УДК 519.237

В. И. МАЛЮГИН, А. Ю. НОВОПОЛЬЦЕВ

АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРОЙ В СЛУЧАЕ СКРЫТОЙ МАРКОВСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ СОСТОЯНИЙ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 22.05.2015)

Введение. Статистические *модели с переключением состояний* (*Regime Switching Models – RS-Models* [1]) являются удобным инструментом анализа сложных систем с циклической сменой классов состояний, обусловленной внешними воздействиями на систему. Указанные модели получили широкое применение в прикладных исследованиях макроэкономических процессов и финансовых рынков, а также в ряде технических приложений [1, 2]. Проблема анализа циклов на основе данных моделей может рассматриваться в контексте более общей проблемы *структурных сдвигов* (*structural breaks*) [3, 4], приводящих к скачкообразным изменениям параметров моделей.

Относительно модели смены состояний сложной системы на заданном множестве классов состояний могут делаться различные теоретические предположения. Для описания последовательности зависимых состояний, начиная с работы [5], применяется марковская модель *переключения состояний* (*Markov Switching – MS*). В случаях, когда в рамках марковской модели имеет место высокая неопределенность относительно будущего состояния системы либо когда модель зависимости классов состояний не известна, целесообразно использовать предположение о независимости классов состояний, приводящее к моделям с *независимыми переключениями состояний* (*Independence Switching Models – IS-Models*), анализу которых посвящены работы [4, 6–9]. В настоящей статье объектом исследования является модель векторной авторегрессии с экзогенными переменными и марковскими переключениями состояний (*vector autoregressive with exogenous variables model with Markov Switching states – MS-VARX*) [1] и ее частные случаи.

1. Многомерные модели с переключениями состояний и задачи их анализа

Авторегрессионная форма модели. Пусть сложная система в момент времени t характеризуется случайным вектором наблюдений, $y_t \in \Re^n$, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, где Ω – пространство элементарных объектов ($\omega \in \Omega$ – элементарный объект); $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра подмножеств из Ω; $\mathbf{P}$ – вероятностная мера: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{\omega \in A\}$, $A \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_{L-1}\}$ – разбиение Ω на конечное число непустых непересекающихся подмножеств таких, что $\Omega_l \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}\{\Omega_l\} = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega_l\} > 0$, $\bigcup\limits_{l \in S(L)} \Omega_l = \Omega$, $S(L) = \{0, \ldots, L-1\}$. Подмножества $\{\Omega_l\}$ будем называть *классами состояний сложной системы,* число которых равно L.

Предполагается, что случайный вектор наблюдений допускает разбиение $y_t = (x'_t, z'_t)' \in \Re^n$ (где $'$ – знак транспонирования, $n = N + M$, $N \geq 1$, $M \geq 1$) на подвекторы эндогенных переменных $x_t = (x_{tj}) \in \Re^N$, характеризующих состояние сложной системы, и экзогенных переменных $z_t = (z_{tk}) \in \mathfrak{Z} \subset \Re^M$, описывающих внешние воздействия на систему. В качестве базовой модели наблюдений будем использовать модель векторной авторегрессии с неоднородной циклически изменяющейся эндогенно-экзогенной структурой [4]. В общем случае будем полагать, что временной ряд $y_t = (x'_t, z'_t)'$ описывается моделью $RS\text{-}VARX(p)(p \geq 1))$ вида

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} A_{d(t),i} x_{t-i} + B_{d(t)} z_t + \eta_{d(t),t},\ t = 1,...,T, \tag{1}$$

где $x_{1-p},\ldots,x_0 \in \Re^N$ – заданные начальные значения; $\eta_{d(t),t} \in \Re^N$ – определенные на $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$ случайные величины, соответствующие ошибкам наблюдения; $d(t) \in S(L) = \{0,...,L-1\}$ – номер *класса состояния*.

Относительно модели (2) будем требовать выполнение следующих предположений.

М.1. Матрицы коэффициентов авторегрессии $\{A_{l,i}\}$ $(i = 1,..., p)$ для каждого класса состояний $l \in S(L)$ удовлетворяют условию стационарности модели $VAR(p)$ [4].

М.2. Ошибки наблюдения $\{\eta_{l,t}\}$ $(t = 1,...,T)$ являются независимыми в совокупности гауссовскими случайными векторами с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей Σ_l : $\mathbf{E}\{\eta_{l,r}\} = 0_N \in \Re^N$, $\mathbf{E}\{\eta_{l,r}\eta'_{l,s}\} = \delta_{r,s}\Sigma_l$ $(r,s = 1,...,T,\ l \in S(L))$, где $\delta_{r,s}$ – символ Кронекера.

М.3. Значения экзогенных переменных $z_t = (z_{t1},...,z_{tM})' \in \mathbf{Z} \subseteq \Re^M$ являются заданными.

М.4. Модель удовлетворяет *условию структурной параметрической неоднородности*: $A_l \neq A_k$ и (или) $B_l \neq B_k$ $\forall k \neq l,\ k,l \in S(L)$.

При выполнении предположений М.1–М.4 модель (1) является *кусочно-стационарной* (*segmented stationary*) [3]. Будем рассматривать кусочно-стационарные модели с L *переключающимися классами состояний*, для которых $2 \leq L < s+1$, где $s \geq 1$ – число структурных изменений, соответствующих смене классов состояний, в неизвестные моменты времени $1 < \tau_1 < ... < \tau_s < T$. Относительно номеров классов состояний $d(t) \equiv d_t \in S(L)$ $(t = 1,...,T)$ возможны два типа предположений:

d.1. d_t $(t = 1,...,T)$ – *независимые в совокупности случайные величины* с распределением вероятностей $P\{d_t = l\} = \pi_l > 0\big(l \in S(L)\big)$, $\sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1$;

d.2. d_t $(t = 1,...,T)$ – образуют *однородную эргодическую цепь Маркова* (ОЦМ) с распределением, которое определяется вектором вероятностей начального состояния π и матрицей вероятностей одношаговых переходов P соответственно:

$$\pi = (\pi_l),\ \pi_l = \mathbf{P}\{d_1 = l\} > 0\big(l \in S(L)\big),\ \sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1;$$

$$P = (p_{kl}),\ p_{kl} = \mathbf{P}\{d_{t+1} = l \mid d_t = k\} \geq 0\ \ (k,l \in S(L)),\ \sum_{l \in S(L)} p_{kl} = 1,\ k \in S(L).$$

В случае двух классов состояний (L=2) будем использовать следующие предположения относительно параметров ОЦМ:

$$\pi_0 = \pi_1 = 0{,}5,\ P = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega \\ \omega & 1-\omega \end{pmatrix}\ (0 < \omega < 0{,}5). \tag{2}$$

При условии *d*.1 модель (1) будем называть *моделью VARX с независимыми случайными переключениями состояний* (*IS-VARX*), а в случае *d*.2 – *моделью VARX с марковскими переключениями состояний* (*MS-VARX*).

Модель (1) включает два частных случая, имеющих самостоятельный интерес:

1) *модель многомерной линейной регрессии MLR* при отсутствии лаговых переменных, т. е. при $p = 0$ и $B_l \neq \mathrm{O}_{N\times M}$ $(l \in S(L))$;

2) *модель векторной авторегрессии VAR* без экзогенных переменных, имеющей место при $B_l = \mathrm{O}_{N\times M}$ $(l \in S(L))$, $p > 0$.

В предположениях *d*.1 или *d*.2 этим случаям соответствуют модели *IS-MLR, IS-VAR* или *MS-MLR, MS-VAR*.

Регрессионная форма модели. Модель *RS-VARX* общего вида (2) в предположениях М.1–М.4, *d*.1, *d*.2 допускает представление в регрессионной форме:

$$x_t = \Pi_{d(t)} u_t + \eta_{d(t),t}, \tag{3}$$

где $\Pi_{d(t)} = (A_{d(t),1}, \ldots, A_{d(t),p}, B_{d(t)})$ – блочная матрица параметров размерности $N \times (pN + M)$; $u_t = (x'_{t-1}, \ldots, x'_{t-p}, z_t)' \in \Re^{Np+M}$ – составной вектор предопределенных переменных, образованный из лаговых и экзогенных переменных, значения которых известны к моменту времени t включительно. Регрессионная форма (3) используется далее при описании предлагаемых базовых алгоритмов, которые позволяют также осуществлять анализ частных случаев рассматриваемой модели при соответствующей ее спецификации.

Задачи анализа. Структурные изменения могут быть частичными либо полными, т. е. параметры $\{A_{d(t),i}, B_{d(t)}, \Sigma_{d(t)}\}$ рассматриваемых моделей могут частично либо полностью различаться для различных классов состояний $d_t \equiv d(t) \in S(L)$. Истинные значения параметров моделей и моменты структурных изменений не известны. Имеется реализация векторного временного ряда $y_t \in \Re^n (t = 1,...,T)$, описываемого моделью *RS-VARX* вида (1) в условиях d.1 или d.2.

Требуется разработать алгоритмы решения следующих задач статистического анализа модели:

1) расщепление смесей распределений наблюдений, описываемых моделью *MS-VARX*, которое предполагает совместное оценивание неизвестных параметров моделей и номеров классов состояний $d_1,...,d_T \in S(L)$ (классификации наблюдений $y_t (t = 1,...,T)$), сложной системы для рассматриваемого периода наблюдения;

2) дискриминантный анализ моделей *MS-VARX* с целью классификации вновь поступающих наблюдений $y_{T+k} = (x'_{T+k}, z'_{T+k})' \in \Re^n (k = 1,...,h,\ h \geq 1)$.

Очевидно, моменты переключения состояний и номера классов состояний связаны взаимнооднозначным соответствием, поэтому по оцененной последовательности $d_1,...,d_T \in S(L)$ могут быть установлены моменты структурных изменений $\{\tau_i\}$ $(i = 1,...,s)$.

Для моделей *IS-VARX* и *IS-MLR*, получаемых из (1) в предположении d.1, задачи 1 и 2 решены в [4]. В настоящей статье предлагаются алгоритмы решения задач 1, 2 для модели *MS-VARX* вида (1) в предположении d.2, которые обобщают известные постановки задач анализа векторных авторегрессионных моделей [5, 10] по двум аспектам: рассматривается класс моделей *VAR* с экзогенными переменными; помимо расщепления смесей распределений решается задача дискриминантного анализа многомерных моделей статистических зависимостей в случае марковской модели переключения классов состояний. Используется методология исследований, разработанная для моделей *IS-VARX* [4]. В случае задачи 1 предлагаются модификации *EM*-алгоритма (*Expectation-Maximization algorithm*) расщепления смеси распределений многомерных регрессионных наблюдений [7], который применяется к модели *MS-VARX*, представленной в регрессионной форме (3). Данные алгоритмы относятся к семейству *алгоритмов Баума – Уэлча* (*Baum – Welch algorithms*) расщепления смесей многомерных распределений, управляемых скрытой цепью Маркова (*Hidden Markov Chain*) [10] и различающихся базовыми моделями наблюдений. Вопросы сходимости *EM*-алгоритмов обсуждаются в [7, 9]. Задача 2 решается с помощью подстановочного *байесовского решающего правила* (БРП) групповой классификации временных рядов, которое оценено по классифицированной обучающей выборке, полученной при решении задачи 1. Данное решающее правило обобщает правило групповой классификации векторных авторегрессионных наблюдений, предложенное в [8], на случай марковской зависимости классов состояний сложной системы.

2. Расщепление смесей распределений наблюдений, описываемых моделью *MS-VARX*

Представления для оценок параметров. Для модели (1) будем применять регрессионную форму (3). Для исходной выборки многомерных авторегрессионных наблюдений будем использовать обозначение $(\bar{X}, \bar{U})$, где $\bar{X} = (x'_1,...,x'_T)' \in \Re^{NT}$ – временной ряд эндогенных переменных, соответствующий временному ряду предопределенных переменных $\bar{U} = (u'_1,...,u'_T)' \in \Re^{NpT} \times \mathfrak{Z}^T \subseteq \Re^{(Np+M)T}$.

Будем также обозначать:

$\theta_l \in \Re^m$ $(m = N \times (pN + M) + N(N+1)/2)$ – составной вектор параметров модели *VARX* для класса состояний $l \in S(L)$ вида (3), образованный из независимых элементов матриц $\{\Pi_l,\ \Sigma_l\}$ $(l \in S(L))$;

$\phi \in \Re^q$ $(q = Lm + (L-1)(L+1))$ – вектор параметров смеси распределений, включая параметры *VARX*-моделей $\{\theta_l\}$ и параметры ОЦМ $\pi,\ P$;

$D = (d_1,...,d_T)' \in S^T(L)$ – вектор состояний сложной системы для рассматриваемого периода наблюдения, где $\{d_t\}$ – ОЦМ с параметрами $\pi,\ P$.

Если модель (1), (3) удовлетворяет предположениям M.1–M.4, то случайный вектор значений эндогенных переменных $x_t \in \Re^N$, соответствующий фиксированным значениям предопределенных переменных $u_t \in \Re^{Np+M}$ и состоянию $d_t = l\ (l \in S(L))$, является условно-гауссовским с плотностью распределения

$$p_X(x;u,\theta_l) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma_l|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\Pi_l u)' \Sigma_l^{-1} (x - \Pi_l u)\right\},\ x \in \Re^N,\ u \in \Re^{Np+M}\ (t=1,...,T). \quad (4)$$

С учетом (4) и предположения *d*.2 при фиксированном векторе состояний D функция правдоподобия для вектора параметров модели ϕ по выборке $(\bar{X},\bar{U})$ имеет вид

$$L(\phi;\bar{X},\bar{U},D) = \pi_{d_1} p_X(x_1;u_1,\theta_{d_1}) \prod_{t=2}^{T} p_{d_{t-1},d_t} p_X(x_t;u_t,\theta_{d_t}). \quad (5)$$

Обозначим через $\Lambda(\phi,\tilde{\phi})$ условное математическое ожидание логарифмической функции правдоподобия $l(\phi;\bar{X},\bar{U},D) = \ln L(\phi;\bar{X},\bar{U},D)$ по распределению $\mathbf{P}\{D \mid \bar{X},\bar{Z};\tilde{\phi}\}$ случайного вектора D для фиксированной выборки $(\bar{X},\ \bar{U})$ и некоторого заданного (начального) значения вектора параметров $\tilde{\phi}$. В соответствии с общим подходом [4, 11] искомая оценка вектора параметров ϕ максимизирует функцию $\Lambda(\phi,\tilde{\phi})$, которая в условиях рассматриваемой модели наблюдений допускает представление

$$\Lambda(\phi,\tilde{\phi}) = \mathbf{E}_{\tilde{\phi}}\{l(\phi;\bar{X},\bar{U},D) \mid \bar{X},\bar{U};\tilde{\phi}\} =$$
$$= \sum_{l\in S(L)} \ln \pi_l \tilde{\gamma}_{l,1} + \sum_{t=2}^{T} \sum_{k\in S(L)} \sum_{l\in S(L)} \tilde{\xi}_{kl,t} \ln p_{kl} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{l\in(L)} \tilde{\gamma}_{l,t} \ln p_X(x_t;u_t,\tilde{\theta}_l) \equiv$$
$$\equiv Q_1(\{\pi_l\}) + Q_2(\{p_{kl}\}) + Q_3(\{\theta_l\}), \quad (6)$$

где $\tilde{\gamma}_{l,t} = \mathbf{P}\{d_t = l \mid \bar{X},\bar{U};\tilde{\phi}\}$ – апостериорная вероятность класса состояния $l \in S(L)$ в момент $t\ (t = 1,\ldots,T)$ для выборки $(\bar{X},\bar{U})$ и фиксированного вектора параметров $\tilde{\phi}$; $\tilde{\xi}_{kl,t} = \mathbf{P}\{d_{t+1} = l \mid d_t = k;\bar{X},\bar{U};\tilde{\phi}\}$ – апостериорная вероятность перехода системы из состояния $k \in S(L)$ в состояние $l \in S(L)$ в момент времени $t\ (t = 1,\ldots,T-1)$ при тех же условиях.

В силу сложности задачи максимизации самой функции $\Lambda(\phi,\tilde{\phi})$ на практике применяется эквивалентные представления целевой функции, используемой на этапе максимизации *EM*-алгоритма, непосредственно зависящие от апостериорных вероятностей классов состояний $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}, \{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$. Максимизация преобразованной целевой функции приводит к получению представлений для ММП-оценок параметров смеси, зависящих от $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}, \{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$. В [11] данная проблема решена для смеси многомерных нормальных распределений с марковской моделью зависимости классов, определяемой условием *d*.2. Для рассматриваемого случая формулы для расчета $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}, \{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$ отличаются видом плотности распределений вектора наблюдений $p_X(x;u,\theta_l)$ и имеют вид

$$\tilde{\gamma}_{l,t} = \frac{\tilde{\alpha}_{l,t}\tilde{\beta}_{l,t}}{\sum_{k\in S(L)} \tilde{\alpha}_{k,t}\tilde{\beta}_{k,t}},\ \ l \in S(L),\ \ t = 1,...,T; \quad (7)$$

$$\tilde{\xi}_{kl,t} = \frac{\tilde{\alpha}_{k,t}\tilde{p}_{kl}\,p_X(x_{t+1};u_{t+1},\tilde{\theta}_l)\tilde{\beta}_{l,t+1}}{\sum_{r\in S(L)}\sum_{s\in S(L)} \tilde{\alpha}_{r,t}\tilde{p}_{rs}\,p_X(x_{t+1};u_{t+1},\tilde{\theta}_s)\tilde{\beta}_{s,t+1}},\ \ k,l \in S(L),\ \ t = 1,...,T-1, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\alpha}_{l,1} = \tilde{\pi}_l p_X(x_1; u_1, \tilde{\theta}_l),\ \tilde{\alpha}_{l,t} = \left(\sum_{k \in S(L)} \tilde{\alpha}_{k,t-1} \tilde{p}_{kl} \right) p_X(x_t; u_t, \tilde{\theta}_l),\ \ t = 2,...,T; \tag{9}$$

$$\tilde{\beta}_{l,T} \equiv 1,\ \tilde{\beta}_{l,t} = \sum_{k \in S(L)} \tilde{p}_{lk} p_X(x_{t+1}; u_{t+1}, \tilde{\theta}_k) \tilde{\beta}_{k,t+1},\ \ t = T-1, T-2, ..., 1. \tag{10}$$

Представления для оценок максимального правдоподобия параметров (вектора ϕ и его составляющих $\{\theta_l\}\ (l \in S(L)), \pi, P$) модели *MS-VARX*($p$) вида (3) получаются в соответствии с общим подходом [4, 11] путем максимизации функционала $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$ вида (6) по неизвестным параметрам с учетом формул (7)–(10) для апостериорных вероятностей $\{\tilde{\gamma}_{t,l}\}$, $\{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$. Полученные оценки описываются в следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Если модель MS-VARX* (1), (3) *удовлетворяет предположениям* M.1–M.4 *и d.*2, *известно L и наблюдаются* $\{x_t, z_t\}\ (t = 1, ..., T)$, *то получающиеся в результате максимизации функции* $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$ *вида* (6) *оценки параметров смеси распределений по выборке наблюдений* $(\overline{X}, \overline{U})$ *для фиксированного значения вектора* $\tilde{\phi}$ *допускают представления* $(k, l \in S(L))$:

$$\hat{\pi}_l = \tilde{\gamma}_{l,1},\ \hat{p}_{kl} = \sum_{t=2}^{T} \tilde{\xi}_{kl,t} \left(\sum_{t=2}^{T} \tilde{\gamma}_{k,t-1} \right)^{-1},\ \hat{\Pi}_l = \sum_{t=1}^{T} \tilde{\gamma}_{l,t} x_t u_t' \left(\sum_{t=1}^{T} \tilde{\gamma}_{l,t} u_t u_t' \right)^{-1}, \tag{11}$$

$$\hat{\Sigma}_l = \sum_{t=1}^{T} \tilde{\gamma}_{l,t} (x_t - \hat{\Pi}_l z_t)(x_t - \hat{\Pi}_l z_t)' \left(\sum_{t=1}^{T} \tilde{\gamma}_{l,t} \right)^{-1}, \tag{12}$$

где апостериорные вероятности $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}$, $\{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$ *вычисляются по формулам* (9), (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы используется традиционная схема [4, 11]. В силу независимости по искомым параметрам слагаемых Q_1, Q_2 и Q_3, образующих представление (6) для функции $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$, задачу максимизации этой функции можно разбить на три независимые задачи максимизации функций $Q_1(\{\pi_l\})$, $Q_2(\{p_{kl}\})$ и $Q_3(\{\theta_l\})$, непрерывных по соответствующим параметрам. Для максимизации функций $Q_1(\{\pi_l\})$, $Q_2(\{p_{kl}\})$ с ограничениями типа равенств используется метод множителей Лагранжа. Функция $Q_3(\{\theta_l\})$ представляется в виде

$$Q_3(\{\theta_l\}) = \sum_{l \in S(L)} \sum_{t=1}^{T} \tilde{\gamma}_{l,t} \left(-\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Sigma_l| - \frac{1}{2} (x_t - \Pi_l u_t)' \Sigma_l^{-1} (x_t - \Pi_l u_t) \right)$$

с последующей автономной оптимизацией по матрицам $\{\Pi_l\}$ и $\{\Sigma_l\}$. В процессе вычисления применяются известные свойства матричных производных [12]. Теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е 1. *С учетом известной блочной структуры матриц* $\Pi_l = (A_{l,1}, \ldots, A_{l,p}, B_l)\ (l \in S(L))$ *по оценкам* $\{\hat{\Pi}_l\}$ *однозначно восстанавливаются оценки матриц параметров* $\{\hat{A}_{l,1}, \ldots, \hat{A}_{l,p}, \hat{B}_l\}$.

Алгоритм *EM MS-VARX*. Для совместного оценивания параметров модели и классификации исходной выборки наблюдений, описываемой рассматриваемой моделью *MS-VARX,* предлагается итерационный *EM*-алгоритм (алгоритм *EM MS-VARX*) из семейства алгоритмов Баума – Уэлча [11].

Каждая итерация алгоритма включает два последовательно выполняемых этапа:

– *этап E (Expectation*), предполагающий оценивание апостериорных вероятностей и соответственно условного математического ожидания логарифмической функции правдоподобия при заданных начальных значениях параметров модели; знание апостериорных вероятностей позволяет оценить вектор $D = (d_t) \in S^T(L)$;

– *этап M (Maximization)*, на котором находятся оценки параметров смеси распределений вида (5) из условия максимума логарифмической функции правдоподобия (6) с учетом ранее полученных значений апостериорных вероятностей классов.

Алгоритм включает следующие этапы (верхний индекс k в скобках означает номер итерации).

Задание начальных значений параметров. Начальные значения вектора параметров смеси распределений $\phi^{(0)}$ определяются двумя способами: 1) выбором некоторого фиксированного значения, $\phi^{(0)} \equiv \tilde{\phi}$; 2) заданием начального вектора классификации $D^{(0)} = (d_t^{(0)})(t = 1,...,T)$ и последующего вычисления значения $\phi^{(0)} \equiv \tilde{\phi}$ по классифицированной выборке. Дополнительно указываются значения параметров, определяющие условия остановки алгоритма: показатель точности вычисления целевой функции ε $(0 < \varepsilon << 1)$ и максимальное количество итераций $\bar{k}$.

Итерация k (k = 1, 2, …).

Этап *E*. По формулам (7)–(10) вычисляются апостериорные вероятности $\{\tilde{\gamma}_{l,t}, \tilde{\xi}_{kl,t}\}$. При этом полагается $\tilde{\phi} \equiv \phi^{(k-1)}$. Для классификации выборки и оценивания вектора классификации $D^{(k)} = (d_t^{(k)}) \in S^T(L)$ $(t = 1,\ldots,T\}$ применяется решающее правило на основе максимума апостериорных вероятностей классов:

$$d_t^{(k)} = \arg\max_{l \in S(L)} \left\{\gamma_{l,t}^{(k)}\right\}, \quad t = 1,...,T. \tag{13}$$

Этап *M*. Вычисляются оценки параметров $\{\Pi_l^{(k)}, \Sigma_l^{(k)}\}$ $(l \in S(L))$, $\pi^{(k)}$, $P^{(k)}$ по формулам (11), (12) с использованием вероятностей $\gamma_{l,t}^{(k-1)}$ и $\xi_{ij,t}^{(k-1)}$, вычисленных на первом этапе.

Проверка условий остановки алгоритма. Используются два следующих условия:

1) достижение заданной точности оценивания параметров, характеризуемой двумя условиями [10] $l_X^{(k)} \geq l_X^{(k-1)}$ и $\left(l_X^{(k)} - l_X^{(2)}\right) < (1+\varepsilon)\left(l_X^{(k-1)} - l_X^{(2)}\right)$, где $l_X^{(k)} = \ln \mathbf{P}\{\bar{X}, \bar{U} \mid \phi^{(k)}\} = \ln\left(\sum_{l \in S(L)} \alpha_{l,T}^{(k)}\right)$ – значение логарифмической функции правдоподобия для вектора параметров $\phi^{(k)}$ по выборке наблюдений, вычисляемое с использованием формул (9);

2) достижение максимально допустимого числа итераций $k = \bar{k}$.

Если одно из условий выполняется, то полагается: $\hat{\phi} = \phi^{(k)}, \hat{D} = D^{(k)}$, $\hat{l}_X = l_X^{(k)}$, $\hat{\gamma}_{l,t} = \gamma_{l,t}^{(k)}$ $(l \in S(L),\ t = 1,\ldots,T)$, и работа алгоритма завершается, иначе алгоритм переходит к этапу E.

3. Дискриминантный анализ моделей *MS-VARX*

В [8] предложены подстановочные байесовские решающие правила поточечной и групповой классификации многомерных наблюдений, описываемых моделью *IS-VARX* с независимыми классами состояний. Для модели *MS-VARX* вида (1), (3) предлагается использовать модификацию решающего правила групповой классификации, учитывающую марковскую модель зависимости классов, определяемую условием *d*.2. В [13] подобная задача рассматривалась для случая, когда моделью наблюдений является параметрическое семейство распределений, имеющих плотность распределения вероятностей. Было предложено оптимальное в смысле минимума вероятности ошибки классификации решающее правило групповой классификации. Для решения задачи целочисленной оптимизации, возникающей при практической реализации данного решающего правила, использовался метод динамического программирования [14]. В рассматриваемом случае возможно непосредственное применение этого подхода, поскольку наблюдения, описываемые моделью *MS-VARX* вида (1), (3), допускают эквивалентное вероятностное описание с помощью смеси параметрических распределений вероятностей вида (4).

Решающее правило классификации выборки многомерных авторегрессионных наблюдений $(\bar{X}, \bar{U})$, описываемых моделью *MS-VARX*, допускает общее описание: $\hat{D} = (\hat{d}_t) = D(\bar{X}, \bar{U})$, $\hat{d}_t = \hat{d}_t(\bar{X}, \bar{U}) \in S(L)$, $t = 1,...,T$. Точность решающего правила $\hat{D} = (\hat{d}_t) = D(\bar{X}, \bar{U})$ в соответствии с общей методологией характеризуется *вероятностью ошибки классификации r* тестируемой выборки $(\bar{X}, \bar{U})$, определяемой как

$$r = r\left(D(\bar{X}, \bar{U})\right) = P\left\{\| \hat{D} - D^0 \| \neq 0\right\}, \ \| \hat{D} - D \| = \sum_{t=1}^{T} (1 - \delta_{\hat{d}_t, d_t^0}), \tag{14}$$

где $D^0 = (d_t^0)$, $\hat{D} = (\hat{d}_t\ )$ – соответственно истинный вектор состояний и его оценка.

Предположим вначале, что все параметры модели *MS-VARX* вида (1), (3), определяемые векторами, известны. Опишем оптимальное в смысле минимума функционала *r* решающее правило, называемое *байесовским* [4, 13]. Будем использовать далее логарифмическую функцию правдоподобия, которая для фиксированного вектора D согласно (5) имеет вид

$$l(\phi;\bar{X},\bar{U},D)=\ln(L(\phi;\bar{X},\bar{U},D))=\ln\pi_{d_1}+\sum_{t=2}^{T}\ln p_{d_{t-1},d_t}+\sum_{t=1}^{T}\ln p_X(x_t;u_t,\theta_{d_t}). \qquad (15)$$

Л е м м а 1. *Если модель* (1), (3) *удовлетворяет предположениям* М.1–М.4*, d.*2 *и значения параметров модели* $\phi\in\Re^q$ *известны, то решающее правило групповой классификации выборки* $(\bar{X},\bar{U})$

$$\hat{D}\equiv\hat{D}(\bar{X},\bar{U})=\arg\max_{D\in S^T(L)} l(\phi;\bar{X},\bar{U},D), \qquad (16)$$

основанное на максимизации логарифмической функции правдоподобия, минимизирует вероятность ошибки классификации r вида (14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях леммы вектор значений эндогенных переменных $x_t\in\Re^N$, соответствующий фиксированным значениям предопределенных переменных $u_t\in\Re^{Np+M}$ и состоянию $d_t=l\ (l\in S(L))$, является условно-гауссовским с плотностью распределения (4). Согласно следствию 2 теоремы 7.8 [13], для произвольного семейства параметрических распределений, имеющих плотность распределения, решающее правило вида (18) обладает минимальной вероятностью ошибки. Лемма 1 доказана.

Для решения задачи (16) целочисленной оптимизации по $D\in S^T(L)$, как и в алгоритмах семейства Баума – Уэлча, применяется метод динамического программирования [14]. Использование данного метода требует специальное представление целевой функции $l(\phi;\bar{X},\bar{U},D)$ через так называемые функции Беллмана.

Л е м м а 2. *В условиях леммы* 1 *байесовское решающее правило* (*БРП*) *классификации выборки наблюдений* $(\bar{X},\bar{U})$ *допускает представление:*

$$\hat{D}=\arg\max_{D\in S^T(L)}\sum_{t=1}^{T-1} f_t(d_t,d_{t+1}), \qquad (17)$$

$$f_t(k,l)=\delta_{t,1}\left(\ln\pi_k+\ln p_X(x_1;u_1,\theta_k)\right)+\ln p_{kl}+\ln p_X(x_{t+1};u_{t+1},\theta_l),\ k,l\in S(L), \qquad (18)$$

где δ_{t1} *– символ Кронекера,* $t=1,...,T-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы (17), (18) получаются в результате эквивалентного преобразования функции $l(\phi;\bar{X},\bar{U},D)$. Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а 2. *В условиях леммы* 1 *БРП групповой классификации временного ряда* $\bar{X}_1^T=(x_1',...,x_T')'\in\Re^{NT}$, *соответствующего временному ряду предопределенных переменных* $\bar{U}_1^T=(u_1',...,u_T')'\in\Re^{NpT}\times\mathfrak{Z}^T\subseteq\Re^{(Np+M)T}$, *реализуется с помощью процедуры динамического программирования в соответствии со следующими соотношениями*:

$$\hat{d}_T=\arg\max_{k\in S(L)}F_T(k),\ \hat{d}_t=\arg\max_{k\in S(L)}\left(f_t(k,\hat{d}_{t+1})+F_t(k)\right),\ t=T-1,T-2,...,1, \qquad (19)$$

$$F_1(l)\equiv 0,\ F_{t+1}(l)=\max_{k\in S(L)}\left(f_t(k,l)+F_t(k)\right),\ l\in S(L),\ t=1,...,T-1, \qquad (20)$$

где $\{F_t(k)\}$*– функции Беллмана, а функции* $\{f_t(k,l)\}$ *определяются формулами* (18).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с общей схемой, процедура динамического программирования включает два этапа. На первом этапе рекуррентным образом вычисляются функции Беллмана $\{F_t(l)\}$ $(l\in S(L),\ t=1,...,T-1)$: $F_{t+1}(l)=\max_{k\in S(L)}\left(f_t(k,l)+F_t(k)\right)$ в предположении $F_1(l)\equiv 0$. На втором – в обратном порядке по времени наблюдения находятся компоненты искомого вектора $\hat{D}$: $\hat{d}_t=\arg\max_{k\in S(L)}\left(f_t(k,\hat{d}_{t+1})+F_t(k)\right)$ $(t=T-1,T-2,...,1)$, $\hat{d}_T=\arg\max_{k\in S(L)}F_T(k)$. Теорема 2 доказана.

Если с помощью алгоритма *EM MS-VARX* по выборке $(\bar{X},\bar{U})$ вычислены оценки параметров модели $\{\hat{\theta}_l\}$ $(l \in S(L))$, $\hat{\pi}$, $\hat{P}$, то при использовании их в формулах (18) вместо неизвестных истинных значений параметров получается подстановочное БРП групповой классификации для рассматриваемой модели, которое может применяться для оценивания (прогнозирования) классов состояний сложной системы в будущие моменты времени для заданного горизонта прогнозирования $h \geq 1$ по новой реализации временных рядов $(\bar{X}_{T+1}^{T+h},\bar{U}_{T+1}^{T+h})$, где $\bar{X}_{T+1}^{T+h} = (x'_{T+1},...,x'_{T+h})' \in \Re^{Nh}$, $\bar{U}_{T+1}^{T+h} = (u'_{T+1},...,u'_{T+h})' \in \Re^{Nph} \times \mathfrak{Z}^h \subseteq \Re^{(Np+M)h}$. Таким образом, справедливо следующее следствие из теоремы 2.

С л е д с т в и е 2. *В условиях теоремы* 2 *подстановочное БРП групповой классификации многомерных наблюдений* (x_τ,u_τ) $(\tau = T+1,\dots,T+h)$, *описываемых моделью модели MS-VARX(p) вида* (1), (3) *определяется соотношениями:*

$$\hat{d}_{T+h} = \arg\max_{k\in S(L)} F_{T+h}(k), \quad \hat{d}_\tau = \arg\max_{k\in S(L)}\left(f_\tau(k,\hat{d}_{\tau+1}) + F_\tau(k)\right), \tau = T+h-1, T+h-2,...,T+1, \quad (21)$$

$$F_{T+1}(l) \equiv 0, F_{\tau+1}(l) = \max_{k\in S(L)}\left(f_\tau(k,l) + F_\tau(k)\right), \quad l \in S(L), \ \tau = T+1,...,T+h, \quad (22)$$

где $f_\tau(k,l) = \delta_{\tau,T+1}\left(\ln \hat{p}_{\hat{d}_T,k} + \ln p_X(x_\tau;u_\tau,\hat{\theta}_k)\right) + \ln \hat{p}_{kl} + \ln p_X(x_{\tau+1};u_{\tau+1},\hat{\theta}_l)$, $\hat{d}_T$ *– оценка состояния системы в момент времени T, полученная при классификации обучающей выборки* $(\bar{X}_1^T,\bar{U}_1^T)$ *с помощью алгоритма EM MS-VARX.*

Будем использовать следующие обозначения для предлагаемых алгоритмов: *BDA MS-VARX* – алгоритм, реализующий байесовское решающее правило групповой классификации (*Bayesian Discriminant Analysis decision rule*) (19), (20); *EDA MS-VARX* – алгоритм, реализующий подстановочное, т. е. оцененное по классифицированной выборке БРП (*Estimated Discriminant Analysis decision rule*) (21), (22).

4. Результаты компьютерного тестирования алгоритмов оценивания и классификации

Приведем результаты экспериментального тестирования точности предлагаемых алгоритмов классификации. Будем рассматривать важный для практики случай двух классов состояний $(L = 2)$ [15]. Предполагается, что для модели *MS-VARX* вида (1) выполняются условия M.1–M.4, а случайная последовательность номеров классов состояний $d_t \in S(L)$ $(t = 1,...,T)$ удовлетворяет предположению d.2, т. е. описывается ненаблюдаемой однородной цепью Маркова. Тестовые примеры различаются значениями параметров модели наблюдений и предназначены для исследования зависимости точности алгоритмов от различных типов параметров.

Описание тестовых экспериментов. Рассматриваются модели *VARX* с циклическими структурными изменениями в матрице регрессионных коэффициентов, обусловленными наличием двух чередующихся классов состояний сложной системы Ω_0, Ω_1. Решаются задачи классификации многомерных авторегрессионных наблюдений $\{x_t, z_t\}$ $(t = 1,\dots,T)$ и прогнозирования классов состояний для новых наблюдений $\{x_t, z_t\}$ $(t = T+1,\dots,T+h)$.

Тестовые примеры (ТП). Приведем общие характеристики тестовых моделей.

Размерность модели: $L = 2$, $N = 2$, $M = 3$; число оцениваемых параметров равно 29.

Длина временных рядов (объем выборки наблюдений) T варьируется от 100 до 2000 .

Экзогенные переменные. Вектор экзогенных переменных $z_t = (z_{tj}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \Re^M$ является случайным и имеет равномерное распределение в области $\mathfrak{Z} = a^M \in \Re^M$, $a = [1,\ 10]$, $\tilde{z} = \mathbf{E}\{z\} = (5{,}5;\ 5{,}5;\ 5{,}5)'$.

Ковариационная матрица ошибок и матрицы коэффициентов регрессии:

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_0 + H;$$

$$\text{B.1. } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ B.2. } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ B.3. } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристики точности классификации. Матрица $H = B_1 - B_0$ в случае $A_1 = A_0$, $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma$ определяет степень различия классов состояний, вызванных структурными изменениями в матрице коэффициентов регрессии. Количественной мерой различимости классов является межклассовое *расстояние Махаланобиса* $\Delta(\tilde{z})$, определяемое для среднего значения вектора экзогенных переменных $\tilde{z} \in \mathfrak{Z}$ $(\Delta(\tilde{z}) \neq 0)$, а также соответствующая вероятность ошибки БРП [8]:

$$r(\tilde{z}) = \pi_0 r_0(\tilde{z}) + \pi_1 r_1(\tilde{z}),\ r_l(\tilde{z}) = \Phi\left(-\frac{\Delta(\tilde{z})}{2} - (-1)^l \frac{h}{\Delta(\tilde{z})}\right),\ h = \ln\frac{\pi_0}{\pi_1}\ \ (l \in \{0,1\}),\ \Delta(\tilde{z}) = \sqrt{\tilde{z}' H' \Sigma^{-1} H \tilde{z}},$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Для оценивания точности классификации используются $K = 100$ независимых выборок наблюдений, по результатам анализа которых рассчитывается оценка вероятности ошибки классификации $\hat{r} = K^{-1}\sum_{i=1}^{K}\hat{r}_i, \hat{r}_i = 1 - T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\delta_{\hat{d}_t^i, d_t^0}$, где $D^0 = (d_t^0)$, $\hat{D}^i = (\hat{d}_t^i)$ – соответственно истинный вектор состояний и его оценка для i-й выборки.

Используются обозначения: $\hat{r}_{EM}, \hat{r}_{BDA}$ и $\hat{r}_{EDA}$ – оценки вероятностей ошибок классификации для алгоритмов *EM MS-VARX*, *BDA MS-VARX* и *EDA MS-VARX* соответственно; $\hat{r}_{EDA}^h$ – оценка вероятности ошибки классификации (точности прогнозирования класса состояния) для новых наблюдений $\{x_t\}, \{z_t\}$ $(t = T+1, \dots, T+h)$ с помощью алгоритма *EDA MS-MLR*.

Характеристики точности оценивания параметров модели *MS-VARX*: $\delta_\theta = \|\hat{\theta} - \theta\|$, $\delta_P = \|\hat{P} - P\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма матрицы или вектора.

Управляемые параметры алгоритма EM MS-VARX: начальный вектор состояний системы $\tilde{D} = (\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_T)'$ – начальное значение вектора состояний – реализация дискретного случайного вектора с равновероятным распределением на $S^T(L)$, одинаковое для всех тестовых примеров; параметр условия сходимости $\varepsilon = 0{,}0001$; максимальное число итераций $\bar{k} = 100$.

Результаты тестовых экспериментов. Приведем описание тестовых примеров и полученных результатов экспериментального исследования точности классификации и оценивания параметров для предлагаемых алгоритмов.

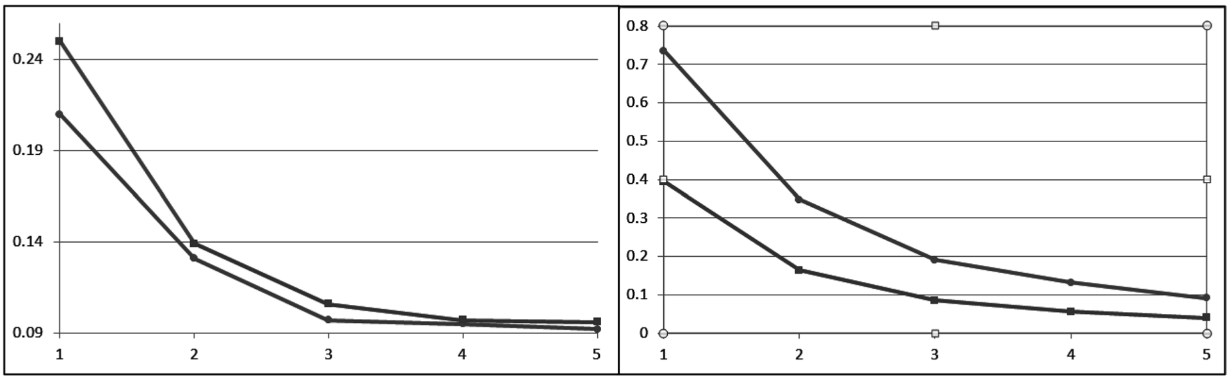
Тестовый пример 1 (ТП 1). Исследование влияния степени выраженности структурных изменений на точность алгоритмов. Рассматриваются варианты значений В.1–В.3 для матрицы коэффициентов регрессии, которые соответствуют различной степени выраженности структурных изменений в коэффициентах при экзогенных переменных, определяемой межклассовым расстоянием $\Delta(\tilde{z})$. Полагается: $A_1 = A_2 = \mathrm{O}_{N\times N}$, $\omega = 0{,}2$ (см. формулу (2)). Оценки показателей точности алгоритмов представлены в табл. 1.

Таблица 1. **Исследование влияния структурных изменений в коэффициентах регрессии**

Варианты экспериментов	Статистики					
	$\Delta(\tilde{z})$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{EDA}^h$	δ_θ	δ_P
В.1	1,23	0,198	0,294	0,34	0,265	0,28
В.2	2,46	0,097	0,1	0,109	0,191	0,073
В.3	4,919	0,017	0,02	0,018	0,166	0,059

Тестовый пример 2. Исследование влияния объема выборки на точность алгоритмов. В условиях ТП 1 (вариант В.2) исследуется зависимость точности алгоритмов от объема исходной выборки T. Для пяти вариантов значений $T \in \{100,\ 200,\ 500,\ 1000,\ 2000\}$ и $h = 100$ оценки вероятностей ошибок классификации и показатели точности оценивания параметров модели представлены на рис. 1.

Тестовый пример 3. Исследование влияния степени зависимости классов на точность алгоритма EM MS-VARX. В условиях тестового примера 2 исследуется точность классификации и оценивания параметров модели в условиях ослабевающей зависимости классов состояний, определяемой



а *б*

Рис. 1. Зависимость показателей точности алгоритмов от объема выборки *T*:
$a - \bullet - \hat{r}_{EM}$, $\blacksquare - \hat{r}^{h}_{EDA}$; $б - \bullet - \delta_\theta$, $\blacksquare - \delta_P$

параметром ω. Результаты для пяти вариантов $\omega \in \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5\}$ и $T = 100$ представлены на рис. 2.

Тестовый пример 4. Исследование влияния структурных изменений в матрицах коэффициентов авторегрессии. Полагается: $\omega = 0{,}2$, матрицы коэффициентов регрессии определяются вариантом B.3. Используются четыре варианта матриц коэффициентов авторегрессии:

$$\text{A.1. } A_1 = A_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix};\ \text{A.2. } A_0 = A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}6 \end{pmatrix};$$

$$\text{A.3. } A_0 = -A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}6 \end{pmatrix};\ \text{A.4. } A_0 = -A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Результаты экспериментов представлены в табл. 2.

Таблица 2. **Влияние структурных изменений в коэффициентах авторегрессии**

T	A.1		A.2		A.3		A.4	
	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$
100	0,0077	0,0787	0,0077	0,0588	0,0013	0,0015	0,0001	0,0049
200	0,0074	0,0128	0,0074	0,0082	0,0012	0,0013	0,0002	0,0002

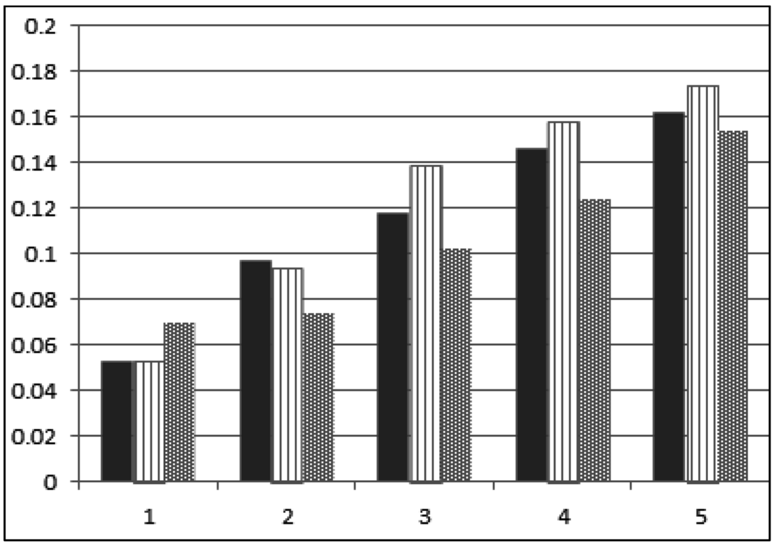


Рис. 2. Влияние степени зависимости классов на точность алгоритма *EM MS-VARX*:
■ – межклассовое расстояние $\Delta(\tilde{z})$; ▥ – оценка вероятности ошибки классификации $\hat{r}_{EM}$;
▩ – показатель точности оценивания параметров модели δ_θ

Выводы по результатам тестирования алгоритмов. На основе тестовых экспериментов можно сделать следующие выводы относительно точности предлагаемых алгоритмов классификации и оценивания параметров: 1) наблюдается ожидаемое повышение точности алгоритмов при увеличении межклассового расстояния и объема наблюдений (см. табл. 1 и рис. 1, 2); 2) при ослаблении зависимости классов наблюдений $(\omega \to 0{,}5)$ межклассовое расстояние уменьшается и точность классификации для алгоритма *EM MS-VARX* существенно падает (см. рис. 2), что говорит о целесообразности использования алгоритма *IS MS-VARX* [4] для независимых классов состояний; 3) точность классификации зависит от числа параметров, подверженных структурным изменениям и степени выраженности структурных изменений; наличие структурных изменений в матрицах коэффициентов авторегрессии способствует существенному повышению точности классификации (см. табл. 1, 2).

Заключение. В статье предлагаются алгоритмы статистического анализа многомерных моделей регрессионного и авторегрессионного типа с неоднородной параметрической структурой, обусловленной существованием различных циклически повторяющихся классов состояний. Предполагается, что смена классов состояний сопровождается скачкообразным изменением параметров модели и происходит под управлением ненаблюдаемой однородной цепи Маркова. Предлагается *EM*-алгоритм совместного оценивания неизвестных параметров модели и состояний системы по исходной выборке наблюдений, а также алгоритм дискриминантного анализа вновь поступающих наблюдений. На основе результатов экспериментального исследования можно сделать общий вывод о работоспособности и приемлемой точности предлагаемых алгоритмов анализа векторных авторегрессионных моделей с неоднородной структурой в рамках используемых модельных предположений. Предлагаемые алгоритмы могут применяться для анализа циклических изменений экономических систем [1, 15].

Литература

1. *Hamilton J. D.* // New Palgrave Dictionary of Economics. 2nd Edition. Basingstoke, 2008. P. 1755–1804.
2. *Sims C. A., Waggoner. D. F., Zha T.* // J. of Econometrics. 2008. Vol. 146 (2). P. 255–274.
3. *Perron P.* // Palgrave handbook of econometrics. Basingstoke, 2006. Vol. 1: Econometric Theory. P. 278–352.
4. *Малюгин В. И.* Методы анализа многомерных эконометрических моделей с неоднородной структурой. Минск, 2014.
5. *Hamilton J. D.* // Econometrica. 1989. Vol. 57 (2). P. 357–384.
6. *Малюгин В. И., Харин Ю. С.* // Автоматика и телемеханика. 1986. № 7. С. 61–69.
7. *Малюгин В. И.* // Информатика. 2008. № 3 (19). С. 17–28.
8. *Малюгин В. И.* // Информатика. 2008. № 4 (20). С. 79–88.
9. *Малюгин В. И.* // Изв. НАН Беларуси. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2013. № 3. С. 43–53.
10. *Droumaguet M.* Markov-Switching Vector Autoregressive Models: Monte Carlo Experiment, Impulse Response Analysis, and Granger-Causal Analysis : thesis of Doctor of Economics. Florence, 2012.
11. *Bilmes J. A.* A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models: Technical Report. Berkeley, 1998.
12. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ: пер. с англ. М., 1963.
13. *Харин Ю. С.* Робастность в статистическом распознавании образов. Минск, 1992.
14. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., 1960.
15. *Малюгин В. И.* // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы Междунар. конф.: в 3 т. Минск, 2014. Т. 1. С. 122–133.

V. I. MALUGIN, A. Yu. NOVOPOLTSEV

ANALYSIS OF MULTIVARIATE STATISTICAL MODELS WITH HETEROGENEOUS STRUCTURE IN THE CASE OF HIDDEN MARKOV DEPENDENCE OF THE STATES

Summary

For vector autoregressive model with heterogeneous endogenous-exogenous structure and Markov switching states we propose the EM-algorithm for mixture decomposition, as well as discriminant analysis algorithm for classification of new observations. Accuracy of the algorithms is examined by means of computer simulation experiments.