ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.958
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-34-47

Поступила в редакцию 03.01.2022
Received 03.01.2022

В. И. Корзюк[1,2], И. И. Столярчук[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА – ГОРДОНА – ФОКА

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе, при этом исследуется существование и единственность решения произвольной гладкости. При решении данной задачи с помощью метода характеристик возникают эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры второго рода. Для полученных интегральных уравнений доказано существование единственного решения в классе n раз непрерывно дифференцируемых функций при заданной гладкости начальных данных. Показано также, что для гладкости решения исходной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования заданных функций при их достаточной гладкости. Метод характеристик сводится к разбиению всей области решения на подобласти, в каждой из которых строятся решения подзадач с использованием начальных и граничных условий. Полученные решения затем склеиваются в общих точках, порождая условия склейки, которые и являются условиями согласования. Данный подход позволяет строить как точные, так и приближенные решения. Точные решения могут быть найдены тогда, когда удается разрешить эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры. В противном случае можно найти приближенное решение задачи либо в аналитическом, либо в численном виде. Наряду с этим при построении приближенного решения существенными оказываются условия согласования, которые необходимо учитывать при использовании численных методов решения задачи.

Ключевые слова: уравнение Клейна – Гордона – Фока, метод характеристик, классическое решение, первая смешанная задача, условия согласования

Для цитирования. Корзюк, В. И. Произвольной гладкости классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 34–47. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-34-47

Viktor I. Korzyuk[1,2], Ivan I. Stolyarchuk[1]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

THE CLASSICAL SOLUTION OF ARBITRARY SMOOTHNESS FOR THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE KLEIN – GORDON – FOCK TYPE EQUATION

Abstract. In this paper, we consider the first mixed problem for the one-dimensional Klein – Gordon – Fock type equation in a half-strip. Meanwhile, the existence and uniqueness of a solution of arbitrary smoothness is researched. While solving this problem using the method of characteristics, equivalent second type Volterra integral equations appear. The existence of a unique solution in the class of n times continuously differentiable functions is proven for these equations when initial functions are smooth enough. Moreover, it is shown that for the smoothness of the solution of the initial problem it is necessary and sufficient that the matching conditions for the given functions be fulfilled if they are sufficiently smooth. The method of characteristics, used for problem analysis, is reduced to separating the total area of the solution on subdomains in each of them so that the solution of the subproblem is constructed with the help of the initial and boundary conditions. Then, the obtained solutions are glued in common points, and the received glued conditions are the matching conditions. This approach permits to construct both exact and approximate solutions. The exact solutions can be found when it is possible to solve the equivalent Volterra integral equations. Otherwise, one can find an approximate solution of the problem either in analytical or numerical form. Along with this, when constructing an approximate solution, the matching conditions turn out to be essential, which must be taken into account when using numerical methods for solving the problem.

Keywords: Klein – Gordon – Fock equation, method of characteristics, classical solution, first mixed problem, matching conditions

For citation. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. The classical solution of arbitrary smoothness for the first mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 34–47 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-34-47

Введение. При изучении классических решений задач для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка для построенного решения исследуется, как правило, только гладкость до порядка C^2 включительно [1–5]. При этом при исследовании, например, первой смешанной задачи для волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R}^4$ [6] возникает необходимость в получении условий существования единственного решения в классе C^3 на области своего задания.

В данной работе с помощью метода характеристик исследуется существование единственного решения в классе C^n первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока, а также выводятся необходимые и достаточные условия на гладкость заданных функций и условия их согласования для анализа данного решения, $n \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}$.

Постановка задачи. Задача рассматривается на плоскости двух независимых переменных t, x. В замыкании $\overline{Q}$ области $Q = (0;+\infty)\times(0;l)$ задается одномерное уравнение Клейна – Гордона – Фока

$$Lu = \partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u - \lambda(t,x)u = f(t,x), \tag{1}$$

где λ и f – функции, заданные на множестве $\overline{Q} = \mathbb{R}^+ \times [0;l] \subset \mathbb{R}^2$. К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0;l], \tag{2}$$

где $l \in \mathbb{R}, |l| < +\infty$, φ, ψ – функции, заданные на множестве $[0;l]$, и граничные условия

$$u(t,0) = \mu^{(0)}(t), u(t,l) = \mu^{(l)}(t), \quad t \in [0;\infty), \tag{3}$$

где $\mu^{(j)} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Общее решение уравнения. С помощью характеристических прямых $x - at = -kl$, $x + at = (k+1)l$, $k = 0,1,...,$ область Q разбивается на подобласти $Q^{(k,j)}$:

$$Q^{(k,1)} = \left\{(t,x) \mid t \in \left(\frac{kl}{a}, \frac{kl}{a} + \frac{l}{2a}\right), x \in \left(-kl + at, (k+1)l - at\right)\right\},$$

$$Q^{(k,2)} = \left\{(t,x) \mid x \in \left(0, \frac{l}{2}\right), t \in \left(\frac{x+kl}{a}, \frac{(k+1)l - x}{a}\right)\right\},$$

$$Q^{(k,3)} = \left\{(t,x) \mid x \in \left(\frac{l}{2}, l\right), t \in \left(\frac{(k+1)l - x}{a}, \frac{x+kl}{a}\right)\right\},$$

$$Q^{(k,4)} = \left\{(t,x) \mid t \in \left(\frac{kl}{a} + \frac{l}{2a}, \frac{(k+1)l}{a}\right), x \in \left((k+1)l - at, -kl + at\right)\right\}.$$

Область Q изображена на рис. 1. При этом $\overline{Q} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{4}\overline{Q^{(k,j)}}$.

Уравнение (1) можно записать в каноническом виде. Для этого сделаем замену независимых переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \tag{4}$$

или

$$t = \frac{\eta - \xi}{2a}, \quad x = \frac{\eta + \xi}{2}. \tag{5}$$

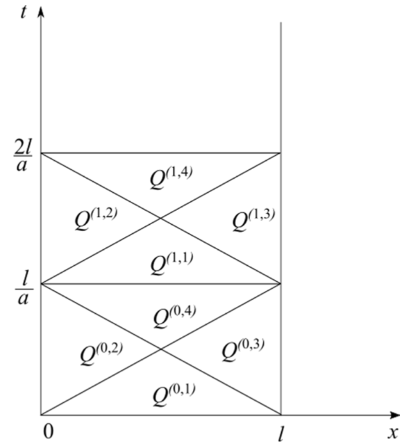

Рис. 1. Область Q

Fig. 1. Domain Q

В результате замены (4) или (5) уравнение (1) запишется в виде

$$\partial_\xi \partial_\eta v - b(\xi,\eta) v = F(\xi,\eta), \tag{6}$$

где

$$b(\xi,\eta) = -\lambda(t,x)/4a^2 = -\lambda\big((\xi-\eta)/2a, (\xi+\eta)/2\big)/4a^2,$$

$$F(\xi,\eta) = -f(t,x)/4a^2 = -f\big((\xi-\eta)/2a, (\xi+\eta)/2\big)/4a^2.$$

После замены (4) область Q перейдет в область Ω, причем каждая из подобластей $Q^{(k,j)}$ перейдет в $\Omega^{(k,j)}$ и $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{4}\overline{\Omega^{(k,j)}}$. Разбиение области Ω приведено на рис. 2.

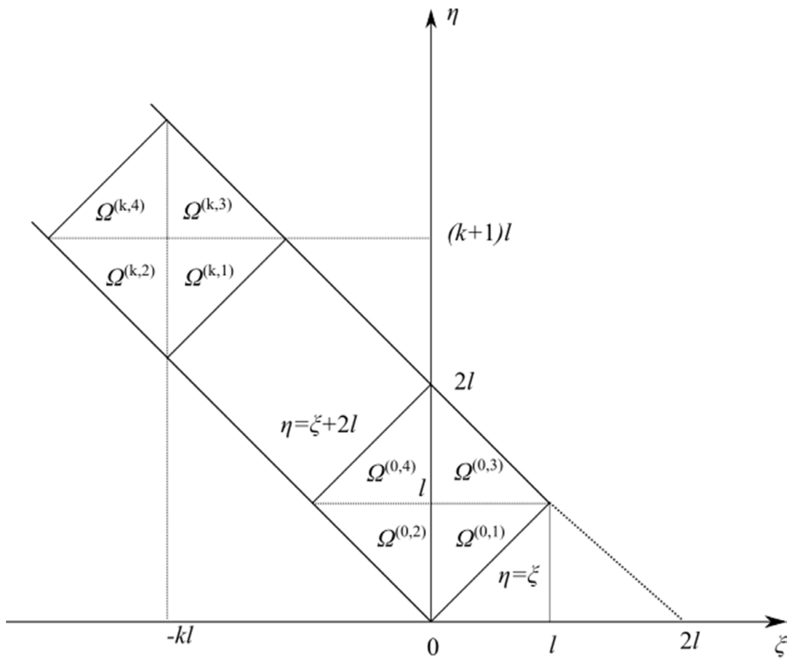

Рис. 2. Разбиение области $\Omega^{(k)}$ на подобласти $\Omega^{(k,j)}$, $j=\overline{1,4}$

Fig. 2. Separation of the domain $\Omega^{(k)}$ on subdomains $\Omega^{(k,j)}$, $j=\overline{1,4}$

В подобластях $\Omega^{(k,j)}(j=\overline{1,4})$ решение $v^{(k)}(\xi,\eta)$ уравнения (6) путем интегрирования представим в виде уравнения Вольтерры

$$v^{(k)}(\xi,\eta)=\int_{-kl}^{\xi}\int_{(k+1)l}^{\eta} b(y,z)v^{(k)}(y,z)+F(y,z)dzdy+p^{(k)}(\xi)+g^{(k)}(\eta),(\xi,\eta)\in\Omega^{(k,j)}, \tag{7}$$

где $p^{(k)}$, $g^{(k)}$ – произвольные функции.

В уравнении (7) возвращаемся к переменным (t,x) с помощью обратной замены (5)

$$u^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{x-at}\int_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy+ \\ +p^{(k)}(x-at)+g^{(k)}(x+at). \tag{8}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lambda, f\in C^{n-1}(\overline{Q^{(k)}})$. *Тогда решение* $u^{(k)}$ *уравнения* (8) *существует, единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k)}})$ *и непрерывно зависит от исходных данных тогда и только тогда, когда функции* $p^{(k)}\in C^n\left([-(k+1)l;-(k-1)l]\right)$, $g^{(k)}\in C^n\left([kl;(k+2)l]\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство существования, единственности и непрерывной зависимости решения от исходных данных, а также достаточности гладкости функций $p^{(k)}\in C^n\left([-(k+1)l;-(k-1)l]\right)$, $g^{(k)}\in C^n\left([kl;(k+2)l]\right)$ повторяет доказательство теоремы 2 из работы [7].

Осталось показать, что условия на функции $p^{(k)}\in C^n\left([-(k+1)l;-(k-1)l]\right)$, $g^{(k)}\in C^n\left([kl;(k+2)l]\right)$ являются необходимыми для принадлежности решения $u^{(k)}$ классу $C^n(\overline{Q^{(k)}})$.

Пусть решение $u^{(k)}(t,x)\in C^n(\overline{Q^{(k)}})$, тогда функция из правой части уравнения (8) $\int_{-kl}^{x-at}\int_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy$ также принадлежит классу $C^n(\overline{Q^{(k)}})$. Условия гладкости $u^{(k)}(t,x)\in C^n(\overline{Q^{(k)}})$ и $v^{(k)}(\xi,\eta)\in C^n(\overline{\Omega^{(k)}})$ равносильны.

Рассмотрим уравнение (7) и вычислим его n-ю производную по переменной ξ. В результате получим выражение

$$\partial_\xi^n v^{(k)}(\xi,\eta)=\int_{(k+1)l}^{\eta}\partial_\xi^{n-1}\left(b(\xi,z)v^{(k)}(\xi,z)+F(\xi,z)\right)dz+d^n p^{(k)}(\xi).$$

В данном выражении функция в левой части и интеграл в правой части являются непрерывными. Следовательно, функция $d^n p^{(k)}$ также должна быть непрерывной, т. е. функция $p^{(k)}\in C^n\left([-(k+1)l;-(k-1)l]\right)$. Аналогично доказывается, что $g^{(k)}\in C^n\left([kl;(k+2)l]\right)$. Теорема 1 доказана.

Задача (1)–(3) на $\overline{Q^{(k)}}$. Рассмотрим условия Коши в области $Q^{(k)}$:

$$\begin{aligned} u(t,x)|_{t=kl/a}&=\varphi^{(k)}(x), \quad x\in[0;l], \\ \partial_t u(t,x)|_{t=kl/a}&=\psi^{(k)}(x), \quad x\in[0;l]. \end{aligned} \tag{9}$$

Изначально заданы только $\varphi^{(0)}=\varphi$ и $\psi^{(0)}=\psi$, остальные функции мы получаем из решения в области $Q^{(k-1,4)}$ для $k=1,2,\ldots$.

Найдем решение задачи (1), (9) в области $Q^{(k,1)}$. Представление функций $p^{(k)}(z)$ и $g^{(k)}(y)$ через $u^{(k)}(t,x)$, где $z\in[-kl;-(k-1)l]$, $y\in[kl;(k+1)l]$,

$$p^{(k)}(z)=\frac{1}{2}(\varphi^{(k)}(z+kl)-\Psi^{(k)}(z+kl)-C)- \\ -\frac{1}{4a^2}\int_{(k+1)l}^{z+2kl}\int_{z}^{\eta-2kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta, \tag{10}$$

$$g^{(k)}(y)=\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(y-kl)+\Psi^{(k)}(y-kl)+C\Big)-$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{y}\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta, \tag{11}$$

где $\Psi^{(k)}(z)=\frac{1}{a}\int\limits_{l}^{z}\psi^{(k)}(y)dy.$

Исходя из формул (10), (11), выпишем представление решения задачи на множестве $\overline{Q^{(k,1)}}$:

$$u^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x+at-2kl}^{x-at}\int\limits_{\xi+2kl}^{x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(x-at+kl)+\varphi^{(k)}(x+at-kl)\Big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at+kl}^{x+at-kl}\psi^{(k)}(z)dz. \tag{12}$$

Л е м м а 1. *Пусть функции* $\lambda, f\in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Тогда решение* $u^{(k)}(t,x)$ *уравнения* (12) *существует, единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$ *и непрерывно зависит от функций* $\varphi^{(k)}(x)$, $\psi^{(k)}(x)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}\in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1}([0;l])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма 1 доказывается аналогично теореме 1.

Условие на левой границе. Рассмотрим решение задачи (1)–(3) в области $Q^{(k,2)}$. Из граничного условия (3) находим

$$\mu^{(0)}(t)=u(t,0)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{-at}\int\limits_{(k+1)l}^{at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dzdy+$$
$$+p^{(k)}(-at)+g^{(k)}(at),-at\in[-(k+1)l;-kl]. \tag{13}$$

Отсюда находим $p^{(k)}(z)$:

$$p^{(k)}(z)=\mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{z}\int\limits_{(k+1)l}^{-z}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(-z-kl)+\Psi^{(k)}(-z-kl)+C\Big)+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{-z}\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta,\quad z\in[-(k+1)l;-kl], \tag{14}$$

где константа C та же, что и в формулах (10), (11).

Используя формулы (11), (14), запишем представление решения $u^{(k)}$ на множестве $\overline{Q^{(k,2)}}$:

$$u^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{-x+at}^{x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta+\mu^{(0)}\left(-\frac{x}{a}+t\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(x+at-kl)-\varphi^{(k)}(-x+at-kl)\Big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{-x+at-kl}^{x+at-kl}\psi^{(k)}(z)dz-$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-x+at}^{x+at}\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta,(t,x)\in\overline{Q^{(k,2)}}. \tag{15}$$

Л е м м а 2. *Пусть* $\lambda, f\in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Тогда решение уравнения* (15) *существует, единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k,2)}})$ *и непрерывно зависит от функций* $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$, $\mu^{(0)}$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}\in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1}([0;l])$, $\mu^{(0)}\in C^n([0;+\infty))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Условие на правой границе. Рассмотрим решение задачи (1)–(3) в области $\overline{Q^{(k,3)}}$. Согласно граничному условию (3), из

$$u(t,l)=\mu^{(l)}(t)=p^{(k)}(l-at)+g^{(k)}(l+at)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{l-at}\int\limits_{(k+1)l}^{l+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi,$$
$$l+at\in[(k+1)l;(k+2)l], \tag{16}$$

находится выражение для функции $g^{(k)}(y)$, где $y=l+at$. Из равенства (16) имеем

$$g^{(k)}(y)=\mu^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{2l-y}\int\limits_{(k+1)l}^{y}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(2l-y+kl)+\frac{1}{2}\Psi^{(k)}(2l-y+2kl)+\frac{C}{2}+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{2l-y+2kl}\int\limits_{2l-y}^{\eta-2kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta,\quad y\in[(k+1)l;(k+2)l]. \tag{17}$$

Следовательно, решение уравнения в области $\overline{Q^{(k,3)}}$ запишется в следующем виде:

$$u^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{2l-x-at}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\varphi^{(k)}(x-at+kl)-\varphi^{(k)}(2l-x-at+kl)\right)+$$
$$+\mu^{(l)}\left(\frac{x+at-l}{a}\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at+kl}^{2l-x-at+kl}\psi^{(k)}(z)dz-$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{x-at+2kl}\int\limits_{x-at}^{\eta-2kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{2l-x-at+2kl}\int\limits_{2l-x-at}^{\eta-2kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(k,3)}}. \tag{18}$$

Л е м м а 3. *Пусть* $\lambda,f\in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Тогда решение уравнения* (18) *существует и единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k,3)}})$, *а также непрерывно зависит от функций* $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$, $\mu^{(l)}$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}\in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1}([0;l])$, $\mu^{(l)}\in C^n([0;+\infty))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично доказательству теоремы 1.

В области $\overline{Q^{(k,4)}}$ значения выражений $x+at\in[(k+1)l;(k+2)l]$, $x-at\in[-(k+1)l;-kl]$. Следовательно, решение можно выписать с использованием функций (14) и (17):

$$u^{(k)}(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{-x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi+\mu^{(0)}\left(-\frac{x-at}{a}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\varphi^{(k)}(-x+at-kl)+\Psi^{(k)}(-x+at-kl)\right)+\mu^{(l)}\left(\frac{x+at-l}{a}\right)+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{-x+at}\int\limits_{\eta-2kl}^{-kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{-kl}^{2l-x-at}\int\limits_{(k+1)l}^{x+at}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(2l-x-at+kl)+\frac{1}{2}\Psi^{(k)}(2l-x-at+kl)+$$
$$+\int\limits_{(k+1)l}^{2l-x-at+2kl}\int\limits_{2l-x-at}^{\eta-2kl}(\lambda u^{(k)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta. \tag{19}$$

Л е м м а 4. *Пусть* $\lambda, f\in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Тогда решение* $u^{(k)}(t,x)$ *уравнения* (19) *существует и единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k,4)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\mu^{(j)}\in C^n([0;+\infty))$, $j\in\{0,l\}$, $\varphi^{(k)}\in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1}([0;l])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор уравнения (19) в точности представляет собой оператор в условиях теоремы 1. Условия лемм 1, 2, 3 и тот факт, что $\lambda, f\in C^{n-1}(\overline{Q})$, гарантируют выполнение условий гладкости для теоремы 1. Лемма 4 доказана.

Таким образом, сформулируем

У т в е р ж д е н и е. *Пусть* $\lambda, f\in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Тогда решение поставленной задачи* (1)*,* (3)*,* (9)*, задаваемое формулами* (12)*,* (15)*,* (18)*,* (19)*, существует, единственно и принадлежит классу* $\bigcup\limits_{j=1}^{4}C^n\left(\overline{Q^{(k,j)}}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}(x)\in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)}(x)\in C^{n-1}([0;l])$, $\mu^{(j)}(t)\in C^n([0;+\infty))$, $j\in\{0,l\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из лемм 1, 2, 3 и 4. Утверждение доказано.

С л е д с т в и е 1. *При выполнении утверждения функции*

$$p^{(k)}\in C^n\left([-(k+1)l;-kl]\right)\bigcup C^n\left([-kl;-(k-1)l]\right),$$
$$g^{(k)}\in C^n\left([kl;(k+1)l]\right)\bigcup C^n\left([(k+1)l;(k+2)l]\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В представлениях (10), (11), (14), (17) фигурируют решения $u^{(k)}$ в соответствующих подобластях. Так как утверждение дает условия на принадлежность решения классу $C^n(\overline{Q^{(k,j)}})$, то из этих условий следует принадлежность функций $p^{(k)}$, $g^{(k)}$ классу C^n на областях своего задания. Следствие 1 доказано.

Условия согласования. Для окончательного разрешения вопроса о n-непрерывной дифференцируемости решения в области $\overline{Q^{(k)}}$ осталось показать, что функции $p^{(k)}$ и $g^{(k)}$ являются n раз непрерывно дифференцируемыми на множестве своего задания.

Из следствия 1 вытекает, что для гладкости функций $p^{(k)}$ и $g^{(k)}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия согласования

$$d^i p^{(k)}(-kl-0)=d^i p^{(k)}(-kl+0),$$
$$d^i g^{(k)}\left((k+1)l-0\right)=d^i g^{(k)}\left((k+1)l+0\right),\quad i=\overline{0,n}.$$

Рассмотрим функцию (10). Вычислим ее производные и выведем общую формулу для произвольного i. Введем обозначение $\Lambda(t,x)=(\lambda u^{(k)}+f)(t,x)$:

$$dp^{(k)}(z)=\frac{1}{2}\left(d\varphi^{(k)}(z+kl)-d\Psi^{(k)}(z+kl)\right)+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{z+2kl}\Lambda\left(\frac{\eta-z}{2a},\frac{\eta+z}{2}\right)d\eta,$$
$$z\in[-kl;(-k-1)l], \tag{20}$$

$$d^2 p^{(k)}(z) = \frac{1}{2}\left(d^2\varphi^{(k)}(z+kl) - d^2\Psi^{(k)}(z+kl)\right) +$$
$$+\frac{1}{4a^2}\Lambda\left(\frac{kl}{a}, z+kl\right) + \frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{z+2kl} d_z\Lambda\left(\frac{\eta-z}{2a}, \frac{\eta+z}{2}\right)d\eta,$$
$$z\in[-kl;(-k-1)l], \tag{21}$$
$$d^3 p^{(k)}(z) = \frac{1}{2}\left(d^3\varphi^{(k)}(z+kl) - d^3\Psi^{(k)}(z+kl)\right) +$$
$$+\frac{1}{4a^2}\partial_x\Lambda\left(\frac{kl}{a}, z+kl\right) + \frac{1}{4a^2}\left(-\frac{1}{2a}\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x\right)\Lambda\left(\frac{kl}{a}, z+kl\right) +$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{z+2kl} d_z^2\Lambda\left(\frac{\eta-z}{2a}, \frac{\eta+z}{2}\right)d\eta. \tag{22}$$

Продолжая процесс, можно вывести общую формулу для производной порядка $i \geq 2$ для функции $p^{(k)}$, определенной по формуле (10):

$$d^i p^{(k)}(z) = \frac{1}{2}\left(d^i\varphi^{(k)}(z+kl) - d^i\Psi^{(k)}(z+kl)\right) + \frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{z+2kl} d_z^{i-1}\Lambda\left(\frac{\eta-z}{2a}, \frac{\eta+z}{2}\right)d\eta +$$
$$+\frac{1}{4a^2}\left(\sum_{j=0}^{i-2}\partial_x^{i-j-2}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\Lambda\right)\left(\frac{kl}{a}, z+kl\right),$$
$$z\in[-kl;(-k-1)l], \tag{23}$$

где $C_m^j = \dfrac{j!}{m!(j-m)!}$ – биномиальный коэффициент.

Проводя аналогичные рассуждения для функции $p^{(k)}$, определенной по формуле (14), получим выражение

$$d^i p^{(k)}(z) = \frac{(-1)^i}{a^i} d^i\mu^{(0)}\left(t = -\frac{z}{a}\right) - \frac{(-1)^i}{2}\left(d^i\varphi^{(k)} + d^i\Psi^{(k)}\right)(x = -z-kl) -$$
$$-\frac{(-1)^i}{4a^2}\sum_{j=0}^{i-2}\left(\partial_x^{i-j-2}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\Lambda\right)\left(t=\frac{kl}{a}, x=-z-kl\right) +$$
$$+\frac{2}{a^j}\left(\partial_t^{i-j-2}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\Lambda\right)\left(t=-\frac{z}{a}, x=0\right) +$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l}^{-z} d_z^{i-1}\Lambda\left(\frac{\eta-z}{2a}, \frac{\eta+z}{2}\right)d\eta + \frac{1}{4a^2}\int\limits_{z}^{z+2kl} d_z^{i-1}\Lambda\left(\frac{-z-\xi}{2a}, \frac{-z+\xi}{2}\right)d\xi,$$
$$z\in[-(k+1)l;-kl]. \tag{24}$$

Из формул (23) и (24) выводятся условия согласования в точке $z = -kl$ для функций $d^i p^{(k)}(z)$ при $i \geq 2$, а именно:

$$\frac{(-1)^i}{a^i} d^i\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\left((-1)^{i+1}-1\right)d^j\varphi^{(k)}(0) + \left((-1)^{i+1}+1\right)d^j\Psi^{(k)}(0)\right) =$$
$$= 2\frac{(-1)^i}{4a^2}\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}\partial_x^{i-j-2}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{a^j}\partial_t^{i-j-2}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\right)\Lambda\right)\left(\frac{kl}{a}, 0\right). \tag{25}$$

В формуле (25) фигурируют смешанные производные от функции $\Lambda(t,x)$. Распишем их подробнее:

$$\partial_t^{\alpha}\partial_x^{\beta}\Lambda(t,x)\Big|_{t=kl/a,x=0}=\left(\partial_t^{\alpha}\partial_x^{\beta}(\lambda u^{(k)})+\partial_t^{\alpha}\partial_x^{\beta}f(t,x)\right)\Big|_{t=kl/a,x=0}=$$

$$=\left(\sum_{\alpha_1=0}^{\alpha}\sum_{\beta_1=0}^{\beta}C_{\alpha_1}^{\alpha}C_{\beta_1}^{\beta}\partial_t^{(\alpha-\alpha_1)}\partial_x^{(\beta-\beta_1)}\lambda(t,x)\partial_t^{\alpha_1}\partial_x^{\beta_1}u^{(k)}(t,x)+\partial_t^{\alpha}\partial_x^{\beta}f(t,x)\right)\Bigg|_{t=kl/a,x=0}, \tag{26}$$

где выражение $\partial_t^{\alpha_1}\partial_x^{\beta_1}u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},0\right)$ вычисляется по следующей рекуррентной формуле:

$$\partial_x^{\beta_1}u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},0\right)=\partial_x^{\beta_1}\varphi^{(k)}(0),\partial_x^{\beta_1}\partial_t u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},0\right)=\partial_x^{\beta_1}\psi^{(k)}(0),\beta_1\geq 0,$$

$$\partial_x^{\beta_1}\partial_t^{\alpha_1}u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},0\right)=a^2\partial_x^{\beta_1+2}\partial_t^{\alpha_1-2}u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},0\right)+$$

$$+\partial_x^{\beta_1}\sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_1-2}C_{\alpha_2}^{\alpha_1-2}\partial_t^{\alpha_1-2-\alpha_2}\lambda\left(\frac{kl}{a},0\right)\partial_t^{\alpha_2}u^{(k)}\left(\frac{kl}{a},0\right)+\partial_x^{\beta_1}\partial_t^{\alpha_1}f\left(\frac{kl}{a},0\right),\quad \alpha_1\geq 2. \tag{27}$$

Условия согласования для функции $p^{(k)}$ и ее производной первого порядка в точке $z=-kl$ выведены в работе [1]:

$$\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-\varphi^{(k)}(0)=0,\,d\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-\psi^{(k)}(0)=0. \tag{28}$$

Аналогично выводятся условия согласования для функции $g^{(k)}$ в точке $y=(k+1)l$. Из формулы (11) следует, что общий вид производной $d^i g^{(k)}(y), y\in[kl;(k+1)l],\ i\geq 2$, записывается как

$$d^i g^{(k)}(y)=\frac{1}{2}\left(d^i\varphi^{(k)}(y-kl)-d^i\Psi^{(k)}(y-kl)\right)+\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{y-2kl}d_y^{i-1}\Lambda\left(\frac{y-\xi}{2a},\frac{y+\xi}{2}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\left(\sum_{j=0}^{i-2}\partial_x^{i-j-2}\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{1}{2a}\right)^m\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m}C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\Lambda\right)\left(t=\frac{kl}{a},x=y-kl\right),$$

$$z\in[kl;(k+1)l]. \tag{29}$$

Из формулы (17) следует, что общий вид производной $d^i g^{(k)}(y), y\in[(k+1)l;(k+2)l],\ i\geq 2$, записывается как

$$d^i g^{(k)}(y)=\frac{1}{a^i}d^i\mu^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)-\frac{(-1)^i}{2}\left(d^i\varphi^{(k)}-d^i\Psi^{(k)}\right)(2l-y+kl)-$$

$$-\frac{(-1)^i}{4a^2}\sum_{j=0}^{i-2}\left(\partial_x^{i-j-2}\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{1}{2a}\right)^m\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m}C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\Lambda\right)\left(\frac{kl}{a},2l-y+kl\right)+$$

$$+\frac{2}{a^j}\left(\partial_t^{i-j-2}\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{1}{2a}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{j-m}C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\Lambda\right)\left(\frac{y-l}{a},l\right)+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int_{y}^{2l-y+2kl}d_y^{i-1}\Lambda\left(\frac{\eta-2l+y}{2a},\frac{\eta+2l-y}{2}\right)d\eta+\frac{1}{4a^2}\int_{-kl}^{2l-y}d_y^{i-1}\Lambda\left(\frac{y-\xi}{2a},\frac{y+\xi}{2}\right)d\xi,$$

$$y\in[(k+1)l;(k+2)l]. \tag{30}$$

Из формул (29) и (30) выводятся условия согласования в точке $y=(k+1)l$ для функций $d^i g^{(k)}(y)$ при $i \geq 2$ в виде

$$\frac{1}{a^j} d^j \mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\left((-1)^{j+1}-1\right) d^j \varphi^{(k)}(l)-\left((-1)^{j+1}+1\right) d^j \Psi^{(k)}(l)\right)=$$

$$=2\frac{(-1)^i}{4a^2}\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2} \partial_x^{i-j-2} \sum_{m=0}^{i}\left(\frac{1}{2a}\right)^m\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j \partial_t^m \partial_x^{j-m}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{a^j} \partial_t^{i-j-2} \sum_{m=0}^{i}\left(\frac{1}{2a}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j \partial_t^m \partial_x^{j-m}\right)\Lambda\right)\left(\frac{kl}{a}, l\right), \tag{31}$$

где смешанные производные от функции $\Lambda(t,x)$ вычисляются по формулам (26) и (27) в точке $\left(t=\dfrac{kl}{a}, x=l\right)$.

Условия согласования для функции $g^{(k)}$ и ее производной первого порядка в точке $y=(k+1)l$ выведены в работе [1]:

$$\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)-\varphi^{(k)}(l)=0, \quad d\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)-\psi^{(k)}(l)=0. \tag{32}$$

Таким образом, справедлива

Л е м м а 5. *Пусть функции* $\lambda, f \in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Решение задачи* (1), (3), (9) *существует и единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\mu^{(j)}(t) \in C^n([0;+\infty))$, $j \in \{0, l\}$, *а также* $\varphi^{(k)}(x) \in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)}(x) \in C^{n-1}([0;l])$ *и выполняются условия согласования* (25), (28), (31), (32).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения следует из утверждения. Из него же следует, что каждое решение $u^{(k)}$ принадлежит классу $C^n(\overline{Q^{(k,j)}})$ для каждого $j=\overline{1,4}$. Следовательно, решение $u^{(k)}$ будет принадлежать классу $C^n(\overline{Q^{(k)}})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования (25), (28), (31), (32).

Решение задачи в полуполосе. В предыдущем пункте была решена задача (1)–(3) в каждой из подобластей $\overline{Q}^{(k)}$. Выведем теперь условия принадлежности решения $u(t,x)$ задачи (1)–(3) классу $C^n\left(\overline{Q^{(k)} \bigcup Q^{(k-1)}}\right)$.

Л е м м а 6. *Пусть функции* $\lambda, f \in C^{n-1}(\overline{Q})$, *а* $u^{(k)}$ *– решение задачи* (1)–(3) *на множестве* $\overline{Q^{(k)}}$ *и* $u^{(k)}(t,x) \in C^n(\overline{Q^{(k)}})$, *а* $u^{(k-1)}$ *– решение на множестве* $\overline{Q^{(k-1)}}$ *и* $u^{(k-1)}(t,x) \in C^n(\overline{Q^{(k-1)}})$. *Тогда функция*

$$u^{(k,k-1)}(t,x)=\begin{cases} u^{(k)}(t,x), & (t,x) \in \overline{Q^{(k)}}, \\ u^{(k-1)}(t,x), & (t,x) \in \overline{Q^{(k-1)}} \end{cases} \tag{33}$$

будет n раз непрерывно дифференцируемой на множестве $\overline{Q^{(k)} \bigcup Q^{(k-1)}}$ *тогда и только тогда, когда начальные условия на слое k определены как*

$$\varphi^{(k)}(x)=u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right)=-\frac{1}{4a^2} \int_{-(k-1)l}^{x-kl} \int_{kl}^{x+kl} (\lambda u^{(k-1)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2}\right) d\eta d\xi+$$

$$+p^{(k-1)}(x-kl)+g^{(k-1)}(x+kl),$$

$$\psi^{(k)}(x)=\partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right)=-adp^{(k-1)}(x-kl)+adg^{(k-1)}(x+kl)+$$

$$+\frac{1}{4a}\int_{kl}^{x+kl}(\lambda u^{(k-1)}+f)\left(\frac{\eta-x+kl}{2a},\frac{\eta+x-kl}{2}\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{4a}\int_{-(k-1)l}^{x-kl}(\lambda u^{(k-1)}+f)\left(\frac{x+kl-\xi}{2a},\frac{x+kl+\xi}{2}\right)d\xi,\quad x\in[0;l]. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из доказательства леммы 5.1 в работе [1].

С л е д с т в и е 2. *Условия согласования* (25), (28), (31), (32) *на слое* k *выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (25), (28), (31), (32) *на слое* $k-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим условие (28). Вычислим первое выражение из (34) в точке $x=0$. Получим

$$\varphi^{(k)}(0)=p^{(k-1)}(-kl+0)+g^{(k-1)}(kl-0). \tag{35}$$

Выразим теперь функцию $p^{(k-1)}(z)$ из (13) в точке $z=-kl-0$:

$$p^{(k-1)}(-kl+0)=\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)-g^{(k-1)}(kl+0). \tag{36}$$

Подставим (36) в (35), с учетом условий согласования (28) получим

$$p^{(k)}(-kl-0)-p^{(k)}(-kl+0)=-\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\varphi^{(k)}(0)=$$

$$=g^{(k-1)}(kl+0)-g^{(k-1)}(kl-0). \tag{37}$$

Вычислим значение первого выражения из (34) в точке $x=l$:

$$\varphi^{(k)}(l)=p^{(k-1)}\big(-(k-1)l-0\big)+g^{(k-1)}\big((k+1)l+0\big). \tag{38}$$

Теперь выразим функцию $g^{(k-1)}\big((k+1)l+0\big)$ из (16):

$$g^{(k-1)}\big((k+1)l+0\big)=\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)-p^{(k-1)}\big(-(k-1)l+0\big). \tag{39}$$

Подставим (39) в (38). С учетом условий согласования (32) получим следующее выражение:

$$g^{(k)}\big((k+1)l+0\big)-g^{(k)}\big((k+1)l-0\big)=-\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)+\varphi^{(k)}(l)=$$

$$=p^{(k-1)}\big(-(k-1)l-0\big)-p^{(k-1)}\big(-(k-1)l+0\big). \tag{40}$$

Аналогично рассматриваются остальные условия согласования. Отсюда вытекает

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\lambda, f\in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно в классе* $C^{n}(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\mu^{(j)}\in C^{n}([0;+\infty)),\ j\in\{0,l\},\ \varphi\in C^{n}([0;l]),\ \psi\in C^{n-1}([0;l])$ *и выполняются однородные условия согласования для* $i=\overline{2,n}$:

$$\frac{(-1)^i}{a^i}d^i\mu^{(0)}(0)-\frac{1}{2}\Big(\big((-1)^{i+1}-1\big)d^j\varphi(0)+\big((-1)^{i+1}+1\big)d^j\Psi(0)\Big)=$$

$$=2\frac{(-1)^i}{4a^2}\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}\partial_x^{i-j-2}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{j-m}C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{a^j}\partial_t^{i-j-2}\sum_{m=0}^{j}\left(-\frac{1}{2a}\right)^m\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m}C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\right)\Lambda\right)(0,0), \tag{41}$$

$$\frac{1}{a^j}d^j\mu^{(l)}(0)+\frac{1}{2}\Big(\big((-1)^{j+1}-1\big)d^j\varphi(l)-\big((-1)^{j+1}+1\big)d^j\Psi(l)\Big)=$$

$$=2\frac{(-1)^i}{4a^2}\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}\partial_x^{i-j-2}\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{1}{2a}\right)^m\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m}C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{a^j}\partial_t^{i-j-2}\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{1}{2a}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{j-m}C_m^j\partial_t^m\partial_x^{j-m}\right)\Lambda\right)(0,l), \tag{42}$$

$$\mu^{(0)}(0)-\varphi(0)=0,\, d\mu^{(0)}(0)-\psi(0)=0, \tag{43}$$

$$\mu^{(l)}(0)-\varphi(l)=0,\, d\mu^{(l)}(0)-\psi(l)=0. \tag{44}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной теоремы проводится по индукции по номеру области k, исходя из лемм 1, 6, утверждения и следствия 2. Рассмотрим случай $k = 0$.

Представление функций $p^{(0)}(z)$ и $g^{(0)}(y)$ через $u^{(0)}(t,x)$, где $z\in[0;l]$, $y\in[0;l]$, из задачи Коши

$$p^{(0)}(z)=\frac{1}{2}\big(\varphi(z)-\Psi(z)-C\big)-\frac{1}{4a^2}\int_l^z\int_z^\eta(\lambda u^{(0)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta, \tag{45}$$

$$g^{(0)}(y)=\frac{1}{2}\big(\varphi(y)+\Psi(y)+C\big)-\frac{1}{4a^2}\int_l^y\int_\eta^0(\lambda u^{(0)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta, \tag{46}$$

где $\Psi(z)=\frac{1}{a}\int_l^z\psi(y)dy.$

Из левого и правого граничных условий представление функций $p^{(0)}(z)$ и $g^{(0)}(y)$ через $u^{(0)}(t,x)$, где $z\in[-l;0]$, $y\in[l;2l]$, следующее:

$$p^{(0)}(z)=\mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)+\frac{1}{4a^2}\int_0^z\int_l^{-z}(\lambda u^{(0)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi-\frac{1}{2}\big(\varphi(-z)+\Psi(-z)+C\big)+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int_l^{-z}\int_\eta^0(\lambda u^{(0)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta,\, z\in[-l;0], \tag{47}$$

$$g^{(0)}(y)=\mu^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)+\frac{1}{4a^2}\int_0^{2l-y}\int_l^y(\lambda u^{(0)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\varphi(2l-y)+\frac{1}{2}\Psi(2l-y)+\frac{C}{2}+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int_l^{2l-y}\int_{2l-y}^{\eta}(\lambda u^{(0)}+f)\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi d\eta,\quad y\in[l;2l]. \tag{48}$$

Заметим, что при выполнении условий $\mu^{(j)}\in C^n([0;+\infty))$, $j\in\{0,l\}$, $\varphi\in C^n([0;l])$, $\psi\in C^{n-1}([0;l])$ выполняются условия лемм 1–3 и, следовательно, функция $u^{(0)}$ в подынтегральных выражениях будет принадлежать классу $C^n(\overline{Q^{(0,j)}})$, $j=\overline{1,4}$, на области своего задания. Таким образом, верно следствие 1. И для выполнения условий леммы 5 при $k = 0$ необходимо и достаточно выполнения условий согласования (41)–(44). Из следствия 2 вытекает, что выполнения условий согласования при $k = 0$ необходимо и достаточно для выполнения услвоий согласования (25), (28), (31), (32) при $k = 1$. При этом выполнения этих условий достаточно для того, чтобы $u^{(1)}\in C^n(\overline{Q^{(1)}})$. Из леммы 6 следует, что функция $u^{(0,1)}(t,x)\in C^n(\overline{Q^{(0,1)}})$. Продолжая процесс, получаем доказываемое утверждение.

З а м е ч а н и е 1. Если вместо уравнения (1) взять уравнение колебания струны, т. е. положить $\lambda \equiv 0$, то в условиях согласования (41), (42) вместо функции Λ будет стоять неоднородность f:

$$\frac{(-1)^i}{a^i} d^i \mu^{(0)}(0) - \frac{1}{2}\Big(\big((-1)^{i+1} - 1\big) d^j \varphi(0) + \big((-1)^{i+1} + 1\big) d^j \Psi(0)\Big) =$$
$$= 2\frac{(-1)^i}{4a^2}\Bigg(\Bigg(\sum_{j=0}^{i-2} \partial_x^{i-j-2} \sum_{m=0}^{j} \left(-\frac{1}{2a}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j \partial_t^m \partial_x^{j-m} +$$
$$+\frac{1}{a^j}\partial_t^{i-j-2} \sum_{m=0}^{j} \left(-\frac{1}{2a}\right)^m \left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j \partial_t^m \partial_x^{j-m}\Bigg) f\Bigg)(0,0), \tag{49}$$

$$\frac{1}{a^j} d^j \mu^{(l)}(0) + \frac{1}{2}\Big(\big((-1)^{j+1} - 1\big) d^j \varphi(l) - \big((-1)^{j+1} + 1\big) d^j \Psi(l)\Big) =$$
$$= 2\frac{(-1)^i}{4a^2}\Bigg(\Bigg(\sum_{j=0}^{i-2} \partial_x^{i-j-2} \sum_{m=0}^{i} \left(\frac{1}{2a}\right)^m \left(-\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j \partial_t^m \partial_x^{j-m} +$$
$$+\frac{1}{a^j}\partial_t^{i-j-2} \sum_{m=0}^{i} \left(\frac{1}{2a}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{j-m} C_m^j \partial_t^m \partial_x^{j-m}\Bigg) f\Bigg)(0,l), \tag{50}$$

где $\Psi(x) = \frac{1}{a}\int_l^x \psi(y)dy$. При этом условия (43), (44) останутся неизменными.

З а м е ч а н и е 2. Если вместо уравнения (1) взять однородное уравнение колебания струны, т. е. положить $\lambda \equiv 0, f \equiv 0,$ то условия согласования записываются в виде

$$\frac{(-1)^i}{a^i} d^i \mu^{(0)}(0) - \frac{1}{2}\Big(\big((-1)^{i+1} - 1\big) d^i \varphi(0) + \big((-1)^{i+1} + 1\big) d^i \Psi(0)\Big) = 0, \quad i = \overline{0,n},$$

$$\frac{1}{a^i} d^i \mu^{(l)}(0) + \frac{1}{2}\Big(\big((-1)^{i+1} - 1\big) d^i \varphi(l) - \big((-1)^{i+1} + 1\big) d^i \Psi(l)\Big) = 0, \quad i = \overline{0,n},$$

где $\Psi(x) = \frac{1}{a}\int_l^x \psi(y)dy.$

Заключение. В данной работе получены необходимые и достаточные условия на гладкость исходных данных, а также необходимые и достаточные условия согласования на заданные функции для первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока для случая произвольной гладкости решения. Кроме того, выписаны условия согласования для случая, когда рассматривается уравнение колебания струны.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.

2. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 77–88.

3. Корзюк, В. И. Граничные задачи для слабо нагруженного оператора гиперболического уравнения второго порядка в цилиндрической области / В. И. Корзюк, М. Т. Дженалиев, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 33–39.

4. Ладыженская, О. А. О решении смешанной задачи для гиперболических уравнений / О. А. Ладыженская // Изв. Акад. наук СССР. Мат. серия. – 1951. – № 15. – С. 545–562.

5. Моисеев, Е. И. Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим граничным условием / Е. И. Моисеев, А. А. Холомеева // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 10. – С. 1412–1417.

6. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндрической области / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 1. – С. 135–138.

7. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 56–72.

References

1. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein – Gordon – Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. https://doi.org/10.1134/S0374064114080081

2. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 74–85. https://doi.org/10.1134/S0012266117010074

3. Korzyuk V. I., Dzhenaliev M. T., Kozlovskaya I. S. Boundary problems for a weakly loaded operator of the second order hyperbolic equation in th cylindrical area. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 33–39 (in Russian).

4. Ladyzhenskaya O. A. On the Solvability of Mixed Boundary Value Problems for hyperbolic equations. *Izvestia Akademii nauk SSSR Matemticheskay seriya* [Proceedings of the Academy of Sciences of USSR. Mathematical series], 1951, no. 15, pp. 545–562 (in Russian).

5. Moiseev E. I., Kholomeeva A. A. Solvability of the mixed problem for the wave equation with a dynamic boundary condition. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 10, pp. 1392–1397. https://doi.org/10.1134/S0012266112100096

6. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the wave equation in the cylyndrical domain. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 2, pp. 135–138 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-135-138

7. Korzyuk V. I. Classical solution to the mixed problem for the Kleina – Gordona – Foka equation with the unlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018. vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Столярчук Иван Игоревич – кандидат физико-математических наук, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Ivan I. Stolyarchuk – Ph. D. (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997