ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.23;517.28;531.3;534.1
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-60-70

Поступила в редакцию 04.11.2021
Received 04.11.2021

М. А. Журавков, В. В. Колячко

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОТДЕЛЬНЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С РАЗРЕШАЮЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Приведены новые примеры построения модельных задач механики деформируемого твердого тела с использованием аппарата дробного дифференцирования. Построены решения краевых задач механики, в которых определяющие дифференциальные уравнения имеют дробный порядок. Рассмотрены, в частности, такие задачи, как модель «фрактального» осциллятора, модельная задача о распространении динамических волн в массивах горных пород, модельные задачи о распространении волн деформаций в деформируемых вязкоупругих средах (полубесконечном вязкоупругом стержне) для различных моделей вязкоупругости. При построении решений использовался алгоритм Майнарди и преобразование Лапласа. Найдены модельные решения для рассмотренных классов задач. Получены асимптотические решения уравнений распространения волн в вязкоупругих средах при различных моделях вязкоупругости.

Ключевые слова: дробная производная Римана – Лиувилля, дробная производная Капуто, преобразование Лапласа, алгоритм Майнарди, модель «фрактального» осциллятора, волновое фрактальное уравнение геомеханики, дробные модели вязкоупругости

Для цитирования. Журавков, М. А. Построение решений отдельных классов модельных задач с разрешающими уравнениями дробного порядка / М. А. Журавков, В. В. Колячко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 60–70. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-60-70

Michael A. Zhuravkov, Vladislav V. Kolyachko

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS FOR SOME MODEL PROBLEM CLASSES WITH RESOLVENT EQUATIONS OF A FRACTIONAL ORDER

Abstract. In this paper, we represent new examples of constructing model problems of the mechanics of a deformable solid using a fractional differentiation apparatus. The solutions to boundary problems of mechanics are found, in which the defining differential equations have a fractional order. In particular, such problems as a model of a “fractal” oscillator, a model problem on the dynamic of wave propagation in rock, model problems on the deformation of wave propagation in deformable viscoelastic media (a semi-infinite viscoelastic rod) for various viscoelasticity models are considered. When building the solutions, the Mainardi algorithm and the Laplace transformation are used. Model solutions for the considered problems are built. Asymptotic solutions of wave propagation equations in viscoelastic media under different viscoelasticity models are obtained.

Keywords: fractional derivative of Riemann – Liouville, fractional Caputo derivative, Laplace transform, Mainardi algorithm, fractal oscillator model, wave fractal equation of geomechanics, fractional viscoelasticity models

For citation. Zhuravkov M. A., Kolyachko V. V. The construction of solutions for some model problem classes with resolvent equations of a fractional order. *Vestsi Natsyianal’nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 60–70 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-60-70

Введение. Аппарат дробного интегро-дифференцирования используется все более активно, доказав свою эффективность при решении широкого класса модельных задач из различных областей науки. В настоящее время существует достаточно обширная библиография и написаны, ставшие уже классическими, монографии (см., напр., [1, 2]). Большой интерес вызывает применение аппарата дробного дифференцирования и в механике [3–5]. Вместе с тем следует отметить, что широкого распространения модельный анализ на основе аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка в механике еще так и не получил. Это происходит в том числе и потому, что на сегодняшний день полученных практических результатов немного.

В данной работе продемонстрированы некоторые механические модели и показаны способы их решения. Также решена задача распространения волн в различных вязкоупругих средах при помощи алгоритма Майнарди.

Математическая модель «фрактального» осциллятора. В механике все большее распространение получают модели, учитывающие внутреннюю дискретную структуру материалов. Важным это является, например, при рассмотрении динамических задач теории упругости дискретных сред. В качестве математической модели большого количества задач прикладной механики с учетом дискретной (фрактальной) структуры перспективным представляется использование модели «фрактального» осциллятора [6]:

$$\partial_{0t}^{2\alpha}x(t)+2\gamma\partial_{0t}^{\alpha}x(t)+\omega^{2\alpha}x(t)=F(t), \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, $\partial_{0t}^{\alpha}x(t)$ – производная Капуто, γ – коэффициент затухания, ω – частота, $F(t)$ – вынуждающая сила.

С точки зрения прикладного использования модели (1) интерес представляет *следующий случай*:

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(t)+\omega^{\alpha}x(t)=f_0^{\alpha/2}E_{\alpha,1}(-t^{\alpha}),\quad 1<\alpha<2,\quad x(0)=a,\quad \dot{x}(0)=b. \tag{2}$$

Решим уравнение (2), используя преобразования Лапласа

$$L\left(\partial_{0t}^{\alpha}x(t)\right)=s^{\alpha}\tilde{x}-s^{\alpha-1}a-s^{\alpha-2}b,\quad L\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha n+1)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^{-(\alpha n+1)}. \tag{3}$$

Применим эти соотношения к уравнению (2). В результате получим

$$\tilde{x}=\frac{f_0^{\alpha/2}}{s^{\alpha}+\omega^{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^{-(\alpha n+1)}+\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\omega^{\alpha}}a+\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}+\omega^{\alpha}}b.$$

Используем обратные преобразования Лапласа. В итоге решение (2) примет вид

$$x(t)=aE_{\alpha,1}(-\omega^{\alpha}t)+btE_{\alpha,2}(-\omega^{\alpha}t)+f_0^{\alpha/2}t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^{\alpha}t). \tag{4}$$

Рассмотрим случай отсутствия вынуждающей силы, *т. е. в* (1) *правая часть равна нулю.* Решаем, используя преобразования Лапласа вида (3). Подставив преобразования Лапласа в уравнение (1) с нулевой правой частью и приведя подобные слагаемые, получаем

$$\tilde{x}=\frac{1}{s^{2\alpha}+2\gamma s^{\alpha}+\omega^{2\alpha}}\left(s^{2\alpha-1}x(0)+s^{2\alpha-2}\dot{x}(0)+2\gamma s^{\alpha-1}x(0)\right). \tag{5}$$

Для дальнейших преобразований используем следующие формулы:

$$1+x+x^2+\ldots=\sum x^k=\frac{1}{1-x};\qquad \frac{1}{(1-x)^{\lambda}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\lambda+r-1}{r}x^r.$$

С помощью этих двух соотношений преобразуем дробь в (5):

$$\frac{1}{s^{2\alpha}+2\gamma s^{\alpha}+\omega^{2\alpha}}=\frac{s^{-\alpha}}{s^{\alpha}+2\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\omega^{2\alpha}s^{\alpha}}{s^{\alpha}+2\gamma}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2\alpha k}s^{-2\alpha k-2\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r}{r}(-2\gamma)^r s^{-\alpha r}.$$

Выполнив обратные преобразования Лапласа, получаем такое представление для решения уравнения (1):

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2\alpha k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r}{r}(-2\gamma)^r t^{2\alpha k+\alpha r}\left[\frac{x(0)}{\Gamma(2\alpha k+\alpha r+1)}+\right.$$

$$+\frac{2\gamma x(0)t^{1-\alpha}}{\Gamma\left(2\alpha k+\alpha r+1+(1-\alpha)\right)}+\frac{t\dot{x}(0)}{\Gamma(2\alpha k+\alpha r+2)}\Bigg]. \tag{6}$$

В качестве следующего случая рассмотрим вариант, когда правая часть имеет специальный вид $F(t)=E_{\alpha,1}(-t^{\alpha})$.

Воспользовавшись, как и ранее, уже известными преобразованиями Лапласа, получаем следующие выражения для изображения $\tilde{x}(s)$:

$$\tilde{x}(s)=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+2\gamma}x(0)+\frac{s^{-1}}{s^{\alpha}+2\gamma}2\gamma x(0)+\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha}+2\gamma}\dot{x}(0)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{s^{-\alpha k-\alpha-1}}{s^{\alpha}+2\gamma}.$$

И окончательно решение имеет вид

$$x(t)=x(0)E_{\alpha,1}(-2\gamma t)+2\gamma x(0)E_{\alpha,1+\alpha}(-2\gamma t)+\dot{x}(0)tE_{\alpha,2}(-2\gamma t)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}t^{\alpha k+2\alpha}E_{\alpha,\alpha k+2\alpha+1}(-2\gamma t). \tag{7}$$

Итак, для модели «фрактального» осциллятора (1) построены решения (4), (6) и (7) для различных типов правой части.

Моделирование распространения волн деформаций в массивах горных пород. Одним из новых перспективных подходов к исследованию распространения сейсмических волн в массивах горных пород в областях с разломами является метод «классовой сейсмодинамики», использующий аппарат дробного исчисления [7]. Согласно данной теории, для временной и пространственных переменных рассматривается один и тот же порядок дробности. Такая предполагаемая изофрактальность оправдывается резкими сейсмическими всплесками в массивах горных пород, которые распространяются упруго с эффектом рассеяния. Векторное волновое фрактальное уравнение для малых отклонений перемещений u_i имеет вид [7]

$$\rho\frac{\partial^{2\alpha}u_i}{\partial t^{2\alpha}}=M_{ijkl}\frac{\partial^{2\alpha}u_l}{\partial x_j^{\alpha}\partial x_k^{\alpha}}, \tag{8}$$

где $M_{ijkl}\equiv\left(\partial^{2}\omega_e\big/\partial e_{ij}^{e}\partial e_{kl}^{e}\right)$, ω_e – упругая энергия, e_{ij}^{e} – деформации. По *j, k, l* имеет место суммирование.

Утверждается [7], что использование уравнения (8) для изучения устойчивости и сейсмичности фрактальных зон в массивах горных пород является эффективным. Подчеркнем, что дробные изображения не являются фракталами, но обладают общими с ними систематическими свойствами. Фрактальные распределения могут быть описаны интегралами Римана, что приводит к дробному интегралу.

В работе [8] рассмотрено уравнение (8) применительно к исследованию фрактальной системы разломов. Предполагается, что имеет место нормальная система разломов с тектоническими усилиями сдвига в направлении x_2 под углом 30° от вертикали и в плоскости, нормальной к x_1, не изменяющаяся по x_3. Компоненты начального напряженного состояния твердой фракции массива горных пород равны

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33},\quad \sigma_{12}>0,\quad \sigma_{13}=\sigma_{23}=0. \tag{9}$$

Критическое значение компоненты напряжений σ_{12} может определяться в соответствии с критерием Кулона – Мора. Уравнение относительно трех нормальных компонент удовлетворяет предельному состоянию модели гиперпластичности [9]. Плотность силы на площади ширины d составляет $\sigma=\sigma_r(d/d_r)^{2(\beta-1)}$ и называется дробной интенсивностью (классическая интенсивность получается при $\beta=1$. Упругая энергия ω_e может быть представлена так:

$$\omega_e = a h_s \Delta^{\nu}(1 + b\theta^2/\Delta^2),$$

где $\Delta = -e_{11}^e - e_{22}^e$, $\theta^2 = e_{11}^{e2} + 2e_{12}^{e2} + e_{22}^{e2}$.

Для гиперупругих соотношений справедливо уравнение

$$\delta\sigma_{ij} = \left(\partial^2\omega_e / \partial e_{ij}^e \partial e_{kl}^e\right)\delta e_{kl}^e.$$

Вследствие условий симметрии $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $e_{ij}^e = e_{ji}^e$ и с учетом граничных условий (9) для матрицы жесткости M_{ijkl} ненулевыми являются следующие компоненты:

$$K \equiv M_{1111} = M_{2222} = M_{3333}, \quad L \equiv M_{1212}, \quad M \equiv M_{1122} = M_{1133}, \quad N \equiv M_{1112} = M_{2212}.$$

С помощью выполненных преобразований в [8] получена следующая система двух волновых уравнений дробного порядка:

$$\rho\frac{\partial^{2\alpha}u_1}{\partial t^{2\alpha}} = K\frac{\partial^{2\alpha}u_1}{\partial x_1^{2\alpha}} + 2N\frac{\partial^{2\alpha}u_1}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + L\frac{\partial^{2\alpha}u_1}{\partial x_2^{2\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}u_2}{\partial x_1^{2\alpha}} + (M+L)\frac{\partial^{2\alpha}u_2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}u_2}{\partial x_2^{2\alpha}},$$

$$\rho\frac{\partial^{2\alpha}u_2}{\partial t^{2\alpha}} = N\frac{\partial^{2\alpha}u_1}{\partial x_1^{2\alpha}} + (M+L)\frac{\partial^{2\alpha}u_1}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}u_1}{\partial x_2^{2\alpha}} + L\frac{\partial^{2\alpha}u_2}{\partial x_1^{2\alpha}} + 2N\frac{\partial^{2\alpha}u_2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}u_2}{\partial x_2^{2\alpha}}. \tag{10}$$

Решим систему уравнений (10), используя преобразования Лапласа. Применим к (10) преобразование Лапласа по переменной t. Получим

$$\rho s^{2\alpha}\tilde{u}_1 - \rho s^{2\alpha-1}u_1(0,x_1,x_2) - \rho s^{2\alpha-2}u_1'(0,x_1,x_2) =$$
$$= K\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_1^{2\alpha}} + 2N\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + L\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_2^{2\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_1^{2\alpha}} + (M+L)\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_2^{2\alpha}}, \tag{11}$$

$$\rho s^{2\alpha}\tilde{u}_2 - \rho s^{2\alpha-1}u_2(0,x_1,x_2) - \rho s^{2\alpha-2}u_2'(0,x_1,x_2) =$$
$$= N\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_1^{2\alpha}} + (L+M)\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_2^{2\alpha}} + L\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_1^{2\alpha}} + 2N\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}} + N\frac{\partial^{2\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_2^{2\alpha}}. \tag{12}$$

Применим теперь к (11) и (12) преобразование по переменной x_1:

$$\rho s^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_1 - \rho s^{2\alpha-1}\bar{u}_1(0,r,x_2) - \rho s^{2\alpha-2}\bar{u}_1'(0,r,x_2) = Kr^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_1 - Kr^{2\alpha-1}\tilde{u}_1(s,0,x_2) - Kr^{2\alpha-2}\tilde{u}_1'(s,0,x_2) +$$
$$+2Nr^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}\bar{\bar{u}}_1}{\partial x_2^{\alpha}} - 2Nr^{\alpha-1}\frac{\partial^{\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_2^{\alpha}}(s,0,x_2) + L\frac{\partial^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_1}{\partial x_2^{2\alpha}} + Nr^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_2 - Nr^{2\alpha-1}\tilde{u}_2(s,0,x_2) -$$
$$-Nr^{2\alpha-2}\tilde{u}_2'(s,0,x_2) + (M+L)r^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}\bar{\bar{u}}_2}{\partial x_2^{\alpha}} - (M+L)r^{\alpha-1}\frac{\partial^{\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_2^{\alpha}}(s,0,x_2) + N\frac{\partial^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_2}{\partial x_2^{2\alpha}},$$

$$\rho s^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_2 - \rho s^{2\alpha-1}\bar{u}_2(0,r,x_2) - \rho s^{2\alpha-2}\bar{u}_2'(0,r,x_2) = Nr^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_1 - Nr^{2\alpha-1}\tilde{u}_1(s,0,x_2) - Nr^{2\alpha-2}\tilde{u}_1'(s,0,x_2) +$$
$$+(L+M)r^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}\bar{\bar{u}}_1}{\partial x_2^{\alpha}} - (L+M)r^{\alpha-1}\frac{\partial^{\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_2^{\alpha}}(s,0,x_2) + N\frac{\partial^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_1}{\partial x_2^{2\alpha}} + Lr^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_2 - Lr^{2\alpha-1}\tilde{u}_2(s,0,x_2) -$$
$$-Lr^{2\alpha-2}\tilde{u}_2'(s,0,x_2) + 2Nr^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}\bar{\bar{u}}_2}{\partial x_2^{\alpha}} - 2Nr^{\alpha-1}\frac{\partial^{\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_2^{\alpha}}(s,0,x_2) + N\frac{\partial^{2\alpha}\bar{\bar{u}}_2}{\partial x_2^{2\alpha}}.$$

Затем выполним преобразование по переменной x_2:

$$
\begin{gathered}
\rho s^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1-\rho s^{2\alpha-1}\overline{\overline{\tilde{u}}}_1(0,r,g)-\rho s^{2\alpha-2}\overline{\overline{\tilde{u}}}'_1(0,r,g)=Kr^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1-Kr^{2\alpha-1}\overline{\overline{\tilde{u}}}_1(s,0,g)-Kr^{2\alpha-2}\overline{\overline{\tilde{u}}}'_1(s,0,g)+\\
+2Nr^{\alpha}g^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1-2Nr^{\alpha}g^{2\alpha-1}\overline{\tilde{u}}_1(s,r,0)-2Nr^{\alpha}g^{2\alpha-2}\overline{\tilde{u}}'_1(s,r,0)-L\left(2Nr^{\alpha-1}\frac{\partial^{\alpha}\tilde{u}_1}{\partial x_2^{\alpha}}(s,0,x_2)\right)+\\
+Lg^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1-Lg^{2\alpha-1}\overline{\tilde{u}}_1(s,r,0)-Lg^{2\alpha-2}\overline{\tilde{u}}'_1(s,r,0)+Nr^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2-Nr^{2\alpha-1}\overline{\overline{\tilde{u}}}_2(s,0,x_2)-\\
-Nr^{2\alpha-2}\overline{\overline{\tilde{u}}}'_2(s,0,x_2)+(M+L)r^{\alpha}g^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2-(M+L)r^{\alpha}g^{2\alpha-1}\overline{\tilde{u}}_2(s,r,0)-(M+L)r^{\alpha}g^{2\alpha-2}\overline{\tilde{u}}'_2(s,r,0)-\\
-L\left((M+L)r^{\alpha-1}\frac{\partial^{\alpha}\tilde{u}_2}{\partial x_2^{\alpha}}(s,0,x_2)\right)+Ng^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2-Ng^{2\alpha-1}\overline{\tilde{u}}_2(s,r,0)-Ng^{2\alpha-2}\overline{\tilde{u}}''_2(s,r,0).
\end{gathered}
$$

Подобное представление имеет второе уравнение относительно преобразований компоненты u_2.

Итак, после выполнения всех преобразований имеем

$$
\rho s^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1=Kr^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1+2Nr^{\alpha}g^{\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1+Lg^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1+Nr^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+(M+L)r^{\alpha}g^{\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+Ng^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+F_1(s,r,g),
$$

$$
\rho s^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2=Nr^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1+(M+L)r^{\alpha}g^{\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1+Ng^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1+Lr^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+2Nr^{\alpha}g^{\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+Ng^{2\alpha}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+F_2(s,r,g).
$$

Здесь функции $F_1(s,r,g)$ и $F_2(s,r,g)$ представляют собой суммы слагаемых, в которых присутствуют начальные условия.

Приведя в полученных выражения подобные слагаемые, запишем их в следующем виде:

$$
\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1\left(\rho s^{2\alpha}-Kr^{2\alpha}-2Nr^{\alpha}g^{\alpha}-Lg^{2\alpha}\right)=\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2\left(Nr^{2\alpha}+(M+L)r^{\alpha}g^{\alpha}+Ng^{2\alpha}\right)+F_1(s,r,g),
$$

$$
\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2\left(\rho s^{2\alpha}-Lr^{2\alpha}-2Nr^{\alpha}g^{\alpha}-Ng^{2\alpha}\right)=\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1\left(Nr^{2\alpha}+(L+M)r^{\alpha}g^{\alpha}+Ng^{2\alpha}\right)+F_2(s,r,g).
$$

Для удобства записи вводим дополнительные обозначения. В результате приходим к системе уравнений вида

$$
A_{11}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1=A_{12}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+F_1(s,r,g),\quad A_{21}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2=A_{22}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1+F_2(s,r,g).
$$

Решая эту систему, получаем

$$
\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2=\frac{A_{21}^{-1}A_{22}A_{11}^{-1}F_1(s,r,g)+F_2(s,r,g)}{1-A_{21}^{-1}A_{22}A_{11}^{-1}A_{12}},\quad \overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_1=A_{11}^{-1}A_{12}\overline{\overline{\overline{\tilde{u}}}}_2+A_{11}^{-1}F_1(s,r,g).
$$

Распространение волн деформаций в вязкоупругих средах. В качестве следующей модельной задачи рассмотрим задачу о распространении возмущений в полубесконечном вязкоупругом стержне ($x\ge 0$). В момент времени $t\ge 0$ на стержень подается начальное возмущение $r_0(t)$. Задача заключается в определении отклика $r(\infty,t)$. Скорость волнового фронта равна $c=1\big/\sqrt{\rho J(0^+)}$. Функция памяти ползучести $\Psi(t)=\left(1\big/J(0^+)\right)\left(dJ(t)/dt\right),\ t>0,\ J(t)$ – функция ползучести.

Уравнение движения волны в стержне можно записать так [10]:

$$
\frac{\partial^2 r(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\left(1+\Psi(t)\right)\frac{\partial^2 r(x,t)}{\partial t^2}=0. \tag{13}
$$

Из преобразования Лапласа по переменной t имеем

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu^2(s)\right)\tilde{r}(s,x)=0,\quad \mu(s)=s\left(\rho s\tilde{J}(s)\right)^{1/2}. \tag{14}
$$

С учетом граничных условий можно найти формальное решение:

$$\tilde{r}(s,x)=\tilde{r}_0(s)\exp\left(-x\mu(s)\right). \tag{15}$$

Для построения истинного решения используем алгоритм Майнарди [11]. Разложим функцию $\mu(s)$ в асимптотический ряд

$$\mu(s)^{s\to\infty}\sim\sum_{k=0}^{\infty}b_k s^{1-\beta_k},\ \ 0=\beta_0<\beta_1<\dots .$$

Представим это разложение в виде двух частей:

$$\mu_+(s)\equiv\sum_{k=0}^{m}b_k s^{1-\beta_k},\ \ \beta_k\le 1,\quad \mu_-(s)\equiv\sum_{k=0}^{m}b_k s^{1-\beta_k}-\mu_+(s),\quad \mu_-(s)\equiv\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k s^{1-\beta_k},\quad \beta_k>1.$$

Формальное решение (15) запишем в следующем виде:

$$\tilde{r}(s,x)=\tilde{r}_0(s)\exp\left(-x\mu_+(s)\right)\tilde{R}(s,x),\quad \tilde{R}(s,x)\equiv\exp\left(-x\mu_-(s)\right).$$

$\tilde{R}(s,x)$ также раскладываем в асимптотический ряд

$$\tilde{R}(s,x)^{s\to\infty}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(x)s^{-\lambda_k},\ \ 0\le\lambda_0<\lambda_1<\dots .$$

Подставив в уравнение движения (13), получаем

$$\theta\tilde{R}(s,x)=\left[\frac{d^2}{dx^2}-2\mu_+(s)\frac{d}{dx}-\left(\mu^2(s)-\mu_+^2(s)\right)\right]\tilde{R}(s,x)=0,\quad \tilde{R}(s,0)=1.$$

Воспользуемся следующей теоремой для асимптотических рядов.

Т е о р е м а. *Если выполнены условия*

$$L^{\varepsilon\to 0}\sim\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu_i}L_i,\quad 0=\nu_0<\nu_1<\dots,\ Lf=0,\quad f^{\varepsilon\to 0}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{\lambda_k}\vartheta_k,\ \lambda_0<\lambda_1<\dots,$$

тогда

$$L_0\vartheta_0=0,\quad L_0\vartheta_k=-\sum_i L_i\vartheta_{j(i,k)},\quad \nu_i+\lambda_j=\lambda_k,\quad \lambda_k=\sum_{i=1}^{N}m_i\nu_i.$$

Применим данную теорему к нашей задаче. Получим

$$L_0=\frac{\partial}{\partial x},\quad L_i=p_i\frac{\partial^2}{\partial x^2}+q_i\frac{\partial}{\partial x}+r_i,\quad \frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\vartheta_k}{\partial x}=-\sum_i\left(p_i\frac{\partial^2}{\partial x^2}+q_i\frac{\partial}{\partial x}+r_i\right)\vartheta_{j(i,k)},$$

$$\vartheta_k(x)=\sum_{l=0}^{k}A_{k,l}\frac{x^l}{l!},\quad \vartheta_k(0)=\delta_{k0},$$

$$\begin{cases}A_{k,l}=\delta_{k,l},\quad l=0,\\ A_{k,l}=-\sum_i\left[\sum_j\left(p_iA_{j,l+1}+q_iA_{j,l}+r_iA_{j,l-1}\right)\delta_{j,j(i,k)}\right],\quad 1\le l\le k.\\ A_{k,l}=0,\quad l>k.\end{cases}$$

В итоге имеем

$$\tilde{r}(s,x)^{s\to\infty}\sim\tilde{r}_0(s)\exp\left(-x\mu_+(s)\right)\tilde{R}(s,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(x)\tilde{r}_0(s)s^{-\lambda_k}\exp\left(-x\mu_+(s)\right). \tag{16}$$

Обозначим отдельно функцию

$$\tilde{\Phi}_k(s,x) \equiv \tilde{r}_0(s)s^{-\lambda_k} \exp\left(-x\left(\mu_+(s) - s/c\right)\right).$$

Перепишем формальное решение (16) так:

$$\tilde{r}(s,x)^{s\to\infty} \sim \exp\left(-(xs/c)\right)\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x)\tilde{\Phi}_k(s,x).$$

И окончательное решение принимает вид

$$r(t,x)^{t\to(x/c)^+} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x)\Phi_k\left(t-(x/c),x\right). \tag{17}$$

Рассмотрим примеры реализации описанного алгоритма для конкретных моделей поведения материала.

Дробная модель Максвелла. Уравнение, описывающее связь напряжений и деформаций, в этом случае имеет вид

$$\sigma(t) + a_1\frac{d^\nu\sigma(t)}{dt^\nu} = b_1\frac{d^\nu\varepsilon(t)}{dt^\nu}. \tag{18}$$

Применяем преобразование Лапласа к (18):

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}(s) = \tilde{\sigma}(s)\dfrac{1+a_1s^\nu}{b_1s^\nu}, \\ \tilde{\sigma}(s) = \tilde{\varepsilon}(s)\dfrac{b_1s^\nu}{1+a_1s^\nu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J(t) = \dfrac{1}{b_1}\dfrac{t^\nu}{\Gamma(1+\nu)} + \dfrac{a_1}{b_1}, \\ G(t) = \dfrac{b_1}{a_1}E_\nu\left(-\dfrac{t^\nu}{a_1}\right). \end{cases}$$

Применив процедуру построения решения согласно описанному алгоритму, имеем

$$\mu(s) = s\rho^{1/2}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{b_1s^\nu}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}s\left(1+\frac{1}{a_1s^\nu}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Воспользуемся алгоритмом Майнарди. Тогда (19) приобретает вид

$$\mu(s) = \sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}s\left(1+\frac{1}{2a_1s^\nu}+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{1/2}{n}(a_1)^{-n}s^{-\nu n}\right) = \sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\left(s+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{1/2}{n}(a_1)^{-n}s^{1-\nu n}\right)^{1/2}. \tag{20}$$

Рассмотрим *дробную модель Максвелла со степенью дробности* $\nu = 1/2$. То есть (19) и (20) имеют вид

$$\mu(s) = s\rho^{1/2}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{b_1s^{1/2}}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}s\left(1+\frac{1}{a_1s^{1/2}}\right)^{1/2},$$

$$\mu(s) = \sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\left(s+\frac{s^{1/2}}{2a_1}-\frac{1}{8a_1^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\binom{1/2}{n}(a_1)^{-n}s^{1-(1/2)n}\right).$$

Получаем

$$\mu_+(s) = \sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\left(s+\frac{s^{1/2}}{2a_1}-\frac{1}{8a_1^2}\right), \quad \mu_-(s) = \sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\left(\sum_{n=3}^{\infty}\binom{1/2}{n}(a_1)^{-n}s^{1-(1/2)n}\right),$$

$$\mu^2(s)=\frac{\rho a_1}{b_1}s^2+\frac{\rho}{b_1}s^{3/2},\quad \mu_+^2(s)=\frac{\rho a_1}{b_1}s^2+\frac{\rho}{64a_1b_1}+\frac{\rho}{b_1}s^{3/2}-\frac{\rho}{8a_1b_1}s^{1/2},$$

$$\mu^2(s)-\mu_+^2(s)=\frac{\rho}{8a_1b_1}s^{1/2}-\frac{\rho}{64a_1b_1}.$$

Пусть

$$c=\sqrt{\rho a_1/b_1},\quad \theta=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2}{c}\left(s+\frac{s^{1/2}}{2a_1}-\frac{1}{8a_1^2}\right)\frac{d}{dx}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{s^{1/2}}{8a_1^3}-\frac{1}{64a_1^4}\right),$$

$$L=\frac{\theta}{-2s/c}=\frac{d}{dx}+\frac{1}{s^{1/2}}\left(\frac{1}{2a_1}\frac{d}{dx}+\frac{1}{16ca_1^3}\right)+\frac{1}{s}\left(-\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{8a_1^2}\frac{d}{dx}-\frac{1}{128ca_1^4}\right),$$

$$L^{s\to\infty}\approx L_0+\frac{1}{s^{1/2}}L_1+\frac{1}{s}L_2,$$

$$L_0=\frac{d}{dx},\quad L_1=\frac{1}{2a_1}\frac{d}{dx}+\frac{1}{16ca_1^3},\quad L_2=-\frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{8a_1^2}\frac{d}{dx}-\frac{1}{128ca_1^4}.$$

С учетом того, что $\nu_0=0,\ \nu_1=1/2,\ \nu_2=1,\ N=2,\ \lambda_k=k/2,$ получаем $j=k-2\nu_i$ и

$$A_{k,l}=-\left(\frac{1}{2a_1}A_{k-1,l}+\frac{1}{16ca_1^3}A_{k-1,l-1}-\frac{c}{2}A_{k-2,l+1}-\frac{1}{8a_1^2}A_{k-2,l}-\frac{1}{128ca_1^4}A_{k-2,l-1}\right).$$

В итоге имеем

$$\tilde\Phi_k(s,x)=s^{-k/2-1}\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\left(\frac{s^{1/2}}{2a_1}-\frac{1}{8a_1^2}\right)\right)=\exp\left(x\sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\frac{1}{8a_1^2}\right)s^{-k/2-1}\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\frac{s^{1/2}}{2a_1}\right).$$

Разложим экспоненту в ряд Тейлора

$$\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\frac{s^{1/2}}{2a_1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho a_1}{b_1}\right)^{n/2}(2a_1)^{-n}\frac{x^ns^{n/2}}{n!}.$$

Получаем

$$\tilde\Phi_k(s,x)=\exp\left(x\sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\frac{1}{8a_1^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho a_1}{b_1}\right)^{n/2}(2a_1)^{-n}\frac{x^ns^{n/2-k/2-1}}{n!}.$$

С помощью обратного преобразования Лапласа находим

$$\Phi_k(t,x)=\exp\left(x\sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\frac{1}{8a_1^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho a_1}{b_1}\right)^{n/2}(2a_1)^{-n}\frac{x^nt^{k/2-n/2}}{n!\Gamma(k/2-n/2+1)}.$$

И окончательное решение для модели Максвелла со степенью дробности $\nu=1/2$:

$$r(t,x)^{t\to(x/c)^+}\sim\exp\left(x\sqrt{\frac{\rho a_1}{b_1}}\frac{1}{8a_1^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}A_{k,l}\frac{x^l}{l!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho a_1}{b_1}\right)^{n/2}(2a_1)^{-n}\frac{x^n(t-x)^{k/2-n/2}}{n!\Gamma(k/2-n/2+1)}.$$

Для *дробной модели Максвелла со степенью дробности* $\nu=3/4$, выполнив подобные преобразования, получаем

$$r(t,x)^{t\to(x/c)^+}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}A_{k,l}\frac{x^l}{l!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho a_1}{b_1}\right)^{n/2}(2a_1)^{-n}\frac{x^n(t-x)^{k/4-n/2}}{n!\Gamma(k/4-n/2+1)}.$$

Дробная модель Фойгта. Основное уравнение дробной модели Фойгта имеет вид

$$\sigma(t)=m\varepsilon(t)+b_1\,d^{\nu}\varepsilon(t)/dt^{\nu}. \tag{21}$$

Воспользуемся преобразованием Лапласа к (21):

$$\begin{cases}\tilde{\sigma}(s)=\left(m+b_1s^{\nu}\right)\tilde{\varepsilon}(s),\\ \tilde{\varepsilon}(s)=\dfrac{1}{m+b_1s^{\nu}}\tilde{\sigma}(s)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}J(t)=(1/m)\left(1-E_{\nu}\left(-(tm/b_1)^{\nu}\right)\right),\\ G(t)=m+b_1\dfrac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}.\end{cases}$$

Пусть $\tau=b_1/m$, $J_1=1/m$.

Применив процедуру построения решения согласно описанному алгоритму, получаем

$$\mu(s)=s\rho^{1/2}\left(\frac{1}{m+b_1s^{\nu}}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}s^{1-\nu/2}\left(1+\frac{m}{b_1}s^{-\nu}\right)^{-1/2}.$$

Рассмотрим *дробную модель Фойгта со степенью* $\nu=1/2$:

$$\mu(s)=s\rho^{1/2}\left(\frac{1}{m+b_1s^{1/2}}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}s^{3/4}\left(1+\frac{m}{b_1}s^{-1/2}\right)^{-1/2}=\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}s^{3/4}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{m}{b_1}\right)^n s^{-n/2}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}\left(s^{3/4}-\frac{m}{2b_1}s^{1/4}+\sum_{n=2}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{m}{b_1}\right)^n s^{1/2-n}\right);$$

$$\mu_+(s)=\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}\left(s^{3/4}-\frac{m}{2b_1}s^{1/4}\right),\quad \mu_-(s)=\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}\sum_{n=2}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{m}{b_1}\right)^n s^{1/2-n},\quad \mu^2(s)=\frac{\rho s^2}{m+b_1s^{1/2}},$$

$$\mu_+^2(s)=\frac{\rho}{b_1}s^{3/2}+\frac{\rho m^2}{4b_1^3}s^{1/2}-\frac{\rho m}{b_1^2}s,\quad \mu^2(s)-\mu_+^2(s)=\frac{\rho m^2}{4b_1^2}\frac{\left(-(m/b_1)s^{1/2}+3s\right)}{m+b_1s^{1/2}},$$

$$\theta=\frac{d^2}{dx^2}-2\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}\left(s^{3/4}-\frac{m}{2b_1}s^{1/4}\right)\frac{d}{dx}+\frac{\rho m^2}{4b_1^2}\frac{\left((m/b_1)s^{1/2}+3s\right)}{m+b_1s^{1/2}};$$

$$L^{s\to\infty}\approx L_0+\frac{1}{s^{1/2}}L_1+\frac{1}{s^{3/4}}L_2+\frac{1}{s}L_3+\frac{1}{s^{5/4}}L_4,$$

$$L_0=\frac{d}{dx},\quad L_1=-\frac{1}{2\tau^{1/2}}\frac{d}{dx},\quad L_2=-\sqrt{\frac{\mu\tau^{1/2}}{2\rho}}\frac{d^2}{dx^2}-\sqrt{\frac{2\rho}{\mu}}\frac{1}{16\tau},\quad L_3=-\frac{1}{2\tau}\frac{d}{dx},$$

$$L_4=-\sqrt{\frac{\mu}{2\rho\tau^{1/2}}}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\rho}{\mu}\frac{3}{16\tau^{5/4}}.$$

Вследствие того, что $\nu_0=0$, $\nu_1=1/2$, $\nu_2=3/4$, $\nu_3=1$, $\nu_4=5/4$, $N=4$, $\lambda_k=k/4$, получаем $j=k-4\nu_i$ и

$$A_{k,l}=-\left(-\frac{1}{2\tau^{1/2}}A_{k-2,l}-\sqrt{\frac{\mu\tau^{1/2}}{2\rho}}A_{k-3,l+1}-\sqrt{\frac{2\rho}{\mu}}\frac{1}{16\tau}A_{k-3,l-1}-\frac{1}{2\tau}A_{k-4,l}-\right.$$

$$-\sqrt{\frac{\mu}{2\rho\tau^{1/2}}}A_{k-5,l+1}+\frac{2\rho}{\mu}\frac{3}{16\tau^{5/4}}A_{k-5,l-1}\Bigg).$$

В итоге

$$\tilde{\Phi}_k(s,x)=s^{-k/4-1}\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}\left(s^{3/4}-\frac{m}{2b_1}s^{1/4}\right)\right).$$

Разложим экспоненту в ряд Тейлора

$$\exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}s^{3/4}\right)\exp\left(x\sqrt{\frac{\rho}{b_1}}\frac{m}{2b_1}s^{1/4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{n/2}\frac{x^n s^{3n/4}}{n!}\sum_{g=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{g/2}\left(\frac{m}{2b_1}\right)^{g}\frac{x^g s^{g/4}}{g!}.$$

Получаем

$$\tilde{\Phi}_k(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{n/2}\frac{x^n}{n!}\sum_{g=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{g/2}\left(\frac{m}{2b_1}\right)^{g}\frac{x^m s^{3n/4+g/4-k/4-1}}{g!}.$$

С помощью обратного преобразования Лапласа имеем

$$\Phi_k(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{n/2}\frac{x^n}{n!}\sum_{g=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{g/2}\left(\frac{m}{2b_1}\right)^{g}\frac{x^m t^{k/4-g/4-3n/4}}{g!\Gamma\left(\frac{k}{4}-\frac{g}{4}-\frac{3}{4}n+1\right)}.$$

И окончательное решение для *дробной модели Фойгта со степенью* ν = 1/2:

$$r(t,x)^{t\to(x/c)^+}\approx\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}A_{k,l}\frac{x^l}{l!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{n/2}\frac{x^n}{n!}\sum_{g=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{g/2}\left(\frac{m}{2b_1}\right)^{g}\frac{x^m(t-x)^{k/4-g/4-3n/4}}{g!\Gamma\left(\frac{k}{4}-\frac{g}{4}-\frac{3n}{4}+1\right)}.$$

Для *дробной модели Фойгта со степенью* ν = 3/4, выполнив последовательность подобных действий и преобразований, получаем

$$r(t,x)^{t\to(x/c)^+}\approx\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}A_{k,l}\frac{x^l}{l!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\rho}{b_1}\right)^{n/2}\frac{x^n}{n!}\frac{x^n(t-x)^{k/8-5n/8}}{n!\Gamma\left(\frac{k}{8}-\frac{5n}{8}+1\right)}.$$

Заключение. Построены решения различных модельных задач механики с использованием модифицированных моделей дробного типа. Рассмотрены такие задачи, как модель «фрактального» осциллятора, модельная задача о динамическом состоянии массива горных пород в области разломов, модельные задачи о распространении волн в деформируемых вязкоупругих средах для различных моделей вязкоупругости. При построении решений применялся алгоритм Майнарди и преобразование Лапласа. Найденные решения могут быть использованы при рассмотрении конкретных прикладных задач.

Список использованных источников

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Miller, K. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations / K. Miller, B. Ross. – New York: Wiley, 1993. – 384 p.

3. Zhuravkov, M. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus / M. Zhuravkov, N. Romanova // Math. Mech. Solids. – 2014. – Vol. 21, № 5. – P. 595–620. https://doi.org/10.1177/1081286514532934

4. Bosiakov, S. Fractional Calculus in Biomechanics / S. Bosiakov // Encyclopedia of Continuum Mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2020. – Vol. 2. – P. 946–953. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_76

5. Rossikhin, Y. A. Calculus Models in Dynamic Problems / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Viscoelastivity. Handbook of Fractional Calculus with Applications. – 2019. – Vol. 7, part A. – P. 139–158.

6. Мейланов, Р. П. Фрактальный осциллятор с затуханием / Р. П. Мейланов, М. А. Назаралиев, В. Д. Бейбалаев // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения: материалы Первой междунар. науч. конф. – Махачкала, 2003. – С. 70–71.

7. Gudehus, G. Clasmatic seismodynamics – Oxymoron or pleonasm? / G. Gudehus, A. Touplikiotis // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2012. – Vol. 38. – P. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2011.11.002

8. Gorenfo, R. Stability and seismicity of fractal fault systems in a fractional image / R. Gorenfo, G. Gudehus, A. Touplikiotis // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 2014. – Vol. 95, № 11. – P. 1–39. https://doi.org/10.1002/zamm.201300020

9. Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 543 с.

10. Colombaro, I. On Transient Waves in Linear Viscoelasticity / I. Colombaro, A. Giusti, F. Mainardi // Wave Motion. – 2017. – Vol. 74. – P. 191–212. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.07.008

11. Mainardi, F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity / F. Mainardi. – London: Imperial College Press, 2010. – 368 p. https://doi.org/10.1142/p614

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev A. I. *Fractional Integrals and Derivatives and Some Applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 687 p. (in Russian)

2. Miller K., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, Wiley, 1993. 384 p.

3. Zhuravkov M., Romanova N. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 595–620 https://doi.org/10.1177/1081286514532934

4. Bosiakov S. Fractional Calculus in Biomechanics. *Encyclopedia of Continuum Mechanics*, *vol. 2.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2020, pp. 946–953. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_76

5. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Calculus Models in Dynamic Problems. *Viscoelastivity. Handbook of Fractional Calculus with Applications*, 2019, vol. 7, part A, pp. 139–158.

6. Meylanov R. P., Nazarliev M. A., Beybalaev V. D. Fractal oscilyator c zatuxaniem (Fractal oscillator with attenuation). *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya: materialy Pervoi mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* [Functional differential equations and their applications: Proceedings of the First International Scientific Conference]. Makhachkala, 2003, pp. 70–71 (in Russian).

7. Gudehus G., Touplikiotis A. Clasmatic seismodynamics – Oxymoron or pleonasm? *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2012, vol. 38, pp. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2011.11.002

8. Gorenfo R., Gudehus G., Touplikiotis A. Stability and seismicity of fractal fault systems in a fractional image. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanic*, vol. 95, no. 11, pp. 1–39. https://doi.org/10.1002/zamm.201300020

9. Zhuravkov M. A., Starovoytov E. I. *Continua Mechanics. The Theory of Elasticity and Plasticity.* Minsk, BSU, 2011. 543 p. (in Russian).

10. Colombaro I., Giusti A., Mainardi F. On Transient Waves in Linear Viscoelasticity. *Wave Motion*, 2017, vol. 74, pp. 191–212. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.07.008

11. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity.* London, Imperial College Press, 2010. 368 p. https://doi.org/10.1142/p614

Информация об авторах

Журавков Михаил Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 9, 220006, Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhuravkov@bsu.by

Колячко Владислав Владимирович – ассистент лаборатории прикладной механики, кафедра теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 9, 220006, Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Michael A. Zhuravkov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Belarusian State University (9, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhuravkov@bsu.by

Vladislav V. Kolyachko – Assistant of Laboratory of Applied Mechanics, Theoretical and Applied Mechanics Department, Belarusian State University (9, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus).