ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.925.42
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-135-143

Поступила в редакцию 17.11.2021
Received 17.11.2021

А. А. Гринь, Э. В. Мусафиров, А. Ф. Проневич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

ВЕЩЕСТВЕННАЯ АВТОНОМНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ СИСТЕМА ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Аннотация. Рассматривается задача построения вещественных автономных квадратичных систем трех дифференциальных уравнений с нелокальным существованием бесконечного числа предельных циклов. Имеется в виду, что бесконечное число предельных циклов, появившись из фокуса за счет бифуркации Андронова – Хопфа, может существовать в фазовом пространстве не только в окрестности фокуса и не только для значений параметра, близких к бифуркационному значению. Для решения поставленной задачи применяется способ нахождения предельных циклов как линий пересечения инвариантной плоскости с семейством инвариантных эллиптических параболоидов. Затем исследование предельных циклов построенной системы третьего порядка сводится к исследованию соответствующей системы второго порядка на каждом из инвариантных эллиптических параболоидов. Доказательство нелокального существования предельного цикла и установление характера его устойчивости для такой системы второго порядка проводится с помощью построения топографической системы Пуанкаре или перехода к полярным координатам.

Ключевые слова: автономная квадратичная система третьего порядка, предельный цикл, инвариантная поверхность, точка покоя, бифуркация Андронова – Хопфа

Для цитирования. Гринь, А. А. Вещественная автономная квадратичная система трех дифференциальных уравнений с бесконечным числом предельных циклов / А. А. Гринь, Э. В. Мусафиров, А. Ф. Проневич // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 135–143. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-135-143

Aliaksandr A. Hryn, Eduard V. Musafirov, Andrei F. Pranevich

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

A REAL AUTONOMOUS QUADRATIC SYSTEM OF THREE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AN INFINITE NUMBER OF LIMIT CYCLES

Abstract. In this paper, we consider the problem of construction of real autonomous quadratic systems of three differential equations with the nonlocal existence of an infinite number of limit cycles. This means that an infinite number of limit cycles, emerging from the focus due to the Andronov – Hopf bifurcation, can exist in the phase space not only in the vicinity of the focus and not only for parameter values close to the bifurcation value. To solve this problem we use the method of determination of limit cycles as the curves of intersection of an invariant plane with a family of invariant elliptic paraboloids. Then the study of the limit cycles of the constructed system of the third order is reduced to the study of the corresponding system of the second order on each of the invariant elliptic paraboloids. The proof of the nonlocal existence of the limit cycle and the investigation of its stability for such a second-order system is carried out by constructing a topographic system of Poincaré functions or by transforming to polar coordinates.

Keywords: autonomous quadratic system of the third order, limit cycle, invariant surface, stationary point, Andronov – Hopf bifurcation

For citation. Hryn A. A., Musafirov E. V., Pranevich A. F. A real autonomous quadratic system of three differential equations with an infinite number of limit cycles. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 135–143 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-135-143

Введение. Рассмотрим дифференциальные автономные системы третьего порядка

$$\dot{x} = P_1(x,y,z), \quad \dot{y} = P_2(x,y,z), \quad \dot{z} = P_3(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где функции $P_i(x,y,z)$ представляют собой вещественные полиномы не выше второй степени относительно переменных x, y, z. Как известно [1–6], в отличие от дифференциальных вещественных автономных систем второго порядка для качественного исследования систем (1) нужно изучить не только точки покоя, сепаратрисы и предельные циклы, но и другие виды аттракторов, включая странные и хаотические. Системы (1) представляют собой простейший класс дифференциальных вещественных автономных полиномиальных систем третьего порядка, представители которого в качестве притягивающих множеств могут иметь не только точки покоя и предельные циклы, но также странные или хаотические аттракторы. Так, известный аттрактор Лоренца описывается квадратичной системой (1), в которой только два нелинейных члена, а аттракторРесслера наблюдается в системе (1), содержащей единственный нелинейный член. То есть системы (1) с самыми простыми правыми частями могут определять очень сложную динамику поведения траекторий. Странные или хаотические аттракторы не являются предметом рассмотрения настоящей работы, здесь мы сконцентрируемся на предельных циклах систем (1).

Как известно [7, с. 174], для квадратичных автономных систем второго порядка проблема Гильберта о максимальном числе предельных циклов еще не решена, но хорошо изучены их возможные бифуркации за исключением бифуркаций предельных циклов четных кратностей. В частности, доказано, что цикличность фокуса или центра планарных квадратичных систем не выше трех [7, с. 176]. А для систем (1) в работе [8] показано, что система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz, \\ \dot{y} &= ay + bx - a_2x^2 - a_3xy + a_4yz - a_5xz, \\ \dot{z} &= 2\left(a + a_4z\right)z, \end{aligned} \tag{2}$$

при $b \neq 0$ имеет в ее фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ бесконечно много (континуум) предельных циклов, рождающихся из сложного фокуса в начале координат $O(0,0,0)$ за счет бифуркации Андронова – Хопфа, которая происходит при прохождении параметром a нулевого значения. Предельные циклы системы (2) являются линиями пересечения инвариантной плоскости с семейством инвариантных эллиптических параболоидов. Каждый из этих параболоидов является центральным многообразием системы (2) [9]. Необходимо отметить, что в отличие от планарных систем, где под предельным циклом понимается изолированная замкнутая траектория, к которой стремятся все соседние траектории при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, поведение траекторий в окрестности предельного цикла системы (1) может быть более сложным [10, с. 467]. В частности, предельные циклы системы (2) не являются изолированными в ее фазовом пространстве. Именно появлению периодических решений за счет бифуркации Андронова – Хопфа посвящено много результатов по предельным циклам систем (1).

По сравнению с планарными системами изучение бифуркации Андронова – Хопфа для систем (1) усложняется наличием третьего характеристического корня, особенно если он нулевой, в этом случае применяют метод усреднения [11]. Начиная с открытия аттрактора Лоренца в 1960-х гг. теория бифуркаций автономных систем третьего и выше порядков бурно развивалась и дополнилась новыми фундаментальными результатами [1–6], включая как изложение особенностей в изучении бифуркаций предельных циклов, ранее известных для планарных систем, так и открытие новых типов бифуркаций (катастрофа голубого неба и т. п.), невозможных для систем второго порядка. Однако вопросы о максимальном числе всех возможных предельных циклов, об их взаимном расположении, а также о расположении относительно точек покоя и сосуществовании с различными аттракторами, остаются открытыми даже для квадратичных систем (1). И пока не ясны методы, с помощью которых можно ответить на указанные вопросы и провести качественное исследование в целом произвольной системы (1). Не выяснены даже принципиальные отличия в условиях существования предельных циклов систем второго и третьего порядков.

Так, известно [12, с. 62], что для существования предельного цикла у автономной планарной системы необходимо наличие хотя бы одной точки покоя с индексом Пуанкаре, равным единице. Для автономных же систем третьего порядка такое условие не является обязательным, поскольку в [13] приведен пример квадратичной системы (1) без точек покоя, имеющей предельный цикл.

Целью настоящей статьи является развитие результатов работы [8], а именно доказательство нелокального характера существования предельных циклов, имея в виду, что бесконечное число предельных циклов системы (2) может существовать в фазовом пространстве не только в окрестности фокуса $O(0,0,0)$ и не только для значений параметра a, близких к бифуркационному значению.

Предварительные результаты. Пусть для системы (1) точка $O(0,0,0)$ является положением равновесия со следующими корнями характеристического уравнения: $\lambda_1 = c$, $\lambda_{2,3} = a \pm bi$, где $b \neq 0$, $c \neq 0$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Тогда, не нарушая общности, система (1) имеет вид [14]

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= ax - by + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2,\\
\dot{y} &= ay + bx + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4xz + b_5yz + b_6z^2,\\
\dot{z} &= cz + c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4xz + c_5yz + c_6z^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Будем менять в системе (3) параметр a, считая остальные параметры постоянными. Как известно [15], предельные циклы системы (3) в окрестности точки покоя $O(0,0,0)$ принадлежат аналитическому многообразию

$$\begin{aligned}
&a = \varphi(x,y),\\
&z = f(x,y),\\
&a \in R, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,
\end{aligned} \tag{4}$$

где функции $\varphi(x,y)$ и $f(x,y)$ голоморфны в точке $O(0,0)$ и их разложение по степеням x, y начинается с членов не ниже второй степени. В работе [14] указан способ нахождения разложений функций $\varphi(x,y)$ и $f(x,y)$ в ряд

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= n_{20}x^2 + n_{11}xy + n_{02}y^2 + \ldots,\\
\varphi(x,y) &= g(x^2+y^2) + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3
\end{aligned}$$

и найдено несколько первых членов разложения, достаточных для определения первой фокусной величины Ляпунова L_1 точки покоя $O(0,0,0)$ с одним действительным и двумя чисто мнимыми характеристическими корнями. В частности, найден коэффициент g, который с точностью до постоянного отрицательного множителя совпадает с первой фокусной величиной Ляпунова L_1. Согласно работе [15], рождение предельного цикла системы (3) из негрубого фокуса $O(0,0,0)$ при изменении параметра a происходит в соответствии со следующим результатом.

Т е о р е м а 1. *Для любого достаточно малого* $\delta > 0$ *найдется такое* a*, что при выполнении условия* $aL_1 < 0$ *система* (3) *в* δ*-окрестности начала координат имеет предельный цикл, принадлежащий многообразию* (4). *Причем предельный цикл будет устойчивым (неустойчивым), если* $a > 0$, $L_1 < 0$ *(*$a < 0$, $L_1 > 0$*).*

С помощью теоремы 1 в работе [8] доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *У системы* (2) *из точки покоя* $O(0,0,0)$ *с характеристическими корнями* $\lambda_1 = c$, $\lambda_{2,3} = \pm bi$*, где* $b, c \in \mathbb{R}$*, может рождаться бесконечно много (континуум) предельных циклов.*

Для системы (2) многообразие (4) принимает вид

$$\begin{aligned}
&a = -a_4 z,\\
&z = (x^2+y^2)/k, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

При этом соотношение

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - kz = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

задает бесконечное семейство инвариантных поверхностей системы (2) в виде эллиптических параболоидов. Действительно, полная производная от функции (5) в силу системы (2) будет

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} = (x^2 + y^2 - kz)(2a + 2a_4 z) \equiv 0,$$

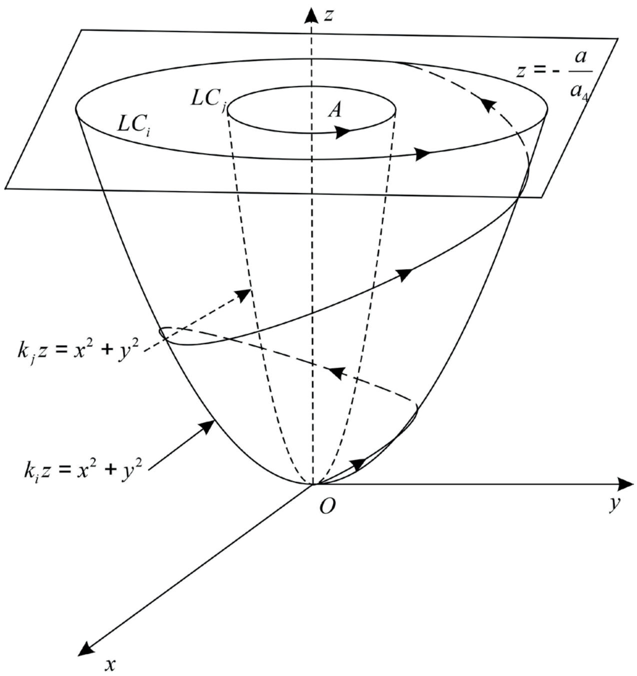
так как, согласно соотношению (5), первый сомножитель равен нулю.

Геометрически это означает, что все траектории системы (2) лежат на поверхностях семейства (5). Аналогичным образом легко проверить, что плоскость $a = -a_4 z$ тоже является инвариантной поверхностью системы (2). Наличие интегральной или инвариантной поверхности у системы третьего порядка позволяет свести ее исследование к соответствующей системе второго порядка.

Для доказательства существования предельного цикла на произвольной поверхности семейства (5) используется следующая система второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x(x^2 + y^2)/k + a_5 y(x^2 + y^2)/k, \\ \dot{y} &= ay + bx - a_2 x^2 - a_3 xy + a_4 y(x^2 + y^2)/k - a_5 x(x^2 + y^2)/k, \end{aligned} \tag{6}$$

где точка покоя $O(0,0)$ является фокусом с характеристическими корнями $\gamma_{2,3} = a \pm bi$, в котором первая фокусная величина [10, с. 198] $L_1 = \frac{2\pi a_4}{bk}$. При достаточно малом изменении параметра a и выполнении условия $aL_1 < 0$ в окрестности фокуса $O(0,0)$ системы (6) рождается устойчивый (неустойчивый) предельный цикл, если $a > 0,\ L_1 < 0$ ($a < 0,\ L_1 > 0$). Следовательно, и система (2) в окрестности фокуса $O(0,0,0)$ на каждой поверхности $x^2 + y^2 - kz = 0$ имеет по одному такому предельному циклу LC. Отсюда вытекает, что при $\frac{2\pi a_4 a}{bk} < 0$ система (2) имеет бесконечно много (континуум) предельных циклов, родившихся из фокуса O (0,0,0) за счет бифуркации Андронова – Хопфа. Поскольку плоскость $a = -a_4 z$ тоже является инвариантной поверхностью системы (2), то каждый предельный цикл является окружностью пересечения этой плоскости с одним из параболоидов (5). Геометрически это означает, что все циклы системы (2) образуют семейство концентрических окружностей и целиком заполняют собой плоскость $a = -a_4 z$ (см. рисунок). Таким



Расположение предельных циклов LC_i и LC_j как линий пересечения инвариантной плоскости с семейством инвариантных параболоидов в фазовом пространстве системы (2)

Localization of the limit cycles LC_i and LC_j as curves of intersection of the invariant plane with the family of invariant paraboloids in the phase space of system (2) образом, каждый из рассмотренных предельных циклов представляет изолированную окружность в фазовом пространстве системы (6), но в фазовом пространстве системы (2) эта окружность не является изолированной.

Основные результаты. Приведенные выше результаты имеют локальный характер, поскольку использованные при доказательстве факты о появлении предельных циклов за счет бифуркации Андронова – Хопфа справедливы лишь в достаточно малой окрестности фокуса $O(0,0,0)$ и при достаточно малом изменении параметра a. Покажем теперь нелокальный характер существования появившихся предельных циклов системы (2). С этой целью сначала найдем все точки покоя и их характеристические числа. Для нахождения состояний равновесия системы (2) решим алгебраическую систему

$$\begin{aligned} &ax - by + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz = 0,\\ &ay + bx - a_2x^2 - a_3xy + a_4yz - a_5xz = 0,\\ &2\left(a + a_4z\right)z = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

и введем обозначения точек $P_1(0,0,0)$, $P_2\left(0,0,-\dfrac{a}{a_4}\right)$ и прямых $P_3\left(x,\dfrac{ba_4+aa_5}{a_3a_4}-\dfrac{a_2}{a_3}x,-\dfrac{a}{a_4}\right)$, где $x\in\mathbb{R}$, $P_4\left(\dfrac{ba_4+aa_5}{a_2a_4}-\dfrac{a_3}{a_2}y,y,-\dfrac{a}{a_4}\right)$, где $y\in\mathbb{R}$, $P_5\left(x,y,-\dfrac{a}{a_4}\right)$, где $x,y\in\mathbb{R}$. Заметим, что при $a = 0$ точка P_2 сливается с P_1. Получаем следующие случаи.

1) Если $a_4 \ne 0$, $a_2 \ne 0$, $a_3 \ne 0$, то состояниями равновесия системы (2) являются две точки P_1, P_2 и прямая P_3 (или P_4). Заметим, что при $b=-\dfrac{aa_5}{a_4}$ точка $P_2\in P_3$ (или P_4).

2) Если $a_4 \ne 0$, $a_2 \ne 0$, $a_3 = 0$, $b\ne-\dfrac{aa_5}{a_4}$, то состояниями равновесия системы (2) являются две точки P_1, P_2 и прямая P_4.

3) Если $a_4 \ne 0$, $a_2 \ne 0$, $a_3 = 0$, $b=-\dfrac{aa_5}{a_4}$, то состояниями равновесия системы (2) являются точка P_1 и прямая P_4. Заметим, что при $a = 0$ точка $P_1\in P_4$.

4) Если $a_4 \ne 0$, $a_3 \ne 0$, $a_2 = 0$, $b\ne-\dfrac{aa_5}{a_4}$, то состояниями равновесия системы (2) являются две точки P_1, P_2 и прямая P_3.

5) Если $a_4 \ne 0$, $a_3 \ne 0$, $a_2 = 0$, $b=-\dfrac{aa_5}{a_4}$, то состояниями равновесия системы (2) являются точка P_1 и прямая P_3. Заметим, что при $a = 0$ точка $P_1\in P_3$.

6) Если $a_4 \ne 0$, $a_2 = a_3 = 0$, $b\ne-\dfrac{aa_5}{a_4}$, то состояниями равновесия системы (2) являются две точки P_1, P_2.

7) Если $a_4 \ne 0$, $a_2 = a_3 = 0$, $b=-\dfrac{aa_5}{a_4}$, то состояниями равновесия системы (2) являются точка P_1 и плоскость P_5. Заметим, что при $a = 0$ точка $P_1\in P_5$.

8) Если $a_4 = 0$, то состоянием равновесия системы (2) является точка P_1.

Случаи, где $a_4 = 0$ или $b=-\dfrac{aa_5}{a_4}$, исключим из дальнейшего рассмотрения, поскольку при них не происходит бифуркация предельных циклов из фокуса P_1. В оставшихся случаях 1), 2), 4), 6) изучим влияние точек покоя P_1, P_2 и точек покоя P_3 (или P_4), составляющих прямую $P: a_2x + a_3y - \dfrac{ba_4+aa_5}{a_4} = 0$ в плоскости $a = -a_4z$, на существование или исчезновение предельных циклов при возрастании $|a|$.

Для системы (2) матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} a+a_2y+a_4z & -b+a_2x+2a_3y+a_5z & a_4x+a_5y \\ b-2a_2x-a_3y-a_5z & a-a_3x+a_4z & a_4y-a_5x \\ 0 & 0 & 2\left(a+2a_4z\right) \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа для состояний равновесия системы (2).

* Для P_1: $\lambda_1 = 2a$, $\lambda_{2,3} = a \pm bi$. Если $a < 0$, то P_1 – устойчивый фокус, если $a > 0$, то P_1 – неустойчивый фокус.

* Для P_2: $\lambda_1 = -2a,\ \lambda_{2,3} = \pm\left(b + \dfrac{aa_5}{a_4}\right)i.$

* Для P_3: $\lambda_1 = -2a$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \dfrac{ba_4 + aa_5}{a_3a_4}a_2 - \dfrac{a_2^2 + a_3^2}{a_3}x.$ Если $x = \dfrac{a_2(ba_4 + aa_5)}{a_4\left(a_2^2 + a_3^2\right)}$, то $\lambda_3 = 0$. Если $x < \dfrac{a_2(ba_4 + aa_5)}{a_4\left(a_2^2 + a_3^2\right)}$, то $\begin{cases} \lambda_3 > 0, & \text{если } a_3 > 0, \\ \lambda_3 < 0, & \text{если } a_3 < 0. \end{cases}$ Если $x > \dfrac{a_2(ba_4 + aa_5)}{a_4\left(a_2^2 + a_3^2\right)}$, то $\begin{cases} \lambda_3 > 0, & \text{если } a_3 < 0, \\ \lambda_3 < 0, & \text{если } a_3 > 0. \end{cases}$

* Для P_4: $\lambda_1 = -2a$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \dfrac{a_2^2 + a_3^2}{a_2}y - \dfrac{ba_4 + aa_5}{a_2a_4}a_3.$ Если $y = \dfrac{a_3(ba_4 + aa_5)}{a_4\left(a_2^2 + a_3^2\right)}$, то $\lambda_3 = 0$. Если $y < \dfrac{a_3(ba_4 + aa_5)}{a_4\left(a_2^2 + a_3^2\right)}$, то $\begin{cases} \lambda_3 > 0, & \text{если } a_2 < 0, \\ \lambda_3 < 0, & \text{если } a_2 > 0. \end{cases}$ Если $y > \dfrac{a_3(ba_4 + aa_5)}{a_4\left(a_2^2 + a_3^2\right)}$, то $\begin{cases} \lambda_3 > 0, & \text{если } a_2 > 0, \\ \lambda_3 < 0, & \text{если } a_2 < 0. \end{cases}$

* Для P_5, когда $a_2 = a_3 = 0,\ b = -\dfrac{aa_5}{a_4},\ \lambda_1 = -2a,\ \lambda_{2,3} = 0.$

Теперь для системы (6) покажем существование и единственность предельного цикла, используя топографическую систему функций $V = x^2 + y^2 = C.$ Производная этих функций в силу системы (6) принимает вид

$$\frac{dV}{dt} = 2(x^2 + y^2)\left(a + a_4(x^2 + y^2)/k\right)$$

и является знакопостоянной на всей фазовой плоскости, если $ak/a_4 > 0.$ Поэтому в этом случае система (6) не имеет предельного цикла и, следовательно, у системы (2) нет цикла ни на одном из параболоидов $x^2 + y^2 = kz$. Если же выполняется условие $ak/a_4 < 0,$ то производная изменяет знак только на окружности

$$x^2 + y^2 = -ak/a_4, \tag{8}$$

которая и будет единственным предельным циклом системы (6). Соответственно эта же окружность является и единственным предельным циклом системы (2), расположенным на каждом параболоиде $x^2 + y^2 = kz$.

Выясним вопрос об устойчивости этого предельного цикла, используя знак производной $\dfrac{dV}{dt}$. При $a < 0,\ k/a_4 > 0$ производная $\dfrac{dV}{dt} < 0$ внутри окружности (8) и $\dfrac{dV}{dt} > 0$ вне ее, а следовательно, траектории системы (6) при $t \to +\infty$ входят во внутрь тех окружностей $V = C$, радиусы которых меньше радиуса окружности (8), и траектории выходят из окружностей $V = C$, радиусы которых больше радиуса окружности (8). Это означает, что при $a < 0,\ k/a_4 > 0$ предельный цикл является неустойчивым. Аналогично показывается, что при $a > 0,\ k/a_4 < 0$ предельный цикл является устойчивым. Нетрудно видеть, что точка покоя P_2 имеет такой же характер устойчивости, как и предельные циклы, а точка покоя P_1 – противоположный характер устойчивости.

Заметим, что доказательство нелокального существования предельного цикла и информацию о его устойчивости для системы (6) можно также получить, записав ее в полярных координатах

$$\frac{dr}{dt} = r\left(a + \frac{a_4}{k}r^2\right),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = b - a_2 r\cos\varphi - a_3 r\sin\varphi - \frac{a_5}{k}r^2.$$

При возрастании $|a|$ амплитуда предельных циклов увеличивается, и они могут исчезнуть в какой-то момент из-за влияния точек покоя, лежащих в плоскости $a = -a_4 z$ и составляющих прямую P. Для такого разрушения амплитуда предельного цикла должна достигнуть прямой P, что происходит при выполнении соотношения

$$-\frac{ak}{a_4} = \frac{(ba_4 + aa_5)^2}{a_4^2\left(a_2^2 + a_3^2\right)}.$$

Поэтому предельные циклы существуют, пока имеет место условие

$$-\frac{ak}{a_4} < \frac{(ba_4 + aa_5)^2}{a_4^2\left(a_2^2 + a_3^2\right)}.$$

В частности, из приведенного выше исследования точек покоя очевидна справедливость этого условия при $a_2 = a_3 = 0$, когда прямая P уходит в бесконечность, а система (2) имеет только две точки покоя P_1, P_2. Следовательно, в этом случае все предельные циклы при $|a| \to \infty$, неограниченно расширяясь, уходят в бесконечность.

Таким образом, доказан следующий результат, существенно дополняющий утверждение теоремы 2.

Теорема 3. *В случае* $a_4 \neq 0,\ b \neq -\dfrac{aa_5}{a_4}$ *и при выполнении условия* $ak / a_4 < 0$ *у системы* (2) *из фокуса* $O(0,0,0)$ *за счет бифуркации Андронова – Хопфа рождается бесконечно много (континуум) предельных циклов, которые являются устойчивыми (неустойчивыми), если* $a > 0$, $L_1 < 0$ ($a < 0$, $L_1 > 0$)*. Каждый из предельных циклов сохраняет свое существование при возрастании* $|a|$*, пока имеет место условие*

$$-\frac{ak}{a_4} < \frac{(ba_4 + aa_5)^2}{a_4^2\left(a_2^2 + a_3^2\right)}.$$

Если $a_2 = a_3 = 0$*, то предельные циклы существуют при всех значениях* $|a| \neq 0$.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе решена задача построения вещественных автономных квадратичных систем трех дифференциальных уравнений с нелокальным существованием бесконечного числа предельных циклов. В этом случае бесконечное число предельных циклов, появившись из фокуса за счет бифуркации Андронова – Хопфа, может существовать в фазовом пространстве не только в окрестности фокуса и не только для значений параметра, близких к бифуркационному значению. Для решения поставленной задачи применяется способ нахождения предельных циклов как линий пересечения инвариантной плоскости с семейством инвариантных эллиптических параболоидов. Затем исследование предельных циклов построенной системы третьего порядка сводится к исследованию соответствующей системы второго порядка на каждом из инвариантных эллиптических параболоидов. Доказательство нелокального существования предельного цикла и установление характера его устойчивости для такой системы второго порядка проводится с помощью построения топографической системы Пуанкаре или перехода к полярным координатам.

Благодарности. Исследование поддержано проектом Horizon 2020-2017-RISE-777911.

Acknowledgements. The research is supported by the project Horizon 2020-2017-RISE-777911.

Список использованных источников

1. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников [и др.]. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. – 428 с.

2. Hirsch, M. V. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos / M. W. Hirsch, S. Smile, R. L. Devaney. – Amsterdam: Academic Press, 2013. – 418 p. https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

3. Kuznetsov, Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory / Y. A. Kuznetsov. – 2nd ed. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 593 p. – (Applied Mathematical Sciences; vol. 112). https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2421-9

4. Bifurcation Theory and Catastrophe Theory / V. I. Arnold [et al]; ed. V. I. Arnold. – New York: Springer-Verlag, 1994. – 274 p. – (Dynamical Systems V / Encyclopaedia of Mathematical Sciences; vol. 5). https://doi.org/10.1007/978-3-642-57884-7

5. Wiggins, S. Introduction to Applied Non-linear Dynamical Systems and Chaos / S. Wiggins. – 2nd ed. – New York: Springer-Verlag, 2003. – 844 p. – (Texts in Applied Mathematics; vol. 2).

6. Hassard, B. D. Theory and Applications of Hopf Bifurcation / B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y.-H. Wan. – Cambridge: Cambridge University Press, 1981. – 320 p. – (London Mathematical Society Lecture Note Series; vol. 41).

7. Reyn, J. Phase portraits of planar quadratic systems / J. Reyn. – New York: Springer-Verlag, 2007. – 334 p. – (Mathematics and Its Applications; vol. 583). https://doi.org/10.1007/978-0-387-35215-2

8. Булгаков, В. И. Об одной бифуркации негрубого фокуса автономной системы третьего порядка / В. И. Булгаков, А. А. Гринь // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 12. – С. 1703.

9. Romanovski, V. G. Centers and limit cycles in polynomial systems of ordinary differential equations / V. G. Romanovski // Advanced Studies in Pure Mathematics. – 2016. – Vol. 68. – P. 267–373. https://doi.org/10.2969/aspm/06810267

10. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1990. – 486 с.

11. Tigan, G. Degenerate Fold – Hopf Bifurcations in a Rössler-Type System / G. Tigan, J. Llibre, L. Ciurdariu // Int. J. Bifurcation Chaos. – 2017. – Vol. 27, № 5. – P. 1–8. https://doi.org/10.1142/S0218127417500687

12. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно: ГрГУ, 2013. – 489 с.

13. Булгаков, В. И. О фазовом портрете автономной системы третьего порядка / В. И. Булгаков // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 10. – С. 1821–1822.

14. Булгаков, В. И. О бифуркациях предельных циклов квадратичной трехмерной системы в окрестности негрубого фокуса / В. И. Булгаков, Л. А. Черкас // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 108. – С. 681–684.

15. Bibikov, Y. N. Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations / Y. N. Bibikov. – New York: Springer-Verlag, 1979. – 150 p. – (Lecture Notes in Mathematics; vol. 702).

References

1. Shil′nikov L. P., Shil′nikov A. L., Turaev D. V., Chua L. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics.* Moskow, Izhevsk, Institute for Computer Research, 2003. 428 p. (in Russian).

2. Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Amsterdam, Academic Press, 2013. 418 p. https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

3. Kuznetsov Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory, 2nd ed.* Applied Mathematical Sciences, vol. 112. New York, Springer-Verlag, 1998. 593 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2421-9

4. Arnold V. I., Afraimovich V. S., Il′yashenko Y. S., Shil′nikov L. P. *Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*. Dynamical Systems V. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 5. New York, Springer-Verlag, 1994. 274 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57884-7

5. Wiggins S. *Introduction to Applied Non-linear Dynamical Systems and Chaos, 2nd ed.* Texts in Applied Mathematics, vol. 2. New York, Springer-Verlag, 2003. 844 p.

6. Hassard B. D., Kazarinoff N. D., Wan Y.-H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 41. Cambridge, Cambridge University Press, 1981. 320 p.

7. Reyn J. *Phase Portraits of Planar Quadratic Systems*. Mathematics and Its Applications, vol. 583. New York, Springer-Verlag, 2007. 334 p. https://doi.org/10.1007/978-0-387-35215-2

8. Bulgakov V. I., Grin A. A. On one bifurcation of a non-rough focus of a third-order autonomous system. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 12, pp. 1697–1698.

9. Romanovski V. G., Shafer D. S. Centers and limit cycles in polynomial systems of ordinary differential equations. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 2016, vol. 68, pp. 267–373. https://doi.org/10.2969/aspm/06810267

10. Bautin N. N., Leontovich E. A. *Methods and Techniques for the Qualitative Study of Dynamical Systems on a Plane*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 486 p. (in Russian).

11. Tigan G., Llibre J., Ciurdariu L. Degenerate Fold–Hopf Bifurcations in a Rössler-Type System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2017, vol. 27, no. 5, pp. 1–8. https://doi.org/10.1142/S0218127417500687

12. Cherkas L. A., Grin A. A., Bulgakov V. I. *Constructive Methods of Investigation of Limit Cycles of Second Order Autonomous Systems (Numerical-Algebraic Approach)*. Grodno, GrGU Publ., 2013. 489 p. (in Russian).

13. Bulgakov V. I. On the phase portrait of a third-order autonomous system. *Differentsial′nye uravneniya* [Differential Equations], 1988. vol. 24, no. 10, pp. 1821–1822 (in Russian).

14. Bulgakov V. I. About Bifurcations of Limit Cycles of a Quadratic Three-Dimensional System in a Neighborhood of a Non-Rough Focus. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1982. vol. 26, no. 108, pp. 681–684 (in Russian).

15. Bibikov Y. N. *Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 702. New York, Springer-Verlag, 1979. 150 p.

Информация об авторах

Гринь Александр Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E mail: grin@grsu.by

Мусафиров Эдуард Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры технической механики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (ул. Курчатова, 1а, 230005, Гродно, Республика Беларусь). E mail: Musafirov_ev@grsu.by

Проневич Андрей Францевич – кандидат физико-математических наук, доцент, проректор по научной работе, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (ул. Гаспадарчая, 23, 230005, Гродно, Республика Беларусь). E mail: pranevich@grsu.by

Information about the authors

Aliaksandr A. Hryn – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: grin@grsu.by

Eduard V. Musafirov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Technical Mechanics, Yanka Kupala State University of Grodno, (1a, Kurchatov Str., 230005, Grodno, Republic of Belarus). Email: Musafirov_ev@grsu.by

Andrei F. Pranevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Vice-Rector for Research, Yanka Kupala State University of Grodno, (23, Gaspadarchaya Str., 230005, Grodno, Republic of Belarus). Email: pranevich@grsu.by