2. *Ряд*

$$y = \frac{1}{t-t_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (t-t_0)^{k-1} \tag{23}$$

представляет общее решение уравнения (6) *в области* $0<|t-t_0|<\delta$, $\delta>0$. *Здесь* t_0, β_1, β_2, β_3 – *произвольные постоянные, а коэффициенты* β_k, $k=4, 5, 6,\ldots$, *определяются единственным образом по рекуррентным формулам* (19), (20).

З а м е ч а н и е 2. С учетом инвариантности уравнения (6) при преобразовании (1), полагая $t-t_0 = a + \frac{h}{z-z_0}$, где считаем $|a| + \left|\frac{h}{z-z_0}\right| < \delta_1$, $|a| < \frac{1}{2}\delta_1$, $0<\delta_1<\delta$, из (23) получим

$$y = -\frac{h}{(z-z_0)^2}\left(\frac{1}{a+\frac{h}{z-z_0}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(a+\frac{h}{z-z_0}\right)^k\right), \tag{24}$$

где $\alpha_k = \beta_{k+1}$, $k=0, 1, 2,\ldots$. Поскольку $0 < \left|a+\frac{h}{z-z_0}\right| \le |a| + \left|\frac{h}{z-z_0}\right| < \delta_1 < \delta$, будем иметь $\frac{|h|}{|z-z_0|} < \delta_1 - |a|$, откуда $|z-z_0| > \frac{|h|}{\delta_1-|a|} > 0$. Значит, разложение (24) имеет место в области $|z-z_0| > \frac{|h|}{\delta_1-|a|}$.

Поскольку $\frac{h}{a(z-z_0)+h} = 1 - \frac{a}{h}(z-z_0) + \left(\frac{a}{h}\right)^2 (z-z_0)^2 + \ldots = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{a}{h}\right)^{k+1} (z-z_0)^{k+1}$, где $\left|\frac{a}{h}(z-z_0)\right| < 1$, то (24) можно записать в виде

$$y = -\frac{1}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{a}{h}\right)^{k+1} (z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} C_k^n \alpha_k a^{k-n} h^{n+1} (z-z_0)^{-n-2},$$

или

$$y = -\frac{1}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{a}{h}\right)^{k+1} (z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{h^{k+1}}{(z-z_0)^{k+2}}, \tag{25}$$

где $\varphi(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k a^k$, $\varphi^{(k)}(a)=\dfrac{d^k\varphi}{da^k}$. Таким образом, общее решение уравнения (6), соответствующее резонансам $r=-1,-2,-3,1$, имеет вид (25). При этом разложение (25) имеет место при

$$\frac{|h|}{\delta_1-|a|}<|z-z_0|<\left|\frac{h}{a}\right|.$$

Если в рядах (17), (18) положить $t_0=C_1$, $\beta_i=\dfrac{1}{(C_2-C_1)^i}$, $i=1,2,3$, то получим $\alpha_1=\dfrac{1}{2(C_2-C_1)}$ и из (19), (20) $\alpha_2=\dfrac{1}{2(C_2-C_1)^2}$, $\beta_4=\dfrac{1}{(C_2-C_1)^4}$. Предположим, что для всех $n<k$ верно $\alpha_n=\dfrac{1}{2(C_2-C_1)^n}$, $\beta_n=\dfrac{1}{(C_2-C_1)^n}$. Покажем, что тогда $\alpha_k=\dfrac{1}{2(C_2-C_1)^k}$, $\beta_k=\dfrac{1}{(C_2-C_1)^k}$.

Из (19) имеем

$$\alpha_k=\frac{k}{2}\beta_k-\sum_{n=1}^{k-1}\alpha_n\beta_{k-n}=\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{(C_2-C_1)^k}-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2(C_2-C_1)^n}\cdot\frac{1}{(C_2-C_1)^{k-n}}=$$
$$=\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{(C_2-C_1)^k}-\frac{k-1}{2}\cdot\frac{1}{(C_2-C_1)^k}=\frac{1}{2(C_2-C_1)^k}.$$

Из (20) получим

$$\beta_k=\frac{2}{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)}\left(\frac{1}{2(C_2-C_1)^k}\sum_{n=1}^{k-1}\left(k^3-5k^2+5k+2\right)+\frac{6}{(C_2-C_1)^k}\sum_{n=1}^{k-2}n+\right.$$
$$+\frac{1}{2(C_2-C_1)^k}\sum_{n=1}^{k-3}\left(20n^2-(9k-29)n\right)-\frac{5}{(C_2-C_1)^k}\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{n=1}^{m-1}1-\frac{9}{2(C_2-C_1)^k}\sum_{m=2}^{k-2}\sum_{n=1}^{m-1}n+$$
$$\left.+\frac{1}{(C_2-C_1)^k}\sum_{p=3}^{k-1}\sum_{m=2}^{p-1}\sum_{n=1}^{m-1}1\right)=\frac{2}{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)}\cdot\frac{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)}{2(C_2-C_1)^k}=\frac{1}{(C_2-C_1)^k}.$$

На основании метода математической индукции заключаем, что $\alpha_k=\dfrac{1}{2(C_2-C_1)^k}$, $\beta_k=\dfrac{1}{(C_2-C_1)^k}$, $k=1,2,3,\ldots$. Тогда из (23) при $|t-C_1|<|C_2-C_1|$ получим

$$y=\frac{1}{t-C_1}-\frac{1}{t-C_2},\tag{26}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Подставляя (26) в (6), убеждаемся, что (26) является двухпараметрическим решением уравнения (6).

Справедлива

Т е о р е м а 3. *Уравнение* (6) *имеет двухпараметрическое рациональное решение вида* (26).

Если искать решение системы (14) в виде рядов Дирихле

$$x=\gamma_1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{-kt},\ y=\gamma_2+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e^{-kt},$$

для коэффициентов γ_1, γ_2 получим следующие наборы значений: $\left\{-\frac{1}{2};0\right\}$, $\{0;1\}$, $\left\{0;-\frac{1}{6}\right\}$.

В случае $\gamma_1=-\frac{1}{2}$, $\gamma_2=0$ имеем ряды

$$x=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{-kt},\ y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e^{-kt},\tag{27}$$

где β_1 – произвольное, $\alpha_1=-\frac{1}{2}\beta_1$, $\alpha_2=-\frac{1}{2}\beta_1{}^2$, $\alpha_3=-\frac{1}{2}\beta_1{}^3$, остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k=\frac{1}{k^2(k-6)}\left(\frac{5}{2}\beta_k-\sum_{n=1}^{k-1}\left(\left(30n^2-18nk\right)\alpha_n\alpha_{k-n}+5\left(n^2-3n+3\right)\alpha_n\beta_{k-n}-\frac{3}{2}\beta_n\beta_{k-n}\right)-\right.$$
$$-\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{n=1}^{m-1}6\left(n-1\right)\left(5\alpha_n\alpha_{m-n}\beta_{k-m}-\alpha_n\beta_{m-n}\beta_{k-m}\right)-$$
$$\left.-\sum_{l=3}^{k-1}\sum_{m=2}^{l-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left(20\alpha_n\alpha_{m-n}\alpha_{l-m}\beta_{k-l}-6\alpha_n\alpha_{m-n}\beta_{l-m}\beta_{k-l}\right)\right),\ k=4,5,6,..., \tag{28}$$

$$\beta_k=\frac{2}{1-k}\sum_{n=1}^{k-1}\alpha_n\beta_{k-n},\ k=2,3,4,... . \tag{29}$$

Из (28), (29) имеем $\alpha_4=-\frac{1}{2}\beta_1{}^4$, $\beta_2=\beta_1{}^2$. Предположим, что для всех $n<k$ верно $\alpha_n=-\frac{1}{2}\beta_1{}^n$, $\beta_n=\beta_1{}^n$. Покажем, что тогда $\alpha_k=-\frac{1}{2}\beta_1{}^k$, $\beta_k=\beta_1{}^k$.

Из (28) получим

$$\alpha_k=\frac{1}{k^2(k-6)}\left(\frac{5}{2}\beta_1{}^k-\beta_1{}^k\sum_{n=1}^{k-1}\left(5n^2-\frac{1}{2}\left(9k-15\right)n-9\right)-\frac{21}{2}\beta_1{}^k\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left(n-1\right)+\right.$$
$$\left.+4\beta_1{}^k\sum_{l=3}^{k-1}\sum_{m=2}^{l-1}\sum_{n=1}^{m-1}1\right)=\frac{1}{k^2\left(k-6\right)}\cdot\beta_1{}^k\cdot\left(-\frac{k^2\left(k-6\right)}{2}\right)=-\frac{1}{2}\beta_1{}^k.$$

Из (29) имеем

$$\beta_k=\frac{2}{1-k}\sum_{n=1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\beta_1{}^n\right)\beta_1{}^{k-n}=-\frac{1}{1-k}\cdot\beta_1{}^k\cdot\sum_{n=1}^{k-1}1=-\frac{1}{1-k}\cdot\beta_1{}^k\cdot\left(k-1\right)=\beta_1{}^k.$$

На основании метода математической индукции заключаем, что $\alpha_k=-\frac{1}{2}\beta_1{}^k$, $\beta_k=\beta_1{}^k$, $k=1,2,3,...$. Тогда абсцисса абсолютной сходимости рядов (27) [12, с. 115]

$$c=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ln\sqrt[k]{|\alpha_k|}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ln\sqrt[k]{|\beta_k|}=\ln\left|\beta_1\right|=\ln\left|\beta\right|. \tag{30}$$

Из (27) при $\left|t\right|>\ln\left|\beta\right|$ получим

$$x=-\frac{e^t}{2(e^t-\beta)},\ y=\frac{\beta}{e^t-\beta}. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (14), убеждаемся, что (31) является решением системы (14).

При $\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$ получаем

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_ke^{-kt},\ y=1+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_ke^{-kt}, \tag{32}$$

где β_1 – произвольное, $\alpha_1=-\frac{1}{2}\beta_1$, $\alpha_2=-\frac{1}{2}\beta_1{}^2$, $\alpha_3=-\frac{1}{2}\beta_1{}^3$, остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k=\frac{1}{k(k+6)(k-1)}\left(-\sum_{n=1}^{k-1}\left(6\left(5n^2-(3k-5)n-1\right)\alpha_n\alpha_{k-n}+\left(5n^2-12n\right)\alpha_n\beta_{k-n}\right)-\right.$$
$$-\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left(20\alpha_n\alpha_{m-n}\alpha_{k-m}+6(5n-2)\alpha_n\alpha_{m-n}\beta_{k-m}-6n\alpha_n\beta_{m-n}\beta_{k-m}\right)-$$

$$-\sum_{l=3}^{k-1}\sum_{m=2}^{l-1}\sum_{n=1}^{m-1}\left(20\alpha_n\alpha_{m-n}\alpha_{l-m}\beta_{k-l}-6\alpha_n\alpha_{m-n}\beta_{l-m}\beta_{k-l}\right)\Bigg),\ k=4,\ 5,\ 6,\ldots,$$

$$\beta_k=-\frac{2}{k}\left(\alpha_k+\sum_{n=1}^{k-1}\alpha_n\beta_{k-n}\right),\ k=2,\ 3,\ 4,\ldots .$$

Аналогично, как и в случае $\gamma_1=-\frac{1}{2}$, $\gamma_2=0$, используя метод математической индукции, можно показать, что $\alpha_k=-\frac{1}{2}\beta^k$, $\beta_k=\beta^k$, $k=1,\ 2,\ 3,\ldots$, для $\forall\beta_1=\beta$. Абсцисса абсолютной сходимости рядов (32) определяется формулой (30).

Из (32) при $|t|>\ln|\beta|$ получим

$$x=-\frac{\beta}{2(e^t-\beta)},\ y=\frac{e^t}{e^t-\beta}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (14), убеждаемся, что (33) является решением системы (14).

Поскольку уравнение (6) инвариантно при преобразовании (1), полагая $f(t)=\frac{h}{t-t_0}-\ln A$, из (31) и (33) получим трехпараметрические решения уравнения (6) соответственно:

$$y=-\frac{hC}{(t-t_0)^2\left(\exp\left(\frac{h}{t-t_0}\right)-C\right)}, \tag{34}$$

где $C=\beta A$, h, t_0 – произвольные постоянные,

$$y=-\frac{h\exp\left(\frac{h}{t-t_0}\right)}{(t-t_0)^2\left(\exp\left(\frac{h}{t-t_0}\right)-\beta\right)}, \tag{35}$$

где h, t_0, β – произвольные постоянные.

З а м е ч а н и е 3. Трехпараметрические решения (34), (35) являются частными. Можно показать, что уравнению (6) в области $|t-t_0|>R$ удовлетворяет ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{(t-t_0)^{k+2}}, \tag{36}$$

где α_0, α_2, α_3, t_0 – произвольные постоянные, коэффициенты α_1, α_k, $k=4,5,6,\ldots$, определяются единственным образом по рекуррентным формулам. Если положить $\alpha_0=\frac{Ch}{C-1}$, $\alpha_2=\frac{C(C+1)}{2}\left(\frac{h}{C-1}\right)^3$, $\alpha_3=\frac{C\left(C^2+4C+1\right)}{6}\left(\frac{h}{C-1}\right)^4$, то ряд (36) совпадает с тем, который получим при разложении (34) в ряд Лорана по степеням $\left(t-t_0\right)^{-1}$. Если же $\alpha_0=\frac{h}{\beta-1}$, $\alpha_2=\frac{\beta(\beta+1)}{2}\left(\frac{h}{\beta-1}\right)^3$, $\alpha_3=\frac{\beta\left(\beta^2+4\beta+1\right)}{6}\left(\frac{h}{\beta-1}\right)^4$, то ряд (36) совпадает с рядом, который получим при разложении (35) в ряд Лорана по степеням $\left(t-t_0\right)^{-1}$.

В случае $\gamma_1=0$, $\gamma_2=-\frac{1}{6}$ имеем ряды

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{-kt}, \tag{37}$$

$$y=-\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e^{-kt}, \tag{38}$$

где α_1 – произвольное, $\alpha_2 = \frac{53}{26}\alpha_1^2$, $\alpha_3 = \frac{5101}{2964}\alpha_1^3$, $\beta_1 = \frac{1}{3}\alpha_1$, остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k = \frac{6}{k(6k+1)(k-1)}\left(\sum_{m=1}^{k-1}\left(\left(-12m^2 + 18m(k-m) + 5m + \frac{1}{6}\right)\alpha_m\alpha_{k-m} - (5m^2+2m)\alpha_m\beta_{k-m}\right) - \right.$$
$$-2\sum_{p=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{p-1}\left(\left(15m+1\right)\alpha_m\alpha_{p-m}\beta_{k-p} - \frac{5}{3}\alpha_m\alpha_{p-m}\alpha_{k-p} - 3m\alpha_m\beta_{p-m}\beta_{k-p}\right) +$$
$$\left. +2\sum_{l=3}^{k-1}\sum_{p=2}^{l-1}\sum_{m=1}^{p-1}\left(3\beta_{l-p}\beta_{k-l} - 10\alpha_{l-p}\beta_{k-l}\right)\alpha_m\alpha_{p-m}\right), k = 4, 5, 6, \ldots, \quad (39)$$

$$\beta_k = \frac{1}{3k}\alpha_k - \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{k-1}\alpha_m\beta_{k-m}, k = 2, 3, 4, \ldots . \quad (40)$$

Покажем, что существуют $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ln\sqrt[k]{|\alpha_k|}$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ln\sqrt[k]{|\beta_k|}$. Обозначим

$$M = \frac{\delta}{66} - \frac{1472}{11\delta} - \frac{2}{11}, \delta = \left(277451 + 132\sqrt{43957353}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (41)$$

За счет выбора α_1 можем сделать $|\alpha_1| \le \zeta$. Тогда $|\alpha_2| = \frac{53}{26}\alpha_1^2 \le \frac{53}{26}\zeta^2 \le \zeta$, $|\alpha_3| = \frac{5101}{2964}\left|\alpha_1^3\right| \le \frac{5101}{2964}\zeta^3 \le \zeta$, $|\beta_1| = \frac{1}{3}|\alpha_1| \le \frac{1}{3}\zeta$, если $0 < \zeta \le M$. Предположим, что для всех $m < k$ верно $|\alpha_m| \le \zeta$, $|\beta_m| \le \frac{1}{3}\zeta$. Покажем, что тогда $|\alpha_k| \le \zeta$, $|\beta_k| \le \frac{1}{3}\zeta$.

$$|\alpha_k| = \left|\frac{6}{k(6k+1)(k-1)}\left(\sum_{m=1}^{k-1}\left(\left(-12m^2 + 18m(k-m) + 5m + \frac{1}{6}\right)\alpha_m\alpha_{k-m} - (5m^2+2m)\alpha_m\beta_{k-m}\right) - \right.\right.$$
$$-2\sum_{p=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{p-1}\left(\left(15m+1\right)\alpha_m\alpha_{p-m}\beta_{k-p} - \frac{5}{3}\alpha_m\alpha_{p-m}\alpha_{k-p} - 3m\alpha_m\beta_{p-m}\beta_{k-p}\right) +$$
$$\left.\left. +2\sum_{l=3}^{k-1}\sum_{p=2}^{l-1}\sum_{m=1}^{p-1}\left(3\beta_{l-p}\beta_{k-l} - 10\alpha_{l-p}\beta_{k-l}\right)\alpha_m\alpha_{p-m}\right)\right| \le$$
$$\le \frac{6}{k(6k+1)(k-1)}\left(\sum_{m=1}^{k-1}\left(\left(12m^2 + 18m(k-m) + 5m + \frac{1}{6}\right)|\alpha_m||\alpha_{k-m}| + (5m^2+2m)|\alpha_m||\beta_{k-m}|\right) + \right.$$
$$+2\sum_{p=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{p-1}\left(\left(15m+1\right)|\alpha_m||\alpha_{p-m}||\beta_{k-p}| + \frac{5}{3}|\alpha_m||\alpha_{p-m}||\alpha_{k-p}| + 3m|\alpha_m||\beta_{p-m}||\beta_{k-p}|\right) +$$
$$\left. +2\sum_{l=3}^{k-1}\sum_{p=2}^{l-1}\sum_{m=1}^{p-1}\left(3|\beta_{l-p}||\beta_{k-l}| + 10|\alpha_{l-p}||\beta_{k-l}|\right)|\alpha_m||\alpha_{p-m}|\right)\Bigg| \le \frac{6}{k(6k+1)(k-1)} \times$$
$$\times\left(\left(\frac{11}{9}\zeta^4 + \frac{2}{3}\zeta^3 + \frac{68}{9}\zeta^2\right)k^3 - \left(\frac{22}{3}\zeta^4 + \frac{5}{3}\zeta^3 + 4\zeta^2\right)k^2 + \left(\frac{121}{9}\zeta^4 - 3\zeta^3 - \frac{61}{18}\zeta^2\right)k - \right.$$
$$\left. -\frac{22}{3}\zeta^4 + \frac{22}{3}\zeta^3 - \frac{1}{6}\zeta^2\right) \le \frac{11}{9}\zeta^4 + \frac{2}{3}\zeta^3 + \frac{68}{9}\zeta^2 \le \zeta, \text{ если } 0 < \zeta \le M.$$

$$|\beta_k| = \left|\frac{1}{3k}\alpha_k - \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{k-1}\alpha_m\beta_{k-m}\right| \le \frac{1}{3k}|\alpha_k| + \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{k-1}|\alpha_m||\beta_{k-m}| \le \frac{2}{3}\zeta^2 + \frac{1}{3k}\zeta\left(1 - 2\zeta^2\right) \le \frac{1}{3}\zeta, \text{ если } 0 < \zeta \le M.$$

На основании метода математической индукции заключаем, что $|\alpha_k| \le \zeta$, $|\beta_k| \le \frac{1}{3}\zeta$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, если ζ подчинено условию $0 < \zeta \le M$, где M взято из (41).

Используя полученные оценки, можем записать

$$\ln\sqrt[k]{|\alpha_k|} \le \frac{1}{k}\ln|\zeta|,\ \ln\sqrt[k]{|\beta_k|} \le \frac{1}{k}\ln\left|\frac{\zeta}{3}\right|,\ k = 1,2,3,...,$$

откуда следует, что справедлива

Л е м м а. *Существуют пределы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ln\sqrt[k]{|\alpha_k|} = \sigma_1,\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ln\sqrt[k]{|\beta_k|} = \sigma_2,$$

где α_k, β_k*,* $k = 1,2,3,...$ *– коэффициенты рядов* (37)*,* (38).

Числа σ_1, σ_2 являются абсциссами абсолютной сходимости рядов (37), (38) соответственно, поэтому ряды (37), (38) сходятся абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} t > \sigma$, где

$$\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}. \qquad (42)$$

Поскольку уравнение (6) инвариантно при преобразовании (1), полагая $f(t) = \dfrac{h}{t-t_0} - \ln A$, из (38) получим трехпараметрическое решение уравнения (6)

$$y = \frac{h}{6(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k A^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \qquad (43)$$

где A, h, t_0 – произвольные постоянные, $\beta_1 = \dfrac{1}{3}$, остальные коэффициенты β_k, $k = 2, 3, 4,...$, определяются единственным образом по рекуррентным формулам (39), (40), где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \dfrac{53}{26}$, $\alpha_3 = \dfrac{5101}{2964}$.

З а м е ч а н и е 4. Трехпараметрическое решение (43) является частным. Аналогично, как и в замечании 3, можно указать такие α_0, α_2, α_3, что ряд (36) совпадет с тем, который получим при разложении (43) в ряд Лорана по степеням $(t-t_0)^{-1}$.

Ряд (43) будет абсолютно сходящимся при условии

$$\operatorname{Re}\frac{h}{t-t_0} > \mu, \qquad (44)$$

где $\mu = \sigma + \ln|A|$, σ взято из (42).

Из (44) следует $\dfrac{\overline{h}}{\overline{t}-\overline{t_0}} + \dfrac{h}{t-t_0} > 2\mu$. Так как $(t-t_0)(\overline{t}-\overline{t_0}) = (|t-t_0|)^2 > 0$ при $t \ne t_0$, то $2\mu(t-t_0)(\overline{t}-\overline{t_0}) < \overline{h}(t-t_0) + h(\overline{t}-\overline{t_0})$ или

$$2\mu t\overline{t} - (2\mu t_0 + h)\overline{t} - (2\mu\overline{t_0} + \overline{h})t + 2\mu t_0\overline{t_0} + h\overline{t_0} + \overline{h}t_0 < 0. \qquad (45)$$

Неравенством (45) задана область, границей которой является линия с уравнением

$$2\mu t\overline{t} - (2\mu t_0 + h)\overline{t} - (2\mu\overline{t_0} + \overline{h})t + 2\mu t_0\overline{t_0} + h\overline{t_0} + \overline{h}t_0 = 0. \qquad (46)$$

Пусть $\mu \ne 0$. Тогда $2\mu\left((t-t_0)(\overline{t}-\overline{t_0}) - \dfrac{\overline{h}}{2\mu}(t-t_0) - \dfrac{h}{2\mu}(\overline{t}-\overline{t_0})\right) < 0$, $2\mu\left(\left(t-t_0-\dfrac{h}{2\mu}\right)\left(\overline{t}-\overline{t_0}-\dfrac{\overline{h}}{2\mu}\right) - \dfrac{h\overline{h}}{4\mu^2}\right) < 0$, т. е. $2\mu\left(\left|t-t_0-\dfrac{h}{2\mu}\right|^2 - \dfrac{h\overline{h}}{4\mu^2}\right) < 0$. Если $\mu > 0$, то имеем $\left|t-t_0-\dfrac{h}{2\mu}\right|^2 < \dfrac{h\overline{h}}{4\mu^2}$, откуда $\left|t-t_0-\dfrac{h}{2\mu}\right| < \dfrac{|h|}{2\mu}$.

Таким образом, ряд (43) сходится внутри круга с границей (46), имеющего центр в точке $t_1 = t_0 + \frac{h}{2\mu}$ и радиус $R = \frac{|h|}{2\mu}$. Если $\mu < 0$, то получим $\left|t - t_0 - \frac{h}{2\mu}\right| > \frac{|h|}{2|\mu|}$. В этом случае ряд (43) сходится вне круга с границей (46), имеющего центр в точке $t_1 = t_0 + \frac{h}{2\mu}$ и радиус $R = \frac{|h|}{2|\mu|}$. Если $\mu = 0$, то уравнением (46) задана прямая $h\bar{t} + \bar{h}t - h\bar{t}_0 - \bar{h}t_0 = 0$.

Аналогично, как в [6], можно показать, что (46) является подвижной особой линией для ряда (43) и координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии (46), являются существенно особыми для членов ряда (43).

Таким образом, с учетом леммы, заключаем, что справедлива

Т е о р е м а 4. *Уравнение* (6) *имеет трехпараметрические решения* (34), (35), (43). *При этом ряд* (43) *сходится в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением* (46), *и координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов ряда* (43).

Заключение. В работе для уравнения (6) получены следующие результаты:

1) построено общее решение упрощенного для (6) уравнения (7);

2) построено общее решение в виде рядов Лорана, сходящихся в областях:

а) $0 < |t - t_0| < \delta, \delta > 0$; б) $\frac{|h|}{\delta_1 - |a|} < |t - t_0| < \left|\frac{h}{a}\right|, |a| < \frac{\delta_1}{2}, \delta_1 < \delta, \delta > 0$;

3) построены решения в виде рядов Дирихле и трехпараметрические решения в виде рядов по экспонентам от дробно-линейных функций;

4) найдено двухпараметрическое рациональное решение;

5) установлено наличие трехпараметрического решения с подвижной особой линией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М-148).

Литература

1. *Кондратеня С. Г.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 2095–2098.
2. *Shazy J.* // Acta Math. 1911. Vol. 4. P. 317–385.
3. *Мартынов И. П.* // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 227–232.
4. *Мартынов И .П., Яблонский А .И.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1774–1782.
5. *Мартынов И. П., Лысюк Е .С.* // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2012. № 3 (136). С. 38–44.
6. *Ванькова Т. Н., Мартынов И. П.* //Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1085–1094.
7. *Мартынов И. П., Лысюк Е. С.* // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2013. № 2 (151). С. 44–50.
8. *Андреева Т. К., Лысюк Е. С., Мартынов И. П., Пронько В. А.* // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2014. № 1 (170). С. 34–41.
9. *Лысюк Е. С.* // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 4 (22). С. 70–77.
10. *Horn J.* // Mathematik. 1896. Bd. 116, Heft 4.
11. *Мартынов И. П.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 10. С. 1780–1791.
12. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.

I. P. MARTYNOV, A. S. LYSIUK

ANALYTICAL PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF A FOURTH-ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Summary

Introduction of the present article indicates the object of investigation: the fourth-order differential equation. The purpose of the research is to study the analytic properties of solutions of the equation considered. In the main part of the article the solution is constructed in the form of the Laurent series. The solutions in the form of Dirichlet series and exponential series with respect to fractional-linear functions have been formulated. The issues of the series convergence, which represent the solution of this fourth-order differential equation, have been explored. The existence of three-parameter solutions with a movable singular line has been established. The obtained results can be used in the analytical theory of ordinary differential equations.