ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.988.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-7-20

Поступила в редакцию 24.11.2021
Received 24.11.2021

В. В. Гороховик[1], А. С. Тыкун[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

СУБДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ, ВЫПУКЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА ЛИПШИЦЕВЫХ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Функция, определенная на нормированном пространстве X, называется выпуклой относительно множества $\mathcal{L}\widehat{C} := \mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ липшицевых классически вогнутых функций (далее для краткости – $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой), если она является верхней огибающей некоторого подмножества функций из $\mathcal{L}\widehat{C}$. Функция является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой в том и только том случае, когда она полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу некоторой липшицевой функцией. В статье вводится понятие $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости функции в точке, т. е. субдифференцируемости относительно липшицевых вогнутых функций, обобщающее понятие субдифференцируемости классически выпуклых функций, и доказывается, что для любой $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой функции множество точек, в которых она является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой, является плотным в ее эффективной области. Данное утверждение распространяет на более широкий класс полунепрерывных снизу функций известную теорему Брондстеда – Рокафеллара о существовании субдифференциала для классически выпуклых полунепрерывных снизу функций. Используя элементы подмножества $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta \subset \mathcal{L}\widehat{C}$, состоящего из таких липшицевых вогнутых функций, которые принимают нулевое значение в нулевой точке пространства X, определяются понятия $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субградиента и $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциала функции в точке. Исследуются свойства $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциалов и их связь с классическим субдифференциалом Фенхеля – Рокафеллара. Рассматривая в качестве элементарных функций множество $\mathcal{L}\breve{C} := \mathcal{L}\breve{C}(X,\mathbb{R})$ липшицевых выпуклых (в классическом смысле) функций, вводятся симметричные $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклости и $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости понятия $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутости и $\mathcal{L}\breve{C}$-супердифференцируемости функций. В терминах $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциалов и $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференциалов устанавливаются критерии для точек глобального минимума и максимума функций.

Ключевые слова: абстрактная выпуклость, полунепрерывные функции, липшицевы функции, вогнутые функции, субдифференцируемость, субдифференциал, глобальный экстремум

Для цитирования. Гороховик, В. В. Субдифференцируемость функций, выпуклых относительно множества липшицевых вогнутых функций / В. В. Гороховик, А. С. Тыкун // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 7–20. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-7-20

Valentin. V. Gorokhovik[1], Alexander. S. Tykoun[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belorussian State University, Minsk, Republic of Belarus

THE SUBDIFFERENTIABILITY OF FUNCTIONS CONVEX WITH RESPECT TO THE SET OF LIPSCHITZ CONCAVE FUNCTIONS

Abstract. A function defined on normed vector spaces X is called convex with respect to the set $\mathcal{L}\widehat{C} := \mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ of Lipschitz continuous classically concave functions (further, for brevity, $\mathcal{L}\widehat{C}$-convex), if it is the upper envelope of some subset of functions from $\mathcal{L}\widehat{C}$. A function f is $\mathcal{L}\widehat{C}$-convex if and only if it is lower semicontinuous and bounded from below by a Lipschitz function. We introduce the notion of $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferentiability of a function at a point, i. e., subdifferentiability with respect to Lipschitz concave functions, which generalizes the notion of subdifferentiability of classically convex functions, and prove that for each $\mathcal{L}\widehat{C}$-convex function the set of points at which it is $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferentiable is dense in its effective domain. The last result extends the well-known Brondsted – Rockafellar theorem on the existence of the subdifferential for classically convex lower semicontinuous functions to the more wide class of lower semicontinuous functions. Using elements of the subset $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta \subset \mathcal{L}\widehat{C}$, which consists of Lipschitz continuous functions vanishing at the origin of X we introduce the notions of $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-subgradient and $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-subdifferential for a function at a point.

The properties of $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferentials and their relations with the classical Fenchel – Rockafellar subdifferential are studied. Considering the set $\mathcal{L}\breve{C} := \mathcal{L}\breve{C}(X,\mathbb{R})$ of Lipschitz continuous classically convex functions as elementary ones we define the notions of $\mathcal{L}\breve{C}$-concavity and $\mathcal{L}\breve{C}$-superdifferentiability that are symmetric to the $\mathcal{L}\widehat{C}$-convexity and $\mathcal{L}\widehat{C}$-subdifferentiability of functions. We also derive criteria for global minimum and maximum points of nonsmooth functions formulated in terms of $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-subdifferentials and $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-superdifferentials.

Keywords: abstract convexity, semicontinuous functions, Lipschitz functions, concave functions, subdifferentiability, subgradient, subdifferential, global extremum

For citation. Gorokhovik V. V., Tykoun A. S. The subdifferentiability of functions convex with respect to the set of Lipschitz concave functions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 7–20 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-7-20

Введение. Настоящая статья относится к одному из интенсивно развивающихся в настоящее время направлений современного негладкого анализа, известному как теория абстрактной выпуклости. Основные идеи этой теории были сформулированы еще в 1970-е гг. советскими математиками С. С. Кутателадзе и А. М. Рубиновым в статье [1] и монографии [2]. Практически сразу же они были подхвачены польскими математиками С. Долецким и С. Курцюшем [3], однако углубленное развитие эта теория получила несколько позднее в основополагающих монографиях С. Ролевича и Д. Паллашке [4], И. Зингера [5] и А. М. Рубинова [6].

Как известно (см., напр., [7]), любая полунепрерывная снизу классически выпуклая функция является верхней огибающей ее непрерывных аффинных минорант. Предметом исследования абстрактной теории выпуклости также являются функции, которые допускают представление в виде верхней огибающей некоторого подмножества из заранее выбранного и зафиксированного множества функций, рассматриваемых как элементарные. Вследствие данного характеристического свойства абстрактно выпуклых функций для них оказались справедливыми аналоги многих положений и результатов классического выпуклого анализа, что позволило распространить целый ряд методов исследования классических выпуклых задач на задачи с абстрактно выпуклыми данными (см. [8–12] и цитируемую в них литературу).

В данной статье рассматриваются абстрактно $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклые функции, порожденные множеством $\mathcal{L}\widehat{C} := \mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ липшицевых вогнутых (в классическом смысле) функций как множеством элементарных функций ($\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, X – вещественное нормированное пространство). Этот класс абстрактно выпуклых функций был введен ранее в статьях [13–16]. Продолжая исследования данного класса функций, мы определяем здесь понятие $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости функций, т. е. субдифференцируемости относительно множества липшицевых классически вогнутых функций, а также понятия $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субградиента и $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциала функции в точке, при этом $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$ является подмножеством множества $\mathcal{L}\widehat{C}$, состоящем из таких липшицевых вогнутых функций, которые принимают нулевое значение в нулевой точке пространства X. Доказывается, что для любой $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой функции множество точек, в которых она является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой, является плотным в ее эффективной области. Данное утверждение распространяет на более широкий класс полунепрерывных снизу функций известную теорему Брондстеда – Рокафеллара [17] о существовании субдифференциала Фенхеля – Рокафеллара для классически выпуклых полунепрерывных снизу функций. Исследуются свойства $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциала и его связь с классическим субдифференциалом Фенхеля – Рокафеллара. Используя в качестве элементарных функций множество $\mathcal{L}\breve{C} := \mathcal{L}\breve{C}(X,\mathbb{R})$ липшицевых выпуклых (в классическом смысле) функций и операцию нахождения точной нижней грани по подмножествам из $\mathcal{L}\breve{C}$ как средство построения нового класса функций, вводятся понятия $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутости и $\mathcal{L}\breve{C}$-супердифференцируемости функций, симметричные $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклости и $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости. В терминах $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциалов и $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференциалов устанавливаются критерии для точек глобального минимума и максимума функций.

Необходимые сведения о классически и абстрактно выпуклых функциях. Основными объектами исследования данной статьи являются функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, определенные на вещественном нормированном пространстве X и принимающие значения в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *собственной*, если ее *эффективная область* $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid |f(x)| < +\infty\}$ является непустым подмножеством в X.

Множества $\operatorname{epi} f := \{(x,\gamma) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \le \gamma\}$ и $\operatorname{hypo} f := \{(x,\gamma) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \ge \gamma\}$ называются, соответственно, *надграфиком* и *подграфиком* функции f.

Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой* (в классическом смысле), если $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и ее надграфик $\operatorname{epi} f$ является выпуклым множеством в $X \times \mathbb{R}$.

Вогнутой (в классическом смысле) называется такая функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, подграфик которой $\operatorname{hypo} f$ является выпуклым множеством в $X \times \mathbb{R}$ и, кроме того, $f(x) < +\infty$ для всех $x \in X$.

Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *полунепрерывна снизу* (*сверху*) в том и только том случае, когда ее надграфик $\operatorname{epi} f$ (подграфик $\operatorname{hypo} f$) является замкнутым множеством в $X \times \mathbb{R}$.

Очевидно, что f вогнута (полунепрерывна сверху) тогда и только тогда, когда $-f$ является выпуклой (полунепрерывной снизу).

Пусть $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ – пространство непрерывных аффинных функций, определенных на вещественном нормированном пространстве X со значениями в $\mathbb{R}$.

Каждой аффинной функции $a(\cdot) \in \mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ однозначно соответствует непрерывный линейный функционал $x^* \in X^*$ (X^* – пространство, топологически двойственное X) такой, что $a(x) = \langle x^*, x - \overline{x}\rangle + a(\overline{x})$ для всех $x \in X$, где $\overline{x} \in X$ – произвольная фиксированная точка из X.

Из теорем об отделимости выпуклых множеств [7, 18] следует, что для любой собственной полунепрерывной снизу выпуклой функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ существует непрерывная аффинная функция $a(\cdot) \in \mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ такая, что $a(x) \le f(x)$ для всех $x \in X$.

Более того (см. [7], предложение 3.1), для того чтобы собственная функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ была полунепрерывной снизу и выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы множество $S^-\left(\mathcal{A}(X,\mathbb{R}), f\right) := \{a(\cdot) \in \mathcal{A}(X,\mathbb{R}) \mid a(x) \le f(x) \ \forall x \in X\}$ было не пусто и

$$f(x) = \sup\left\{a(x) \mid a(\cdot) \in S^-\left(\mathcal{A}(X,\mathbb{R}), f\right)\right\} \text{ для всех } x \in X. \tag{1}$$

Говорят, что собственная функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является *субдифференцируемой в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, если существует непрерывная аффинная функция $a(\cdot) \in \mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ такая, что

$$a(x) \le f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{и} \quad a(\overline{x}) = f(\overline{x}). \tag{2}$$

Из (2) следует, что если функция f субдифференцируема в некоторой точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, то $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$.

Линейный функционал $x^* \in X^*$ называется *субградиентом функции* $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, если аффинная функция $a(\cdot) : X \ni x \mapsto a(x) := \langle x^*, x - \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (2).

Множество всех субградиентов функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ обозначается символом $\partial f(\overline{x})$ и называется *субдифференциалом* функции f в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$.

Непосредственно из определения субградиента следует равенство

$$\partial f(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid f(x) - f(\overline{x}) \ge \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \ \forall x \in X\}.$$

Если $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f$, то полагают, что $\partial f(\overline{x}) = \varnothing$. Вместе с тем субдифференциал $\partial f(\overline{x})$ может быть пустым и для некоторых $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$.

Теорема Брондстеда – Рокафеллара [17] утверждает, что если X – банахово пространство, т. е. полное нормированное пространство, а собственная функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ выпукла и полунепрерывна снизу, то f субдифференцируема, т. е $\partial f(\overline{x}) \ne \varnothing$, во всех точках некоторого подмножества, плотного в $\operatorname{dom} f$.

В случае, когда пространство X конечномерно (см., напр., [18]), любая собственная выпуклая функция f субдифференцируема в любой точке $\overline{x} \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} f)$, где $\operatorname{ri} M$ – относительная внутренность выпуклого множества M.

Понятие супердифференцируемости функций симметрично понятию субдифференцируемости и может быть определено следующим образом: функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *супердифференцируема в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ тогда и только тогда, когда $-f$ субдифференцируема в $\overline{x}$. Соответственно, линейный функционал $x^* \in X^*$ называется *суперградиентом* функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, если $x^* \in -\partial(-f)(\overline{x})$, т. е. если $-x^*$ является субдифференциалом функции $-f$ в точке $\overline{x}$. Множество всех суперградиентов функции f в точке $\overline{x}$ обозначается символом $\partial^+ f(\overline{x})$ и называется супердифференциалом функции f в точке $\overline{x}$. Справедливо равенство

$$\partial^+ f(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid f(x) - f(\overline{x}) \le \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \,\forall x \in X\}.$$

Как показывает теорема Брондстеда – Рокафеллара, приведенные выше понятия субдифференцируемости и супердифференцируемости эффективно применимы лишь к классически выпуклым и классически вогнутым функциям соответственно. Методы теории абстрактной выпуклости, основы которой, как уже отмечалось выше, были развиты в работах [4–6], позволяют распространить эти понятия на другие классы функций. Основная идея теории абстрактной выпуклости состоит в том, чтобы в равенстве (1), характеризующем полунепрерывные снизу классически выпуклые функции, заменить пространство $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ аффинных функций некоторым другим множеством функций $\mathcal{H} := \mathcal{H}(X,\mathbb{R})$, а операцию поточечного супремума сохранить как средство построения новых функций из подмножеств множества $\mathcal{H}$. Полученные таким образом функции названы абстрактно выпуклыми относительно множества $\mathcal{H}$ или просто $\mathcal{H}$-выпуклыми. Функции из класса $\mathcal{H}$ рассматриваются при этом как элементарные $\mathcal{H}$-выпуклые функции. Настоящая статья посвящена абстрактно выпуклым функциям относительно множества $\mathcal{L}\widehat{C} := \mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$, элементами которого являются всевозможные липшицевы вогнутые (в классическом смысле) функции. Следующий подраздел посвящен рассмотрению данного класса функций и определению для них понятия $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости.

Выпуклость функций относительно липшицевых вогнутых функций и их субдифференцируемость. Говорят (см., напр., [19]), что функция $h : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *удовлетворяет на множестве* $Q \subseteq X$ *условию Липшица* с константой Липшица $k \ge 0$ или что h является *k-липшицевой на множестве* $Q \subseteq X$, если

$$\left|h(x) - h(y)\right| \le k\left\|x - y\right\| \quad \forall\, x, y \in Q. \tag{3}$$

Функция h называется *липшицевой на множестве Q* (*удовлетворяет условию Липшица на Q*), если она является k-липшицевой на Q при некотором $k \ge 0$.

Заметим, что условие (3) эквивалентно неравенству

$$h(y) - k\left\|x - y\right\| \le h(x) \quad \forall\, x, y \in Q, \tag{4}$$

поскольку, поменяв в (4) переменные x и y местами, мы получим второе неравенство, требуемое для выполнения (3).

Из (4) легко видеть, что если функция h является липшицевой на множестве $Q \subset X$, то либо $Q \subset \operatorname{dom} h$, либо $h \equiv +\infty$ или $h \equiv -\infty$. В частности, если собственная функция $h : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является липшицевой на всем пространстве X, то $\operatorname{dom} h = X$ и, следовательно, она является вещественнозначной.

Множество всех собственных функций $h : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющих условию Липшица на всем пространстве X, будем обозначать символом $\mathcal{L} := \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$.

Ниже, говоря о липшицевых функциях, мы будем предполагать, если не оговорено иное, что они являются липшицевыми на всем пространстве X, не подчеркивая это каждый раз специально.

Как уже отмечалось во введении, символом $\mathcal{L}\widehat{C} := \mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ будем обозначать множество собственных липшицевых вогнутых (в классическом смысле) функций.

Для произвольной функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ множество $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f) := \{h \in \mathcal{L}\widehat{C} \mid h \le f\}$, где $h \le f$ тогда и только тогда, когда $h(x) \le f(x)$ для всех $x \in X$, будем называть *нижней* $\mathcal{L}\widehat{C}$*-опорой функции f*, а функции h из $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ – $\mathcal{L}\widehat{C}$*-минорантами функции f.*

Так как функции из $\mathcal{L}\widehat{C}$ являются вещественнозначными, то выполнение для функции f условия $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f) \neq \varnothing$ влечет, что $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$.

Определение 1 [14, 15]. Функцию $f: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *$\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой*, если $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f) \neq \varnothing$ и, кроме того,

$$f(x) = \sup\ \{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)\} \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{5}$$

Данное выше определение эквивалентно следующему утверждению: функция f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой в том и только том случае, когда для нее можно указать такое непустое множество функций $\mathcal{F}$ из $\mathcal{L}\widehat{C}(X, \mathbb{R})$, что f удовлетворяет равенству

$$f(x) = \sup\ \{h(x) \mid h \in \mathcal{F}\} \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{6}$$

Отметим, что функция $f \equiv +\infty$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой, поскольку она удовлетворяет равенству (6) при $\mathcal{F} = \mathcal{L}\widehat{C}(X, \mathbb{R})$. В то же время для функции $f \equiv -\infty$ нижняя опора $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ является пустым множеством и, следовательно, $f \equiv -\infty$ не является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой.

Предложение 1 [14, 15]. *Любая липшицева на X функция $f: X \mapsto \mathbb{R}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой.*

Доказательство. Если функция $f: X \mapsto \mathbb{R}$ является липшицевой с константой $k \geq 0$, то для нее выполнено неравенство (4), из которого следует равенство $f(x) = \max\limits_{h \in \mathcal{F}} h(x)$ для всех $x \in X$, где $\mathcal{F} := \{x \mapsto f(y) - k\|x - y\| \mid y \in X\}$. Поскольку $\mathcal{F}$ принадлежат $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, то функция f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой. Предложение доказано.

Теорема 1 [14, 15]. *Собственная функция $f: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой в том и только том случае, когда она является полунепрерывной снизу и, кроме того, ограничена снизу некоторой липшицевой функцией.*

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку для любой собственной $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой функции f множество $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ не пусто, то f ограничена снизу липшицевой функцией. Кроме того, из равенства (5) следует, что каждая $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклая функция f, как верхняя огибающая семейства непрерывных функций, является полунепрерывной снизу.

Достаточность. Воспользуемся предложением 4.2 из [13], согласно которому любая полунепрерывная снизу функция $f: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, ограниченная снизу некоторой $\overline{k}$-липшицевой функцией, допускает представление в виде

$$f(x) = \sup_{k \geq \overline{k}} f_k(x) \quad \forall x \in X, \tag{7}$$

где $f_k: X \mapsto \mathbb{R}$ – наибольшая k-липшицева миноранта функции f, при этом последовательность функций $\{f_k\}$ является неубывающей. Поскольку в силу предложения 1 функции f_k являются $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклыми, то для каждого $k \geq \overline{k}$ имеем

$$f_k(x) = \max\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f_k)\} \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Подставляя эти равенства в (7), получим

$$f(x) = \sup\left\{h(x) \;\middle|\; h \in \bigcup_{k \geq \overline{k}} S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f_k)\right\} \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Так как $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f_k) \subset S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ для всех $k \geq \overline{k}$, то из последнего равенства заключаем, что функция f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой. Это завершает доказательство теоремы.

Замечание. Любая полунепрерывная снизу выпуклая в классическом смысле функция $f: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой. Это следует из равенства (1) и включения $\mathcal{A}(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}\widehat{C}(X, \mathbb{R})$, где $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ – пространство непрерывных аффинных функций, определенных на X. Теорема 1 показывает, что класс $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклых функций является нетривиальным расширением класса классически выпуклых функций.

Символом $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ обозначим множество максимальных (относительно поточечного упорядочения) $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант функции *f*, т. е. множество таких функций $\overline{h}$ из $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, для которых из условий $h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, $h \geq \overline{h}$, следует $h = \overline{h}$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Для любой собственной функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, ограниченной снизу некоторой липшицевой функцией, множество ее максимальных $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ не пусто. Более того, для каждой $\mathcal{L}\widehat{C}$-миноранты $h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ существует максимальная $\mathcal{L}\widehat{C}$-миноранта $\overline{h} \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ такая, что $h \leq \overline{h}$ и, следовательно,*

$$\sup\ \{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)\} = \sup\ \{h(x) \mid h \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)\} \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как *f* ограничена снизу некоторой липшицевой и, следовательно, в силу предложения 1 $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой функцией, то $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f) \neq \varnothing$. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольная цепь (относительно поточечного упорядочения) $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант из $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$. Функция $\hat{h} : x \mapsto \sup\limits_{h \in \mathcal{C}} h(x)$ также принадлежит $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, поскольку является липшицевой, классически вогнутой и удовлетворяет неравенству $\hat{h} \leq f$. Кроме того, $h \leq \hat{h}$ для всех $h \in \mathcal{C}$. Таким образом, множество $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ индуктивно относительно поточечного упорядочения. Применяя далее лемму Куратовского – Цорна, убеждаемся в справедливости утверждений предложения.

С л е д с т в и е 1. *Собственная функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой тогда и только тогда, когда множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ не пусто и*

$$f(x) = \sup\left\{h(x) \mid h \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)\right\} \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Отметим, что для любой функции *f* нижнее опорное множество $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ является выпуклым, тогда как множество максимальных $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ выпуклым, вообще говоря, не является.

П р и м е р 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Функции $h_1(x) = 2x - 1$ и $h_2(x) = -2x - 1$ – ее максимальные $\mathcal{L}\widehat{C}$-миноранты. Их выпуклая комбинация $\frac{1}{2}h_1(x) + \frac{1}{2}h_2(x) \equiv -1$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорантой функции *f*, но не максимальной $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорантой.

Будем говорить [14, 15], что $\mathcal{L}\widehat{C}$-миноранта $h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является *опорной в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, если $h(\overline{x}) = f(\overline{x})$. Множество всех $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант функции *f*, опорных в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$.

Множество $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$ не пусто тогда и только тогда, когда

$$f(\overline{x}) = \max\{h(\overline{x}) \mid h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)\},$$

при этом максимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях *h* из $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, которые принадлежат $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$.

Наряду с множеством $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$ будем рассматривать также множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x}) := S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x}) \bigcap S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, состоящее из максимальных $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант функции *f*, опорных в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$.

Заметим, что если непрерывная аффинная функция является $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорантой функции *f*, опорной в некоторой точке $\overline{x}$, то она является максимальной $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорантой функции *f*, опорной в точке $\overline{x}$.

Для классически выпуклых функций справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если собственная функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является полунепрерывной снизу и выпуклой в классическом смысле, то любая ее максимальная $\mathcal{L}\widehat{C}$-миноранта является непрерывной аффинной функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную максимальную $\mathcal{L}\widehat{C}$-миноранту $h \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ функции *f*. Так как $h(x) \leq f(x)\ \ \forall x \in X$ и при этом функция h непрерывна и вогнута, а *f* полунепрерывна снизу и выпукла, то по теореме о сэндвиче [20, Corollary 1.2.10] существует непрерывная аффинная функция $a(\cdot) \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ такая, что $h(x) \leq a(x) \leq f(x)\ \ \forall x \in X$.

Из этого следует, во-первых, что $a(\cdot) \in S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, а во-вторых, поскольку h является максимальным элементом в $S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, что $h(x) = a(x) \;\; \forall\, x \in X$. Предложение 3 доказано.

О п р е д е л е н и е 2. Функцию $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *$\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, если $S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x}) \neq \varnothing$.

Из предложения 2 следует, что функция f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ в том и только том случае, когда не пусто множество $S^{-}_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$ ее максимальных $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант, опорных к f в точке $\overline{x}$.

В следующей теореме представлен простой критерий $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости функции в точке.

Т е о р е м а 2. *Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ тогда и только тогда, когда существует вещественное число* $k \geq 0$ такое, что

$$f(x) \geq f(\overline{x}) - k\|x - \overline{x}\| \quad \forall\, x \in X. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемость функции f в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ эквивалентна условию $S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x}) \neq \varnothing$. Выберем произвольную миноранту $h \in S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$. Так как h является липшицевой, то существует $k \geq 0$ такое, что $|h(x) - h(y)| \leq k\|x - y\|$ для всех $x, y \in X$. Из этого неравенства, полагая $y = \overline{x}$ и учитывая, что $h \leq f$ и $h(\overline{x}) = f(\overline{x})$, приходим к (8).

Предположим теперь, что при некотором $k \geq 0$ имеет место неравенство (8). Заметим, что функция $\tilde{h} : x \mapsto f(\overline{x}) - k\|x - \overline{x}\|$ является липшицевой и вогнутой минорантой f и $\tilde{h}(\overline{x}) = f(\overline{x})$. Следовательно, $S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x}) \neq \varnothing$ и, значит, функция f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой в точке $\overline{x}$. Это завершает доказательство теоремы 2.

С л е д с т в и е 2. *Любая липшицева функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой в любой точке $\overline{x} \in X$.*

Следующая теорема распространяет одну из важнейших теорем классического выпуклого анализа – теорему Брондстеда – Рокафеллара [17] о существовании субдифференциала для классически выпуклых полунепрерывных снизу функций – на более широкий класс $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклых функций. Формулировка классической теоремы Брондстеда – Рокафеллара была приведена во введении.

Т е о р е м а 3. *Если X – банахово пространство, то для любой $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ множество точек, в которых f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой, плотно в* $\operatorname{dom} f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция f $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпукла, то семейство $S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$, состоящее из $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант функции f, не пусто и

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)\} \quad \text{для всех } x \in X. \tag{9}$$

Рассмотрим произвольную точку $a \in \operatorname{dom} f$. Из равенства (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $h \in S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C}, f)$ такая, что $h(a) + \varepsilon \geq f(a)$. Так как h липшицева и, следовательно, непрерывна, а функция f по теореме 1 полунепрерывна снизу, то функция $g : x \mapsto f(x) - h(x)$ также является полунепрерывной снизу и, поскольку $g(x) \geq 0 \, \forall\, x \in X$, ограничена снизу. Кроме того, $g(a) \leq \inf\limits_{x \in X} g(x) + \varepsilon$. В силу вариационного принципа Экланда [7] для любого $\delta > 0$ существует точка $x_\delta \in X$ такая, что

(i) $g(x_\delta) + \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x_\delta - a\| \leq g(a)$;

(ii) $\|x_\delta - a\| \leq \delta$;

(iii) $g(x_\delta) < g(x) + \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_\delta\|$ для всех $x \in X, x \neq x_\delta$.

Из условия *(i)* имеем $f(x_\delta) \leq f(a) + h(x_\delta) - h(a) - \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x_\delta - a\|$. Поскольку функция h липшицева и, значит, принимает только конечные значения, то $f(x_\delta) < +\infty$. Кроме того, $-\infty < h(x_\delta) \leq f(x_\delta)$. Следовательно, $x_\delta \in \operatorname{dom} f$.

В силу условия *(ii)* точка x_δ принадлежит $B_\delta(a):=\{x\in X \mid \|x_\delta - a\|\le\delta\}$. Значит, $x_\delta\in(\operatorname{dom} f)\cap B_\delta(a)$.

Условие *(iii)* перепишем в виде

$$f(x) > h(x) - \frac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_\delta\| + \left(f(x_\delta) - h(x_\delta)\right) \quad \forall x\in X, \quad x\ne x_\delta.$$

Функция $\tilde{h}: x\mapsto h(x) - \frac{\varepsilon}{\delta}\|x - x_\delta\| + \left(f(x_\delta) - h(x_\delta)\right)$ является вогнутой и липшицевой на X и, кроме того, $\tilde{h}(x_\delta) = f(x_\delta)$. Следовательно, функция $\tilde{h}$ является опорной $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорантой функции f в точке x_δ, а это означает, что функция f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой в точке x_δ, причем $x_\delta\in(\operatorname{dom} f)\cap B_\delta(a)$.

Так как точка $a\in\operatorname{dom} f$ и число $\delta > 0$ были выбраны произвольными, то заключаем, что любая окрестность произвольной точки из $\operatorname{dom} f$ содержит точку x_δ, которая также принадлежит $\operatorname{dom} f$ и в которой функция f является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой. Теорема 3 доказана.

В отличие от классически выпуклых функций даже в конечномерном случае $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклая функция может не быть $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой в некоторых внутренних точках эффективной области.

Пример 2. Функция $f(x) = -\sqrt{|x|}$ непрерывна и ограничена снизу липшицевой функцией $h(x) = -|x| - 1$ и, следовательно, является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой, при этом в точке $x = 0$ она не является $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемой.

$\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субградиенты и $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциал функции. Для определения понятий $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субградиента и $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциала функции f в точке $\bar{x}$ необходимы некоторые дополнительные сведения о пространстве липшицевых функций. Напомним, что собственные липшицевы функции являются вещественнозначными.

Функция $f: X\mapsto\mathbb{R}$ является липшицевой (на X) тогда и только тогда, когда

$$\|f\|_{\mathcal{L}} := \sup_{x,y\in X, x\ne y}\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} < +\infty.$$

Величина $\|f\|_{\mathcal{L}}$, называемая *модулем Липшица* функции f, есть нижняя грань множества констант $k\ge 0$, для которых выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le k\|x - y\| \quad \forall x, y\in X.$$

Функция $f\mapsto\|f\|_{\mathcal{L}}$ является полунормой на векторном пространстве $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, причем $\|f - h\|_{\mathcal{L}} = 0$ в том и только том случае, когда $f(x) - h(x)\equiv\text{const} \ \forall x\in X$.

Зафиксируем $\bar{x}\in X$ и определим для $f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ величину

$$\|f\|_{\mathcal{L},\bar{x}} := |f(\bar{x})| + \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Функция $\|\cdot\|_{\mathcal{L},\bar{x}}: x\mapsto|f(\bar{x})| + \|f\|_{\mathcal{L}}$ является нормой на $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, относительно которой нормированное векторное пространство $\left(\mathcal{L}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{L},\bar{x}}\right)$ является полным.

Символом $\mathcal{L}_{\bar{x}}(X,\mathbb{R})$ будем обозначать векторное подпространство в $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, состоящее из таких функций $f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, которые принимают нулевое значение в точке $\bar{x}$, т. е. $\mathcal{L}_{\bar{x}}(X,\mathbb{R}) := \{f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R}) \mid f(\bar{x}) = 0\}$.

Так как $\|f\|_{\mathcal{L},\bar{x}} = \|f\|_{\mathcal{L}}$ для каждой функции $f\in\mathcal{L}_{\bar{x}}(X,\mathbb{R})$, то функция $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ есть норма на $\mathcal{L}_{\bar{x}}(X,\mathbb{R})$, относительно которой $\mathcal{L}_{\bar{x}}(X,\mathbb{R})$ является полным нормированным пространством.

Предложение 4. *Предположим, что последовательность липшицевых функций $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ из банахова пространства $\mathcal{L}_{\bar{x}}(X,\mathbb{R})$ сходится к функции $f(\cdot)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.*

Тогда:

(i) для любого $x\in X$ последовательность вещественных чисел $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(x)$ (т. е., последовательность $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к $f(\cdot)$ на X);

(ii) более того, последовательность $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(\cdot)$ на любом ограниченном подмножестве из X.

Доказательство. Так как нормированное пространство $\left(\mathcal{L}_{\overline{x}}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\mathcal{L}}\right)$ является полным, то $f\in\mathcal{L}_{\overline{x}}(X,\mathbb{R})$. Вследствие этого справедливо неравенство

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|(f_n-f)(x)-(f_n-f)(\overline{x})\right|\le\left\|f_n-f\right\|_{\mathcal{L}}\left\|x-\overline{x}\right\|,$$

которое показывает, что последовательность функций $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(\cdot)$ поточечно на X, причем сходимость является равномерной на каждом ограниченном подмножестве из X. Таким образом, предложение 4 доказано.

Более детальная информация о пространстве липшицевых функций может быть найдена в [19].

Ниже будем рассматривать банахово пространство $\left(\mathcal{L}_{\theta}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\mathcal{L}}\right)$, где θ – нулевая точка пространства X и $\mathcal{L}_{\theta}(X,\mathbb{R}):=\{f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R})\mid f(\theta)=0\}$.

Заметим, что каждой функции $f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ и произвольной точке $(\overline{x},f(\overline{x}))\in X\times\mathbb{R}$, принадлежащей ее графику, однозначно соответствует функция $l:x\mapsto f(x+\overline{x})-f(\overline{x})$ из $\mathcal{L}_{\theta}(X,\mathbb{R})$ такая, что $f(x)=l(x-\overline{x})+f(\overline{x})$ для всех $x\in X$. Обратно, каждой функции $l\in\mathcal{L}_{\theta}(X,\mathbb{R})$ и точке $(\overline{x},c)\in X\times\mathbb{R}$ однозначно соответствует функция $f:x\mapsto l(x-\overline{x})+c$ из $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ такая, что $f(\overline{x})=c$.

Определим множество

$$\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}:=\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}(X,\mathbb{R}):=\{l\in\mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})\mid l(\theta)=0\}.$$

Легко проверить, что $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}(X,\mathbb{R})$ есть замкнутый выпуклый конус в банаховом пространстве $\left(\mathcal{L}_{\theta}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\mathcal{L}}\right)$.

Определение 3. Функцию $l\in\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}(X,\mathbb{R})$ назовем *$\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субградиентом функции $f:X\mapsto\mathbb{R}$ в точке $\overline{x}\in\operatorname{dom}f$*, если соответствующая ей функция $h:x\mapsto l(x-\overline{x})+f(\overline{x})$ принадлежит $S^{-}(\mathcal{L}\widehat{C},f,\overline{x})$, т. е. является $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорантой функции f, опорной в точке $\overline{x}$.

Те функции $l\in\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}(X,\mathbb{R})$, для которых соответствующая им $h:x\mapsto l(x-\overline{x})+f(\overline{x})$ принадлежит $S^{-}_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C},f,\overline{x})$, будем называть *максимальными $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субградиентами функции $f:X\mapsto\mathbb{R}$ в точке $\overline{x}\in\operatorname{dom}f$*.

Множество всех $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субградиентов функции $f:X\mapsto\mathbb{R}$ в точке $\overline{x}\in\operatorname{dom}f$ будем называть *$\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-предсубдифференциалом функции f в точке $\overline{x}$* и обозначать символом $D_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})$.

Подмножество из $D_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})$, состоящее из всех максимальных $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субградиентов функции $f:X\mapsto\mathbb{R}$ в точке $\overline{x}\in\operatorname{dom}f$, будем называть *$\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субдифференциалом функции f в точке $\overline{x}$* и обозначать символом $\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})$.

Предложение 5. *Функция $l\in\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}(X,\mathbb{R})$ является $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субградиентом функции $f:X\mapsto\mathbb{R}$ в точке $\overline{x}\in\operatorname{dom}f$ тогда и только тогда, когда*

$$f(x)-f(\overline{x})\ge l(x-\overline{x})\quad\text{для всех}\ \ x\in X. \tag{10}$$

Доказательство следует непосредственно из определений.

Предложение 6. *Для любой функции $f\in\overline{\mathbb{R}}^{X}$ и точки $\overline{x}\in\operatorname{dom}f$ справедливы следующие утверждения:*

(i) $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-предсубдифференциал $D_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})$ функции f в точке $\overline{x}$ является выпуклым и замкнутым подмножеством в банаховом пространстве $\left(\mathcal{L}_{\theta}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\mathcal{L}}\right)$;

(ii) $l\in\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})$ в том и только том случае, когда l является максимальным (относительно поточечного упорядочения) элементом предсубдифференциала $D_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})$;

(iii) если пространство X – банахово, а функция $f:X\mapsto\overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой, то множество тех $\overline{x}\in X$, для которых $\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})\ne\varnothing$, плотно в $\operatorname{dom}f$;

(iv) если функция $f:X\mapsto\overline{\mathbb{R}}$ полунепрерывна снизу и выпукла в классическом смысле, то любой максимальный $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субградиент функции f в точке $\overline{x}\in\operatorname{dom}f$ является непрерывной линейной функцией и, следовательно, $\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}$-субдифференциал $\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_{\theta}}f(\overline{x})$ и субдифференциал Фенхеля – Рокафеллара $\partial f(\overline{x})$ функции f в точке $\overline{x}$ совпадают, т. е.

$$\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid f(x) - f(\overline{x}) \geq x^*(x - \overline{x}) \,\forall\, x \in X\} =: \partial f(\overline{x}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждений *(i)* и *(ii)* устанавливается непосредственно из определений $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-предсубдифференциала и $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциала. Утверждение *(iii)* следует из теоремы 3. Для доказательства утверждения *(iv)* достаточно воспользоваться предложением 3.

П р е д л о ж е н и е 7. *Если для функции* $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *существует точка* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ *такая, что*

$$X^* \bigcap \partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(\overline{x}) \neq \varnothing, \qquad X^* \bigcap \partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} (-f)(\overline{x}) \neq \varnothing,$$

то f является непрерывной аффинной функцией, при этом

$$\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(\overline{x}) = -\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} (-f)(\overline{x}) = \{x^*\},$$

где $x^* \in X^*$ *– непрерывный линейный функционал такой, что* $f(x) = x^*(x - \overline{x}) + f(\overline{x}), \quad x \in X.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1^* \in X^* \bigcap \partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(\overline{x})$ и $-x_2^* \in X^* \bigcap \partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} (-f)(\overline{x})$. Тогда справедливы неравенства

$$x_1^*(x - \overline{x}) + f(\overline{x}) \leq f(x) \leq x_2^*(x - \overline{x}) + f(\overline{x}) \quad \forall\, x \in X, \tag{11}$$

из которых следует, что $x_1^*(x) \leq x_2^*(x) \;\; \forall\, x \in X$. Это влечет $x_1^* = x_2^* =: x^*$. Учитывая этот факт, из неравенств (10) заключаем, что $f(x) = x^*(x - \overline{x}) + f(\overline{x}) \,\forall\, x \in X$ и, следовательно, $\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(\overline{x}) = -\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} (-f)(\overline{x}) = \{x^*\}$. Утверждение доказано.

П р и м е р 3. Для липшицевой функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определенной равенством $f(x, y) = |x| - |y|$, ее $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифферециал в точке (0,0) равен

$$\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(0,0) = \{h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \mid h_\alpha : (x, y) \mapsto \alpha x - |y|, \; -1 \leq \alpha \leq 1\}.$$

В частности, функции $h_{-1}(x, y) := -x - |y|, \;\; h_0(x, y) := -|y|$ и $h_1(x, y) := x - |y|$ являются максимальными $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субградиентами функции *f* в точке (0,0).

Абстрактно $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутые функции и $\mathcal{L}\breve{C}$-супердифференцируемость. Используя в качестве элементарных функций множество $\mathcal{L}\breve{C} := \mathcal{L}\breve{C}(X, \mathbb{R})$ липшицевых выпуклых (в классическом смысле) функций, посредством операции точной нижней грани (нижней оболочки) по подмножествам функций из $\mathcal{L}\breve{C}$ может быть определен класс $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутых функций. Кратко приведем формулировки определений основных понятий, а также некоторых результатов, связанных с абстрактной $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутостью функций.

Функцию $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ назовем *абстрактно* $\mathcal{L}\breve{C}$*-вогнутой*, если множество $S^+(\mathcal{L}\breve{C}, f) := \left\{ g \in \mathcal{L}\breve{C} \mid f \leq g \right\}$, состоящее из $\mathcal{L}\breve{C}$-мажорант функции *f*, не пусто и

$$f(x) = \inf\{g(x) \mid g \in S^+(\mathcal{L}\breve{C}, f)\} \qquad \text{для всех } x \in X$$

или, эквивалентно, если в $\mathcal{L}\breve{C}$ существует такое непустое подмножество $\mathcal{F}$, что

$$f(x) = \inf\{g(x) \mid g \in \mathcal{F}\} \qquad \text{для всех } x \in X.$$

Так как $\mathcal{L}\breve{C}(X, \mathbb{R}) := -\mathcal{L}\widehat{C}(X, \mathbb{R})$, то нетрудно убедиться в том, что функция *f* является $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутой тогда и только тогда, когда –*f* является $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклой. Таким образом, подобно классическим понятиям выпуклости и вогнутости функций абстрактная $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклость и абстрактная $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутость функций также являются симметричными понятиями. Вследствие отмеченной симметричности из теоремы 1 следует, что функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутой тогда и только тогда, когда она полунепрерывна сверху и ограничена сверху некоторой липшицевой функцией.

Таким образом, класс функций, которые являются как $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклыми, так и $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутыми, совпадает с классом непрерывных вещественнозначных функций, ограниченных снизу и сверху липшицевыми функциями. В частности, липшицевы функции являются как $\mathcal{L}\widehat{C}$-выпуклыми, так и $\mathcal{L}\breve{C}$-вогнутыми.

Функцию $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ назовем *$\mathcal{L}\breve{C}$-супердифференцируемой в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, если существует такая ее $\mathcal{L}\breve{C}$-мажоранта $g \in S^{+}(\mathcal{L}\breve{C}, f)$, что $g(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

Понятие $\mathcal{L}\breve{C}$-супердифференцируемости функции в точке также симметрично понятию $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости. Действительно, $\mathcal{L}\breve{C}$-супердифференцируемость функции f в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ равносильна $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости функции $-f$ в данной точке.

$\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-суперградиентом функции f в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ будем называть функцию $l \in \mathcal{L}\breve{C}_\theta := \{l \in \mathcal{L}\breve{C} \mid l(\theta) = 0\}$ такую, что функция $g(x) := l(x - \overline{x}) + f(\overline{x})$ $\forall x \in X$ принадлежит $S^{+}(\mathcal{L}\breve{C}, f)$. Множество всех $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-суперградиентов функции f в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ будем называть *$\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-предсупердифференциалом функции f в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ и обозначать символом $D^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x})$. Справедливо равенство

$$D^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x}) = \{l \in \mathcal{L}\breve{C}_\theta \mid f(x) - f(\overline{x}) \le l(x - \overline{x}) \quad \forall x \in X\}.$$

Подмножество минимальных (относительно поточечного упорядочения) элементов $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-предсупердифференциала $D^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x})$ будем называть *$\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференциалом функции f в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ и обозначать символом $\partial^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x})$.

Отметим, что симметричность с $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-(пред)субдифференциалами сохраняется и для $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-(пред)супердифференциалов:

$$D^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x}) = -D_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta}(-f)(\overline{x}), \qquad \partial^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x}) = -\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta}(-f)(\overline{x}).$$

П р и м е р 4. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определенную равенством $f(x, y) = |x| - |y|$ (см. пример 3). Ее $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференциал в точке (0,0) равен

$$\partial^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(0,0) = \{g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \mid g_\alpha : (x, y) \mapsto |x| - \alpha y, \ -1 \le \alpha \le 1\}.$$

Заметим, что для данной функции как $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциал, так и $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференциал в точке (0,0) являются непустыми. В то же время субдифференциал Фреше и супердифференциал Фреше этой функции в данной точке оба являются пустыми [21]. Вообще, как известно, для любой функции, которая не является дифференцируемой по Фреше, только одно из множеств, либо субдифференциал Фреше, либо супердифференциал Фреше, может быть непустым.

$\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциальные и $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференциальные условия для точек глобального экстремума. В качестве приложения $\mathcal{L}\widehat{C}$-субдифференцируемости и $\mathcal{L}\breve{C}$-супердифференцируемости приведем критерии для точек глобального минимума и максимума функций.

Т е о р е м а 4 (критерии глобального минимума и максимума).

(i) Если функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференцируемой в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, то функция f достигает глобального минимума на пространстве X в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ тогда и только тогда, когда

$$0_{X^*} \in \partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(\overline{x}).$$

Здесь $\partial_{\mathcal{L}\widehat{C}_\theta} f(\overline{x})$ – $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субдифференциал функции f в точке $\overline{x}$, а 0_{X^*} – нулевой функционал, определенный на X (нулевой элемент пространства X^*).

(ii) Если функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференцируемой в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, то функция f достигает глобального максимума на пространстве X в точке $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ тогда и только тогда, когда

$$0_{X^*} \in \partial^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x}).$$

Здесь $\partial^{+}_{\mathcal{L}\breve{C}_\theta} f(\overline{x})$ – $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$-супердифференциал функции f в точке $\overline{x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения *(i)* следует непосредственно из определения глобального минимума, неравенства (10), которое характеризует $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$-субградиенты функции f в точке $\overline{x}$, и из того, что нулевой линейный функционал принадлежит $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta(X,\mathbb{R})$. Доказательство *(ii)* аналогично.

Т е о р е м а 5 (необходимые условия глобального максимума и минимума).

(i) Предположим, что функция $f: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *является* $\mathcal{L}\widehat{C}_\theta$*-субдифференцируемой в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. *Если функция f достигает глобального максимума на пространстве X в точке* $\overline{x}$, *то*

$$0_{X^*} \in \partial^+ h(\overline{x}) \text{ для всех } h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x}).$$

Здесь $S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x}) := \left\{ h \in \mathcal{L}\widehat{C} \;\middle|\; h \le f,\ h(\overline{x}) = f(\overline{x}) \right\}$ *– множество* $\mathcal{L}\widehat{C}$*-минорант функции f, опорных в точке* $\overline{x}$, *а* $\partial^+ h(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid x^*(x - \overline{x}) \ge h(x) - h(\overline{x})\ \forall x \in X\}$ *– супердифференциал Фенхеля – Рокафеллара классически вогнутой функции h в точке* $\overline{x}$.

(ii) Предположим, что функция $f: X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *является* $\mathcal{L}\breve{C}_\theta$*-супердифференцируемой в точке* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$. *Если функция f достигает глобального минимума на пространстве X в точке* $\overline{x}$, *то*

$$0_{X^*} \in \partial g(\overline{x}) \text{ для всех } g \in S^+(\mathcal{L}\breve{C}, f, \overline{x}).$$

Здесь $S^+(\mathcal{L}\breve{C}, f, \overline{x}) := \{ g \in \mathcal{L}\breve{C} \mid g \ge f,\ g(\overline{x}) = f(\overline{x}) \}$ *– множество* $\mathcal{L}\breve{C}$*-мажорант функции f, опорных в точке* $\overline{x}$, *а* $\partial g(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid x^*(x - \overline{x}) \le g(x) - g(\overline{x})\ \forall x \in X\}$ *– субдифференциал Фенхеля – Рокафеллара классически выпуклой функции g в точке* $\overline{x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция *f* достигает глобального максимума на *X* в точке $\overline{x}$, то каждая функция $h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$ также достигает глобального максимума в точке $\overline{x}$. Так как функции $h \in S^-(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \overline{x})$ вогнуты в классическом смысле, то это эквивалентно условию $0_{X^*} \in \partial^+ h(\overline{x})$. Это доказывает утверждение *(i)*. Аналогичными рассуждениями убеждаемся в справедливости утверждения *(ii)*.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция-2025».

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the State Program for Fundamental Research “Convergence-2025”.

Список использованных источников

1. Кутателадзе, С. С. Двойственность Минковского и ее приложения / С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов // Успехи мат. наук. – 1972. – Т. 27, вып. 3 (165). – С. 127–176.

2. Кутателадзе, С. С. Двойственность Минковского и ее приложения / С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов. – Новосибирск: Наука, 1976. – 254 с.

3. Dolecki, S. On Φ-convexity in extremal problems / S. Dolecki, S. Kurcyusz // SIAM J. Control Optim. – 1978. – Vol. 16, № 2. – P. 277–300. https://doi.org/10.1137/0316018

4. Pallaschke, D. Foundations of Mathematical Optimization (Convex analysis without linearity) / D. Pallaschke, S. Rolewicz. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1997. – 596 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1588-1

5. Singer, I. Abstract Convex Analysis / I. Singer. – New York: Wiley-Interscience Publ., 1997. – 491 p.

6. Rubinov, A. M. Abstract Convexity and Global Optimization / A. M. Rubinov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2000. – 490 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3200-9_9

7. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М.: Мир, 1979. – 399 с.

8. Rubinov, A. M. Abstract Convexity, Global Optimization and Data Classification / A. M. Rubinov // OPSEARCH. – 2001. – Vol. 38, № 3. – P. 247–265. https://doi.org/10.1007/BF03398635

9. Ioffe, A. D. Abstract convexity and non-smooth analysis / A. D. Ioffe // Adv. Math. Econ. – 2001. – Vol. 3. – P. 45–61. https://doi.org/10.1007/978-4-431-67891-5_2

10. Burachik, R. S. Abstract convexity and augmented Lagrangians / R. S. Burachik, A. M. Rubinov // SIAM J. on Optim. – 2007. – Vol. 18, № 2. – P. 413–436. https://doi.org/10.1137/050647621

11. Bednarczuk, E. M. Minimax theorems for φ-convex functions with applications / E. M. Bednarczuk, M. Syga // Control and Cybernetics. – 2014. – Vol. 43, № 3. – P. 421–437.

12. Zero duality gap conditions via abstract convexity / H. T. Bui [et al.] // Optimization. – 2021. – 37 p. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1910694

13. Gorokhovik, V. V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov-Rubinov exhaustive super(sub)differentials / V. V. Gorokhovik // Optimization. J. Math. Program. Oper. Res. – 2019. – Vol. 68, № 10. – P. 1933–1961. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1518446

14. Гороховик, В. В. Опорные точки полунепрерывных снизу функций относительно множества липшицевых вогнутых функций / В. В. Гороховик, А. С. Тыкун // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 6. – С. 647–653. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-647-653

15. Гороховик, В. В. Абстрактная выпуклость функций относительно множества липшицевых (вогнутых) функций / В. В. Гороховик, А. С. Тыкун // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 73–85. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-73-85

16. Gorokhovik, V. V. Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions / V. V. Gorokhovik, A. S. Tykoun // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2020. – Vol. 309, suppl. 1. – P. S36–S46. https://doi.org/10.1134/S0081543820040057

17. Brondsted, A. On the subdifferentiability of convex functions / A. Brondsted, T. R. Rockafellar // Proc. Am. Math. Soc. – 1965. – Vol. 16, № 4. – P. 605–611. https://doi.org/10.2307/2033889

18. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 469 с.

19. Martin, R. H. Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces / R. H. Martin. – New York: Wiley, 1976. – 455 p. https://doi.org/10.1007/978-04-715-7363-0

20. Borwein, J. M. Convex functions: constructions, characterizations and counterexamples / J. M. Borwein, J. D. Vanderwerff. – Cambridge University Press, 2010. – 521 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139087322

21. Kruger, A. Y. On Fréchet subdifferentials / A. Y. Kruger // J. Math. Sci. – Vol. 116, № 3. – 2003. – P. 3325–3358. https://doi.org/10.1023/a:1023673105317

References

1. Kutateladze S. S., Rubinov A. M. Minkowski duality and its applications. *Russian Mathematical Surveys,* 1972, vol. 27, no. 3, pp. 137–192.

2. Kutateladze S. S., Rubinov A. M. *Minkowski Duality and its Applications*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1976. 254 p. (in Russian).

3. Dolecki S., Kurcyusz S. On Φ-convexity in extremal problems. *SIAM Journal on Control and Optimization,* 1978, vol. 16, no. 2, pp. 277–300. https://doi.org/10.1137/0316018

4. Pallaschke D., Rolewicz S. *Foundations of Mathematical Optimization (Convex analysis without linearity).* Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1997. 596 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1588-1

5. Singer I. *Abstract Convex Analysis.* New York, Wiley-Interscience Publ., 1997. 491 p.

6. Rubinov A. M. *Abstract Convexity and Global Optimization.* Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2000. 490 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3200-9_9

7. Ekeland I, Temam R. *Convex Analysis and Variational Problems.* Amsterdam, North-Holland, 1976. 417 p.

8. Rubinov A. M. Abstract Convexity, Global Optimization and Data Classification. *OPSEARCH,* 2001, vol. 38, no. 3, pp. 247–265. https://doi.org/10.1007/BF03398635

9. Ioffe A. D. Abstract convexity and non-smooth analysis. *Advances in Mathematical Economics,* 2001, vol. 3, pp. 45–61. https://doi.org/10.1007/978-4-431-67891-5_2

10. Burachik R. S., Rubinov A. M. Abstract convexity and augmented Lagrangians. *SIAM Journal on Optimization,* 2007, vol. 18, no. 2, pp. 413–436. https://doi.org/10.1137/050647621

11. Bednarczuk E. M., Syga M. Minimax theorems for φ-convex functions with applications. *Control and Cybernetics,* 2014, vol. 43, no. 3, pp. 421–437.

12. Bui H. T., Burachik R. S., Kruger A. Y., Yost D. T. Zero duality gap conditions via abstract convexity. *Optimization*, 2021. 37 p. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1910694

13. Gorokhovik V. V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov-Rubinov exhaustive super(sub)differentials. *Optimization. A Journal of Mathematical Programming and Operations Research,* 2019, vol. 68, no. 10. pp. 1933–1961. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1518446

14. Gorokhovik V. V., Tykoun A. S. Support points of lower semicontinuous functions with respect to the set of Lipschitz concave functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 647–653 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-647-653

15. Gorokhovik V. V., Tykoun A. S. Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 73–85 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-23-3-73-85

16. Gorokhovik V. V., Tykoun A. S. Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 2020, vol. 309, suppl. 1, pp. S36–S46. https://doi.org/10.1134/S0081543820040057

17. Brondsted A., Rockafellar T. R. On the subdifferentiability of convex functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1965, vol. 16, no. 4, pp. 605–611. https://doi.org/10.2307/2033889

18. Rockafellar R. T. *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1970. 472 p. https://doi.org/10.1515/9781400873173

19. Martin R. H. *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces.* New York, Wiley, 1976. 455 p. https://doi.org/10.1007/978-04-715-7363-0

20. Borwein J. M., Vanderwerff J. D. *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples.* Cambridge University Press, 2010. 521 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139087322

21. Kruger A. Y. On Fréchet subdifferentials. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 116, no. 3, pp. 3325–3358. https://doi.org/10.1023/a:1023673105317

Информация об авторах

Гороховик Валентин Викентьевич – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом нелинейного и стохастического анализа, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: gorokh@im.bas-net.by

Тыкун Александр Станиславович – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tykoun@bsu.by

Information about the authors

Valentin V. Gorokhovik – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Nonlinear and Stochastic Analysis, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorokh@im.bas-net.by

Alexander S. Tykoun – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarussian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tykoun@bsu.by