ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.9
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-144-154

Поступила в редакцию 18.02.2022
Received 18.02.2022

Е. В. Кузьмина

Брестский государственный технический университет, Брест, Республика Беларусь

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Аннотация. Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка иерархии Риккати. Понятие обобщенного решения для такого уравнения не может быть введено в рамках классической теории обобщенных функций ввиду того, что не определено произведение обобщенных функций. Для введения понятия обобщенного решения рассмотрены два подхода. При первом подходе использована аппроксимация решениями задачи Коши с комплексными начальными условиями и обобщенные решения определены как пределы аппроксимирующих семейств в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Показано, что существуют два обобщенных решения задачи Коши. Вид решения зависит от того, в верхней или в нижней полуплоскости расположены полюсы аппроксимирующего решения. При втором подходе используется аппроксимация с помощью системы уравнений. Показано, что существует много аппроксимирующих систем и обобщенные решения задачи Коши зависят от выбора аппроксимирующей системы.

Ключевые слова: обобщенная функция, обобщенное решение нелинейного уравнения, свойство Пенлеве, аппроксимирующая система

Для цитирования. Кузьмина, Е. В. Обобщенные решения уравнения Риккати / Е. В. Кузьмина // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 144–154. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-144-154

Elena V. Kuzmina

Brest State Technical University, Brest, Republic of Belarus

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE RICCATI EQUATION

Abstract. In this paper, we consider a nonlinear differential equation of the first order of the Riccati hierarchy. The concept of a generalized solution for such an equation cannot be introduced within the framework of the classical theory of generalized functions because the product of generalized functions is not defined. To introduce the concept of a generalized solution, two approaches are considered. In the first approach, approximation by solutions of the Cauchy problem with complex initial conditions is used, and generalized solutions are defined as limits of approximating families in the sense of convergence in $D'(\mathbb{R})$. It is shown that there are two generalized solutions of the Cauchy problem. The type of solution depends on whether the poles of the approximating solution are located in the upper or lower half-plane. The second approach uses approximation with a system of equations. It is shown that there are many approximating systems, meanwhile, generalized solutions of the Cauchy problem depend on the choice of the approximating system.

Keywords: generalized function, generalized solution of a nonlinear equation, Painlevé property, approximating system

For citation. Kuzmina E. V. Generalized solutions of the Riccati equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 144–154 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-144-154

Проблема определения обобщенных решений нелинейных уравнений. При моделировании процессов в физических системах обычно считается, что состояние системы описывается некоторой функцией и строится дифференциальное уравнение, решением которого является искомое состояние.

Обратим внимание на то, что понятие состояния физической системы не является абсолютным, так как оно определяется в зависимости от множества допустимых измерений с помощью некоторого набора приборов. Говорят, что состояние системы задано, если для каждого измерения однозначно определен его результат. С этой точки зрения в теории обобщенных функций (распределений) считается [1], что каждая основная функции φ из $D(\mathbb{R})$ соответствует измерительному прибору, а обобщенная функция (распределение) ставит в соответствие каждому φ определенное число, т. е. задает состояние в описанном выше смысле.

Любая обычная локально интегрируемая функция u задает так называемое *регулярное распределение* по формуле

$$\langle U, \varphi \rangle = \int u(x)\varphi(x)dx. \tag{1}$$

Основанием для описания состояний с помощью распределений является то, что результаты реальных измерений задаются выражениями вида (1), не существует приборов, которые измеряют значение функции u в заданной точке, и имеются сингулярные состояния, которые не задаются формулой (1).

Переход к описанию состояний с помощью распределений существенен в случае, когда решения рассматриваемого дифференциального уравнения имеют особенности и формула (1) не задает распределение.

Определение 1. Будем говорить, что обобщенная функция U *соответствует* обычной функции $u(x)$, имеющей особенности в конечном числе точек, если равенство (1) выполнено для тех φ, для которых интеграл в правой части (1) существует.

Например, функция $\dfrac{1}{x}$ имеет неинтегрируемую особенность и ей соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций вида

$$U_M = P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta_0,$$

где M – произвольная постоянная, $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$ – дельта-функция Дирака, $P\left(\dfrac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная с помощью интеграла в смысле главного значения по Коши

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = v.p.\int \frac{1}{x}\varphi(x)dx.$$

Поскольку в приложениях интерес представляют именно состояния, возникает вопрос: какие из распределений, соответствующих классическому решению с особенностями, можно считать решениями исходного уравнения. При стандартном определении решением уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение дает тождественное равенство. Но при подстановке распределения в нелинейное уравнение возникают выражения, которые не определены в теории обобщенных функций, и стандартное определение решения не имеет смысла. Поэтому в первую очередь возникает вопрос о том, как ввести понятие обобщенного решения.

Если предположить, что введено понятие обобщенного решения и такое решение построено, то естественно ожидать, что это распределение, соответствующее некоторому классическому решению, однозначно определенному на всей прямой. Но решение, имеющее особенности, однозначно определяется по условиям Коши в точке x_0 только на некотором промежутке, так как оно уходит на бесконечность при приближении к особым точкам. Продолжение этого решения через особые точки не определяется однозначно рассматриваемым дифференциальным уравнением на прямой.

Поэтому первым шагом к определению обобщенного решения является выделение уравнений, для которых естественно определены продолжения классических решений задачи Коши через особенности.

Рассмотрим на прямой нелинейные дифференциальные уравнения вида

$$u'(x) + \gamma u^m(x) = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad m = 2, 3, \dots. \tag{2}$$

Классическое решение задачи Коши с условием $u(x_0) = C, \ \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для уравнения (2) есть функция, заданная формулой

$$u(x) = \frac{1}{\left[\gamma(m-1)(x-a)\right]^{\frac{1}{m-1}}}, \quad a = x_0 - \frac{1}{\gamma(m-1)C^{m-1}}. \tag{3}$$

Но при $m > 2$ эта формула задает однозначно определенную функцию только на полупрямой, на которой выражение в квадратных скобках положительно. На дополнительной полупрямой формула (3) определяет многозначную комплекснозначную функцию, и для решения не существует естественного вещественнозначного продолжения решения через особенность.

Особым здесь является случай $m = 2$. Тогда (2) есть уравнение Риккати

$$u'(x) + \gamma u^2(x) = 0, \tag{4}$$

формула (3) превращается в

$$u(x) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{x - x_0 + \dfrac{1}{\gamma C}}$$

и задает классическое решение, однозначно определенное на всей прямой по начальному условию.

Отличие двух рассмотренных случаев проявляется при рассмотрении аналогичных уравнений на комплексной плоскости

$$w'(z) + \gamma w^m(z) = 0, \tag{5}$$

где дифференцирование понимается по комплексной переменной z. Тогда случай $m = 2$ характеризуется тем, что решения уравнения (5) есть однозначные аналитические функции на комплексной плоскости и их особенностями являются полюсы. Такое свойство уравнений подробно исследовалось в многочисленных работах по аналитической теории дифференциальных уравнений.

Особая точка решения дифференциального уравнения называется *подвижной*, если ее положение на комплексной плоскости зависит от начальных условий. Говорят, что уравнение

$$w^{(n)}(z) = R\left(z, w, w', \ldots, w^{(n-1)}\right) = 0$$

имеет *свойство Пенлеве*, если все подвижные особые точки решений являются полюсами [2]. Среди решений уравнений со свойством Пенлеве наиболее простыми и удобными для дальнейшего исследования являются рациональные, поэтому представляет интерес нахождение таких решений [3, 4]. Именно такие решения рассмотрены ниже.

Из сказанного вытекает, что первый шаг исследования автоматически осуществляется для уравнений со свойством Пенлеве: если такое уравнение рассматривать только на вещественной прямой, то решение задачи Коши однозначно продолжается через особенности, и на прямой определена функция, которую будем называть *формальным решением задачи Коши*.

Обобщенные решения уравнения Риккати, порожденные аналитическим продолжением. Рассмотрим задачу об обобщенных решениях для простейшего из уравнений со свойством Пенлеве, а именно, уравнения Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0, \;\; \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{6}$$

Для этого уравнения аналитическое решение задачи Коши с условием $w(z_0) = C \neq 0$ является рациональной функцией

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z - z_0) + \dfrac{1}{C}} = \frac{1}{\gamma(z - a)},$$

где $a = z_0 - \dfrac{1}{\gamma C}$, однозначно определенной при $z \neq a$. В частности, при вещественных $z_0 = x_0$ и C по этой формуле однозначно определено вещественнозначное формальное решение задачи Коши на всей вещественной оси, имеющее особенность в точке a.

Функции $\dfrac{1}{\gamma(x - a)}$ соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций вида

$$\frac{1}{\gamma}U_M = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma}M\delta_a, \tag{7}$$

где M – произвольная постоянная. Как уже отмечалось, распределения $\frac{1}{\gamma}U_M$ нельзя подставить в уравнение, так как квадрат такого распределения не определен в классической теории, и требуется выяснить, какие из распределений (7) и в каком смысле можно считать решениями уравнения (4).

Вопрос об определении понятия обобщенного решения рассматривался многими авторами с разных точек зрения, и ему посвящена обширная литература [5, 6]. Общая идея введения обобщенных решений основана на построении вспомогательных семейств функций, которые строятся так, что если существует предел такого семейства, то его естественно считать обобщенным решением.

В случае дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами эта идея реализуется по следующей схеме. Обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Возникает семейство аппроксимирующих уравнений, у которых решения u_ε являются гладкими функциями. Обобщенным решением исходного уравнения называется предел решений аппроксимирующих уравнений в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Такой подход использовался, например, в работах [7–9], причем было обнаружено, что даже для простейших линейных уравнений первого порядка с обобщенными коэффициентами не всегда существуют обобщенные решения.

Уравнение (4) не содержит обобщенных коэффициентов, и для него нужны другие способы построения аппроксимаций. Наиболее естественный из них связан с выходом в комплексную плоскость. Он основан на том, что решение задачи Коши для уравнения (6) с условием $w(x_0) = C$ при невещественном C является гладкой функцией на вещественной прямой и может служить искомой аппроксимацией.

Определение 2. Пусть $C_\varepsilon \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ и $C_\varepsilon \to C$ при $\varepsilon \to 0$, а $w_\varepsilon(x)$ есть решения задачи Коши для уравнения (6) с условиями $w_\varepsilon(x_0) = C_\varepsilon$. Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (4) с условием $u(x_0) = C$ при заданном способе аппроксимации начального условия, если $w_\varepsilon(x)$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к W в смысле сходимости в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

После введения понятия обобщенного решения основной вопрос заключается в доказательстве существования таких решений, т. е. в исследовании сходимости семейства $w_\varepsilon(x)$ в зависимости от способа стремления C_ε к C.

Здесь

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma(x-x_0)+\dfrac{1}{C_\varepsilon}} = \frac{1}{\gamma(x-a_\varepsilon)},$$

где $a_\varepsilon = x_0 - \dfrac{1}{\gamma C_\varepsilon}$. Эта функция имеет полюс в точке a_ε, который при $\varepsilon \to 0$ сходится к точке a – полюсу формального решения.

Очевидно и обратное: если дан полюс a_ε, то C_ε однозначно определяется по формуле $C_\varepsilon = \dfrac{1}{\gamma(x_0 - a_\varepsilon)}$. Следовательно, условие, что $C_\varepsilon \to C$, эквивалентно тому, что полюс a_ε стремится к a – полюсу формального решения. Поэтому рассмотрим поведение $w_\varepsilon(x)$ в зависимости от способа стремления a_ε к a.

Наиболее простым поведение $w_\varepsilon(x)$ оказывается в случае, когда $a_\varepsilon = a + i\varepsilon$, т. е. a_ε приближается к a сверху по вертикали. Эти решения соответствуют начальным условиям

$$C_\varepsilon = -\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a-x_0+i\varepsilon} = -\frac{1}{\gamma}\frac{a-x_0}{(a-x_0)^2+\varepsilon^2} + i\frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(a-x_0)^2+\varepsilon^2}.$$

В этом случае получаем семейство функций

$$w_\varepsilon^+(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2} + i\frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2}, \tag{8}$$

сходимость которого подробно исследована. Известно, что семейство гладких функций

$$\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2}$$

сходится к $P\left(\frac{1}{x-a}\right)$, а семейство

$$\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2}$$

сходится к $\pi\delta$. Таким образом, семейство (8) сходится к распределению

$$W^+ = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a,$$

которое является искомым обобщенным решением задачи Коши при указанном способе аппроксимации.

При $a_\varepsilon = a - i\varepsilon$ получаем другое семейство функций

$$w_\varepsilon^-(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2} - i\frac{1}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2},$$

которое сходится точечно к тому же формальному решению, но при этом сходится к другому распределению

$$W^- = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) - i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

В общем случае поведение аппроксимирующих семейств описывается следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + iv_\varepsilon(x)$ *есть решения задачи Коши для уравнения* (6), *удовлетворяющие начальным условиям* $w_\varepsilon(x_0) = C_\varepsilon$, *где* $C_\varepsilon \to C$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Семейство* $w_\varepsilon(x)$ *сходится в пространстве* $D'(\mathbb{R})$ *только в двух случаях:*

1) если $\operatorname{Im}C_\varepsilon < 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^- = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) - i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a;$$

2) если $\operatorname{Im}C_\varepsilon > 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^+ = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_\varepsilon = a + h_1(\varepsilon) + ih_2(\varepsilon)$, где $h_1(\varepsilon) \to 0$, $h_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma(x-a_\varepsilon)} = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a-h_1(\varepsilon)}{[x-a-h_1(\varepsilon)]^2+h_2^2(\varepsilon)} + i\frac{1}{\gamma}\frac{h_2(\varepsilon)}{[x-a-h_1(\varepsilon)]^2+h_2^2(\varepsilon)}. \tag{9}$$

Полученное выражение для $w_\varepsilon(x)$ при $h_1(\varepsilon) = 0$ и $h_2(\varepsilon) = \varepsilon$ есть семейство функций (8). Надо показать, что семейства (8) и (9) имеют одинаковые пределы. Здесь разность этих семейств почти всюду сходится к нулю. Если $h_1(\varepsilon)$ мало по сравнению с $h_2(\varepsilon)$, то для разности этих семейств можно получить оценки, позволяющие перейти к пределу под знаком интеграла, откуда следует совпадение пределов в пространстве распределений. Но величина $h_1(\varepsilon)$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно по сравнению с $h_2(\varepsilon)$ и может быть существенно большей, чем $h_2(\varepsilon)$. Тогда для разности семейств (8) и (9) нет требуемых оценок, и для доказательства сходимости необходимо дополнительное исследование. Геометрический смысл такой сходимости заключается в том, что полюс a_ε приближается к точке a, касаясь действительной оси.

Для упрощения обозначений будем считать, что $a = 0$, $\gamma = 1$ и

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{x - a_\varepsilon} = \frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)} + i\frac{h_2(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)}. \tag{10}$$

Если носитель функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ принадлежит промежутку $[-R + 1, R - 1]$, то распределение $P\left(\frac{1}{x}\right)$ может быть задано выражением

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_{|x|<R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

Отметим также, что

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x-h}\right), \varphi \right\rangle \to \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$

при $h \to 0$.

Рассмотрим вещественную часть функции (10) как распределение

$$I_1(\varepsilon, \varphi) := \int \frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)} \varphi(x) dx.$$

Так как

$$\int_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)} \frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)} dx = 0,$$

получаем, что

$$I_1(\varepsilon, \varphi) = \int_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)} \frac{\left[\varphi(x) - \varphi\left(h_1(\varepsilon)\right)\right][x - h_1(\varepsilon)]}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)} dx.$$

Преобразуем полученное выражение

$$I_1(\varepsilon, \varphi) = \int_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)} \frac{\varphi(x) - \varphi\left(h_1(\varepsilon)\right)}{x - h_1(\varepsilon)} dx + \int_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)} \left[\varphi(x) - \varphi\left(h_1(\varepsilon)\right)\right] \left[\frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)} - \frac{1}{x - h_1(\varepsilon)}\right] dx =$$

$$= \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle + \left[\left\langle P\left(\frac{1}{x - h_1(\varepsilon)}\right), \varphi \right\rangle - \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right] -$$

$$- \int_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)} \left[\varphi(x) - \varphi\left(h_1(\varepsilon)\right)\right] \frac{h_2^2(\varepsilon)}{\left([x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)\right)[x - h_1(\varepsilon)]} dx.$$

Здесь второе слагаемое (выражение в квадратных скобках) стремится к нулю и требуется проверить сходимость последних интегралов, в которых подынтегральные выражения почти всюду сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поскольку

$$\frac{h_2^2(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)} < 1, \qquad \left|\frac{\varphi(x) - \varphi\left(h_1(\varepsilon)\right)}{x - h_1(\varepsilon)}\right| \le \text{const},$$

все подынтегральные выражения ограничены одной постоянной и, согласно теореме Лебега, эти интегралы сходятся к нулю. Таким образом,

$$I_1(\varepsilon,\varphi) \to \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Аналогично проверяется мнимая часть функции (10):

$$\int \frac{h_2(\varepsilon)}{[x-h_1(\varepsilon)]^2 + h_2^2(\varepsilon)} \varphi(x)dx$$

сходится к $-\pi\varphi(0)$, если $h_2(\varepsilon) < 0$, или к $\pi\varphi(0)$, если $h_2(\varepsilon) > 0$. Теорема 1 доказана.

Согласно доказанному, аппроксимирующие семейства разбиваются на два класса и существуют два разных обобщенных решения задачи Коши. При этом среди распределений (7), соответствующих формальному решению, обобщенными решениями являются только те, у которых $M = \pm i\pi$.

Аппроксимации системами уравнений. На проведенные построения можно посмотреть с другой точки зрения. Комплекснозначное решение $w(z) = u(x,0) + iv(x,0)$ уравнения (6) на вещественной прямой будем рассматривать как вектор-функцию со значениями в $\mathbb{R}^2 : \big(u(x), v(x)\big)$. Из уравнения получаем, что эта вектор-функция является решением системы

$$\begin{cases} u'_x = \gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x). \end{cases} \tag{11}$$

Эта система связана с исходным уравнением следующим образом:

1) при $v \equiv 0$ система (11) превращается в исходное уравнение;

2) при $v(x_0) \neq 0$ система (11) имеет гладкие решения, определенные при всех x.

Кроме того, если $v(x_0) \to 0$ и $u(x_0) \to C$, то функция $u(x)$ почти всюду сходится к формальному решению уравнения (4).

В терминах этой системы утверждение теоремы 1 заключается в том, что решения системы, удовлетворяющие начальным условиям $u(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $v(x_0) = C_2(\varepsilon)$, при $C_1(\varepsilon) \to C$, $C_2(\varepsilon) \to 0$ сходятся к вектор-распределению $\left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right), \pm\frac{\pi}{\gamma}\delta_a\right)$.

Следующий шаг основан на том наблюдении, что (11) не единственная система с указанными свойствами.

Например, такими свойствами обладает система

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{1}{\beta^2}\gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x), \end{cases} \tag{12}$$

где $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. С помощью этой системы введем понятие обобщенного решения, аналогично определению 2.

О п р е д е л е н и е 3. Векторное распределение U будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (4) с условием $u(x_0) = C$ при аппроксимации системой (12), если существуют такие $C_1(\varepsilon) \to C$, $C_2(\varepsilon) \to 0$, при которых решения $\big(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)\big)$ аппроксимирующей системы с начальными условиями $u_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $v_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$ являются гладкими на вещественной оси и при $\varepsilon \to 0$ к сходятся к U.

Например, пара функций

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2}, \qquad v_\varepsilon(x) = \pm\frac{\beta}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2},$$

где $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C}$, которые удовлетворяют начальным условиям $u_\varepsilon(x_0) = \frac{C}{1+(\varepsilon\gamma C)^2}$, $v_\varepsilon(x_0) = \pm\frac{\varepsilon\beta\gamma C^2}{1+(\varepsilon\gamma C)^2}$, есть решение системы (12). При $\varepsilon \to 0$ эти вектор-функции $\left(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x)\right)$ сходятся к распределению

$$W_\beta^\pm = \left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right), \pm\frac{1}{\gamma}\beta\pi\delta_a\right).$$

В отличие от рассмотренного выше случая, здесь комплекснозначные функции $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + iv_\varepsilon(x)$ не являются аналитическими, для них вместо условий Коши – Римана выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично теореме 1 получаем утверждение.

Теорема 2. *При аппроксимации уравнения* (4) *системой* (12) *обобщенными решениями задачи Коши являются распределения*

$$W_\beta^\pm = \left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right), \pm\frac{1}{\gamma}\beta\pi\delta_a\right)$$

и только они.

Таким образом, при других способах аппроксимации появляются другие обобщенные решения. В частности, при любом чисто мнимом M существует такая аппроксимирующая система, что распределение (7), записанное как вектор-распределение, является обобщенным решением. Заметим, однако, что наиболее естественное с ряда точек зрения распределение $P\left(\frac{1}{x-a}\right)$ не является обобщенным решением при таких способах аппроксимации.

Среди других систем, аппроксимирующих в указанном смысле исходное уравнение Риккати, можно указать системы вида

$$\begin{cases} u_x' = -\gamma u^2 + v(A_{11}u + A_{12}v); \\ v_x' = v(A_{21}u + A_{22}v), \end{cases} \tag{13}$$

где A_{kj} – заданные числа. Системы (11) и (12) являются частными случаями таких систем.

Еще более общий вид аппроксимирующих систем получаем, если в (13) рассматривать коэффициенты A_{kj}, зависящие от ε. В качестве примера рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} u_x' = \frac{1}{\varepsilon^2}\gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v_x' = -2\gamma v(x)u(x). \end{cases} \tag{14}$$

При фиксированном ε пара функций

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2}, \qquad v_\varepsilon(x) = \pm\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2}$$

есть решение системы (14), причем при $\varepsilon \to 0$ начальные условия стремятся к $(C, 0)$. Данное семейство сходится к распределению $\left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right),\ 0\right)$. Как было отмечено, это распределение не может быть обобщенным решением при аппроксимациях вида (12).

Обобщенные решения второго уравнения из иерархии Риккати. Аналогичные определения обобщенного решения задачи Коши можно дать для других уравнений со свойством Пенлеве. Одним из направлений исследования дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве является построение уравнений высших порядков при помощи воздействия специальными операторами на известные уравнения, уже обладающие свойством Пенлеве.

Уравнение первого порядка имеет свойство Пенлеве, если и только если оно имеет вид

$$w'(z) = a(z)\,w^2 + b(z)\,w + c(z).$$

В работе [10] была построена иерархия уравнений со свойством Пенлеве, порожденная уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma\, w^2(z) = 0.$$

Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующее по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

При $n = 1$ получаем уравнение (6).

Применяя преобразование D_R, получаем второе уравнение из иерархии Риккати

$$w''(z) + \gamma^2 w^3(z) + 3\gamma w(z) w'(z) = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим, какие отличия возникают при построении обобщенных решений задачи Коши для уравнения (15). Аналитические решения $w(z)$ уравнения (15) могут иметь два полюса первого порядка – точки a и b. Если a и b вещественные, то эти точки делят прямую на три части и на вещественной оси решение задачи Коши однозначно определено только на одной из этих трех частей, содержащей точку x_0. Но аналитическая функция $w(z)$ задает однозначно определенное по условию Коши формальное решение $w(x)$ на всей прямой. Такому решению соответствует семейство распределений, зависящее от двух произвольных постоянных, и требуется выяснить, какие из этих распределений и в каком смысле можно считать обобщенными решениями.

Зафиксируем формальное решение $w(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $w(x_0) = C_0$, $w'(x_0) = C_1$ и имеющее полюсы в точках a и b на прямой. При этом решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для (15), удовлетворяющие невещественным начальным условиям $w_\varepsilon(x_0) = C_0(\varepsilon)$, $w'_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, являются гладкими на всей прямой.

Если существует предел U аппроксимирующих решений $w_\varepsilon(x)$ при $C_0(\varepsilon) \to C_0$, $C_1(\varepsilon) \to C_1$, то распределение U будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (15).

При анализе поведения аппроксимирующих решений здесь возникают четыре случая, в зависимости от расположения каждого из полюсов выше или ниже вещественной оси. Это приводит к тому, что существуют четыре разных обобщенных решения задачи Коши с заданным начальным условием.

Заключение. Выбор аппроксимирующей системы как уточнение постановки задачи. Существование множества качественно различных аппроксимирующих систем, приводящих к разным обобщенным решениям, согласуется с прикладной стороной вопроса и связано с уточнением математических моделей рассматриваемых процессов.

В первоначальной постановке считалось, что состояние описывается одной вещественнозначной функцией, удовлетворяющий некоторому заданному уравнению. При построении аппроксимирующей системы переходим к более сложной модели, в которой состояние описывается парой вещественнозначных функций, а при определении обобщенного решения переходим к еще более общей модели, в которой состояние системы описывается парой вещественнозначных распределений.

Переход от рассмотрения одной функции к паре функций часто используется при моделировании физических процессов. Например, пусть исследуется электрическое поле (распределение зарядов) в некотором теле, и при исходной постановке задачи считается, что магнитное поле отсутствует и не учитывается в рассматриваемом уравнении. Ввиду того, что основные физические законы описывают взаимодействие электрического поля с магнитным, в более точной математической модели состояние описывается парой функций (электрическое и магнитное поле), а процесс описывается системой уравнений.

Таким образом, задание аппроксимирующей системы есть уточнение постановки задачи, при котором учитывается вторая компонента (скрытый параметр, отсутствовавший в первоначальной модели). Поскольку законы взаимодействия компонент уточненной модели могут быть разными для разных физических систем, оправдано рассмотрение качественно различных аппроксимирующих систем. В приложениях выбор конкретной аппроксимирующей системы должен определяться по свойствам рассматриваемой физической системы. Такой выбор вносит дополнительную информацию, не содержащуюся в первоначально заданном уравнении, и позволяет определить обобщенные решения.

Список использованных источников

1. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

2. Ince, E. L. Ordinary differential equations / E. L. Ince. – New York: Dover Publications, 1944. – 558 p.

3. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. – Минск: Университетское, 1990. – 157 с.

4. Громак, В. И. О решениях второго уравнения Пенлеве / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 5. – С. 753–763.

5. Альбеверио, С. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Холден. – М.: Мир, 1991. – 568 с.

6. Данилов, В. Г. Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка / В. Г. Данилов, В. П. Маслов, В. М. Шелкович // Теор. и мат. физика. – 1998. – Т. 114, № 1. – С. 3–55.

7. Антоневич, А. Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А. Б. Антоневич, Т. Г. Шагова // Таврич. вестн. информатики и математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.

8. Антоневич, А. Б. Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А. Б. Антоневич, Е. В. Кузьмина // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.

9. Кузьмина, Е. В. Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида / Е. В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 54–61.

10. Грицук, Е. В. Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве / Е. В. Грицук, Е. В. Кузьмина // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 64–72.

References

1. Vladimirov V. S. *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian).

2. Ince E. L. *Ordinary Differential Equations*. New York, Dover Publ., 1944. 558 p.

3. Gromak V. I., Lukashevich N. A. *Analytical Properties of Solutions of the Painlevé Equations*. Minsk, Universitetskoe Publ., 1990. 157 p. (in Russian).

4. Gromak V. I. Solutions of the third Painlevé equation. *Differentsial'nyye uravneniya = Differential equations*, 1982, vol. 18, no. 5, pp. 753–763 (in Russian).

5. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. *Models in Quantum Mechanics*. Berlin etc., Springer-Verlag, 1988. 452 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-88201-2

6. Danilov V. G., Maslov V. P., Shelkovich V. M. Algebras of the singularities of singular solutions to first-order quasi-linear strictly hyperbolic systems. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1998, vol. 114, no. 1, pp. 1–42. https://doi.org/10.1007/bf02557106

7. Antonevich A. B., Shahava T. G. Solutions of some differential equations in the distributions space. *Tavriceskii vestnik informatiki i matematiki = Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 23–36 (in Russian).

8. Antonevich A. B., Kuzmina E. V. Solutions of the differential equation $u' + \frac{s}{x}u = 0$ in the distributions space. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia* 2. *Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series* 2. *Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2017, vol. 10, no. 22, pp. 56–66 (in Russian).

9. Kuzmina E. V. Generalized solutions of the differential first-order equation with the special rational coefficient. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2021, no. 1 (46), pp. 54–61 (in Russian).

10. Gritsuk E. V., Kuzmina E. V. The study of the generalized hierarchy of the equation of Riccati on the Painlevé property. *Vesnik Brestskaga ŷniversiteta*. *Seryia* 4. *Fizika*. *Matematyka* = *Vesnik of Brest University*. *Series* 4. *Physics*. *Mathematics*, 2017, no. 2, pp. 64–72 (in Russian).

Информация об авторе

Кузьмина Елена Викторовна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Брестский государственный технический университет (ул. Московская, 267, 224017, Брест, Республика Беларусь); аспирант, Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, Брест, Республика Беларусь). E-mail: elena_kuzmina@inbox.ru. https://orcid.org/0000-0002-6773-1743.

Information about the author

Elena V. Kuzmina – Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Brest State Technical University (267, Moskovskaya Str., 224017, Brest, Republic of Belarus); Postgraduate Student, Brest State A. S. Pushkin University (21, Kosmonavtov Boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: elena_kuzmina@inbox.ru. https://orcid.org/0000-0002-6773-1743