ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-71-75

Поступила в редакцию 19.01.2022
Received 19.01.2022

Ю. А. Курочкин

Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

КВАНТОВЫЙ РОТАТОР НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Аннотация. На основе ранее решенной классической задачи сформулирована квантово-механическая задача о движении двух материальных точек различных масс на трехмерной сфере с нефиксированным положением центра масс системы. Показано, что в установленное уравнение Шредингера входят две различные приведенные массы, зависящие от расстояния между точками. Для случая потенциала взаимодействия точек, который зависит только от расстояния между ними, данное уравнение допускает разделение переменных на радиальную, зависящую от относительного расстояния, и обоих приведенных масс, а также сферическую части. Уравнение для сферической части зависит только от одной из приведенных масс и позволяет сформулировать и решить задачу о жестком ротаторе. Найдены решение и спектр задачи о жестком ротаторе. Показано, что спектр системы имеет верхнюю границу, не зависящую от расстояния между точками в отличие от спектра в плоском пространстве.

Ключевые слова: центр масс, трехмерная сфера, уравнения Гамильтона – Якоби, Шредингера, приведенная масса, метрика, ротатор, спектр

Для цитирования. Курочкин, Ю. А. Квантовый ротатор на трехмерной сфере / Ю. А. Курочкин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 71–75. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-71-75

Yurii A. Kurochkin

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

A QUANTUM ROTATOR ON A THREE-DIMENSIONAL SPHERE

Abstract. In this work, the quantum-mechanical problem of the motion of two material points of different masses on a three-dimensional sphere with a non-fixed position of the center of mass of the system is formulated on the basis of the previously solved classical problem. It is shown that the established Schrödinger equation includes two different reduced masses, depending on the distance between the points. For the case of the interaction potential of points, depending only on the distance between them, this equation allows the separation of variables into a radial, depending on the relative distance and both the reduced masses and the spherical part. The equation for the spherical part depends only on one of the above reduced mass and allows one to formulate and solve the problem of a rigid rotator - the distance between the points is fixed. The solution and spectrum of the problem of a rigid rotator are found. It is shown that the spectrum of the system has an upper limit that does not depend on the distance between points, in contrast to the spectrum in a flat space.

Keywords: center mass, three dimension sphere, Hamilton – Jacoby equation, Schrödinger equation, reduce mass, metrics, rotator, spectrum

For citation. Kurochkin Yu. A. A quantum rotator on a three-dimensional sphere. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no 1, pp. 71–75 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-71-75

Введение. Существует проблема определения центра масс системы материальных точек в пространствах постоянной кривизны для классических и квантово-механических задач [1–4] и проблема разделения переменных центра масс и относительного движения. В частности, исследование движения в классических задачах, учитывающее особенность определения центра масс, помогут лучше понять законы движения в гравитационных полях. В работе [5] решена классическая задача о движении двух частиц на трехмерной сфере в предположении сохранения положения их центра масс. При этом положение центра не фиксировалось. В результате сформулировано в относительных переменных уравнение Гамильтона – Якоби. При этом возникают обобщения приведенной массы системы в виде двух приведенных масс, зависящих от относительного расстояния между частицами, вместо одной. Полученный в работе [5] гамильтониан задачи обеспечивает переход к квантовой задаче, что осуществляется заменами импульсов на соответствующие операторы в сферических координатах в рамках стандартных процедур, учитывающих римановость и однородность пространства. Полное уравнение Шредингера оказывается сложным для решения, однако в результате разделения переменных решается сферическая часть уравнения и возникает возможность сформулировать и решить задачу об обобщенном ротаторе на трехмерной сфере.

Уравнение Шредингера для двух материальных точек на трехмерной сфере с нефиксированным центром масс системы. В классическом варианте задачи о центре масс системы двух материальных точек разных масс m_1, m_2 с нефиксированным центром масс на трехмерной сфере [5] получен следующий гамильтониан:

$$H=\frac{p_r^2}{2\mu_{\parallel}(r)}+\frac{1}{2\mu_{\perp}(r)\sin^2 r}\left(p_\vartheta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right)+U(r), \tag{1}$$

где r, ϑ, φ – относительные переменные: $0\le r\le\pi,\ -\pi/2\le\vartheta\le\pi/2,\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

В выражении (1)

$$\mu_{\parallel}(r)=m_1\left(\frac{m_2{}^2+m_1m_2\cos r}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2}\right)^2+m_2\left(\frac{m_1{}^2+m_1m_2\cos r}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2}\right)^2, \tag{2}$$

$$\mu_{\perp}(r)=\frac{m_1m_2(m_2+m_1)}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2} \tag{3}$$

– обобщения приведенной массы.

Оператор уравнения Лапласа – Бельтрами для выведенной в [5] эффективной метрики

$$ds^2=c^2dt^2-\frac{\mu_{\parallel}}{\mu}dr^2-\frac{\mu_{\perp}}{\mu}\sin^2 r(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2) \tag{4}$$

с метрическим тензором

$$g_{st}=\mathrm{diag}\left\{1,\mu_{\parallel}/\mu,\mu_{\perp}/\mu\sin^2 r,\mu_{\perp}/\mu\sin^2 r\sin^2\vartheta\right\}, \tag{5}$$

где

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},$$

может быть получен, исходя из общего выражения

$$\Delta_{LB}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \tag{6}$$

для такого оператора, где g – детерминант матрицы пространственной части метрического тензора (5).

Пространственная часть метрического тензора необходима для дальнейшей формулировки нерелятивистской квантово-механической задачи.

Учитывая, что

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\frac{\mu_{\|}}{\mu}\frac{\mu_{\perp}}{\mu}}\sin^2 r \sin\vartheta,$$

а матрица пространственной части (5)

$$g^{ik} = \operatorname{diag}\left\{\frac{\mu}{\mu_{\|}}, \frac{\mu}{\mu_{\perp}\sin^2 r}, \frac{\mu}{\mu_{\perp}\sin^2 r \sin^2\vartheta}\right\},$$

выражение (6) принимает вид

$$\Delta_{LB} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu_{\|}}\mu_{\perp}\sin^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_{\perp}}{\sqrt{\mu_{\|}}}\sin^2 r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{\mu_{\perp}\sin^2 r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{7}$$

Тогда квантово-механический гамильтониан, соответствующий классическому гамильтониану (1), запишется, с учетом того, что квадрат радиальной части оператора импульса равен

$$p_r^2 = \frac{\mu}{2\mu_{\|}\sqrt{\mu_{\|}}\mu_{\perp}\sin^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_{\perp}}{\sqrt{\mu_{\|}}}\sin^2 r\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{8}$$

а квадрат оператора сферической части имеет стандартную форму

$$p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{9}$$

Соответственно уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{10}$$

определится гамильтонианом

$$H = \frac{\mu}{2\mu_{\|}\sqrt{\mu_{\|}}\mu_{\perp}\sin^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_{\perp}}{\sqrt{\mu_{\|}}}\sin^2 r\frac{\partial}{\partial r}\right) +$$
$$+\frac{\mu}{2\mu_{\perp}^2\sin^2 r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] + U(r). \tag{11}$$

В выражениях (10) и (11) принято, что постоянная Планка $\hbar = 1$, как и радиус трехмерной сферы $R = 1$. При необходимости для учета этих констант в выражении (11) следует его правую часть, кроме $U(r)$, умножить на $-\hbar^2/R^2$ и произвести замену $r \to r/R$.

Очевидно, уравнение (10) с гамильтонианом (11) допускает разделение переменных. Угловая часть оператора (11) совпадает с оператором квадрата углового момента системы. То есть

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0. \tag{12}$$

Здесь $Y_{lm} = Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ – сферические гармоники. Нормированные гармоники имеют вид

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \tag{13}$$

где $P_l^{|m|}(\cos\vartheta)$ – функции Лежандра; l, m – квантовые числа углового момента и его проекции на выделенное направление соответственно.

Уравнение, описывающее жесткий ротатор на трехмерной сфере с постоянным расстоянием r_0 между материальными точками m_1, m_2, тогда запишется как

$$\frac{\mu}{2\mu_\perp^2\sin^2 r_0}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\partial Y_{lm}}{\partial\varphi^2}\right]=E_l Y_{lm}. \tag{14}$$

При этом следует помнить, что $\mu_\perp$ также фиксируется r_0.

Спектр энергий E_l жесткого ротатора на 3-сфере следует из уравнения и определяется формулой

$$E_l=\frac{\mu l(l+1)}{2\mu_\perp^2\sin^2 r_0}. \tag{15}$$

При учете отличного от единицы радиуса 3-сферы R в формуле (15) следует осуществить замены $r_0\to {}^{r_0}\!/_{R}$ и умножить правую часть формулы на ${}^{\hbar^2}\!/_{R^2}$. Тогда формула (15) приобретает вид

$$E_l=\frac{\hbar^2\mu l(l+1)}{R^2 2\mu_\perp^2\sin^2 {}^{r_0}\!/_{R}}. \tag{16}$$

При предельном переходе к трехмерному плоскому пространству (в плоском пределе), когда $r_0 \ll R$, выражение (16) переходит в известное выражение для спектра энергий жесткого ротатора

$$E_l=\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r_0^2}. \tag{17}$$

Из выражения (30в) работы [1] при $U(r)=0$ следует ограничение на допустимую область изменения l. Действительно, поскольку в этом случае при фиксированном значении полной энергии E системы должно выполняться условие

$$E\succ\frac{\hbar^2\mu l(l+1)}{R^2 2\mu_\perp^2\sin^2 {}^{r_0}\!/_{R}},$$

справедливое в квантовом случае, то

$$2\mu R^2 E\succ\hbar^2 l(l+1). \tag{18}$$

То есть полный угловой момент системы для двух частиц на трехмерной сфере ограничен сверху, в то время как в случае плоского пространства

$$2\mu E r_0^2\succ\hbar^2 l(l+1) \tag{19}$$

с ростом r_0 допускается неограниченный рост l.

В заключение отметим, что соответствующее радиальное уравнение для стационарной задачи уравнения (10) с гамильтонианом (11)

$$\frac{\hbar^2}{R^2}\left[\frac{\mu}{2\mu_{\|}\sqrt{\mu_{\|}}\mu_\perp\sin^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_\perp}{\sqrt{\mu_{\|}}}\sin^2 r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\mu l(l+1)}{2\mu_\perp^2\sin^2 r}+U(r)\right]\psi=E\psi \tag{20}$$

гораздо сложнее выражения в аналогичной квантово-механической задаче для точки с массой, не зависящей от координат, и требует дополнительного исследования.

Следует заметить, что свободные параметры m_1, m_2, R и r_0 входят в формулу (16) отличным от формулы (17) способом, что открывает новые возможности для моделирования спектров физических систем на основе данной формулы.

Заключение. Таким образом, в данной работе на основе ранее решенной классической задачи сформулирована квантово-механическая задача о движении двух материальных точек различных масс на трехмерной сфере с нефиксированным положением центра масс системы. Показано, что установленное уравнение Шредингера для случая потенциала взаимодействия точек, зависящего только от расстояния между ними, допускает разделение переменных на радиальную, зависящую от относительного расстояния, и сферическую части. Уравнение для сферической части позволяет сформулировать и решить задачу о жестком ротаторе (расстояние между точками зафиксировано). Найдены решение и спектр задачи о жестком ротаторе. Показано, что в формулу для спектра ротатора входит только одна из приведенных масс, зависящая от расстояния, и спектр имеет верхнюю границу, не зависящую от расстояния между точками в отличие от спектра в плоском пространстве.

Благодарности. Автор благодарит В. М. Редькова и участников семинара центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» за интересную дискуссию, Н. Д. Шайковскую за полезные замечания.

Acknowledgments. The author is thankful to V. M. Redkov and participants of the seminar of the Center "Fundamental Interactions and Astrophysics" for an interesting discussion, N. D. Shaikovskaya for useful comments.

Список использованных источников

1. Kurochkin, Yu. On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-body system in three-dimensional spaces of constant curvature / Yu. Kurochkin, Dz. Shoukavy, I. Boyarina // Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2016. – Vol. 19, № 4. – P. 378–386.

2. Гальперин, Г. А. О понятии центра масс системы материальных точек в пространствах постоянной кривизны / Г. А. Гальперин // Докл. Акад. наук СССР. – 1988. – Т. 302, № 5. – С. 1039–1044.

3. Щепетилов, А. В. Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах / А. В. Щепетилов. – Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютер. исслед., 2008. – 360 с.

4. Курочкин, Ю. А. Теорема о центре масс в трехмерных пространствах постоянной кривизны / Ю. А. Курочкин, Д. В. Шелковый, И. П. Боярина // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 328–334. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-328-334

References

1. Kurochkin Yu., Shoukavy Dz., Boyarina I. On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-body system in three-dimensional spaces of constant curvature. *Nonlinear Phenomena in the Complex Systems*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 378–386.

2. Gal'perin G. A. On the concept of the center of mass of a system of material points in spaces of constant curvature. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, 1988, vol. 302, no. 5, pp. 1039–1044 (in Russian).

3. Shchepetilov A. V. *Calculus and Mechanics on Two-Point Homogenous Riemannian Spaces*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. 242 p. https://doi.org/10.1007/b11771456

4. Kurochkin Yu. A., Shoukavy Dz. V., Boyurina I. P. Center mass theorem in three dimensional spaces with constant curvature. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 328–334 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-328-334

Информация об авторе

Курочкин Юрий Андреевич – доктор физико-математических наук, заведующий центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Information about the author

Yurii A. Kurochkin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Center "Fundamental Interactions and Astrophysics", B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by