

УДК 517.51

В. Р. МИСЮК¹, А. А. ПЕКАРСКИЙ²**СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И СООТНОШЕНИЯ
ДЛЯ ИХ НАИЛУЧШИХ РАВНОМЕРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ**¹Гродненский государственный университет им. Я. Купалы²Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 10.04.2015)

В теории приближения периодических функций посредством тригонометрических полиномов хорошо известны результаты Н. К. Бари и С. Б. Стечкина (см. [1], а также сформулированную ниже теорему 5) о связи наилучших равномерных приближений самой функции и ее сопряженной. В настоящей статье решена аналогичная задача в случае приближения функций, заданных на отрезке, посредством алгебраических многочленов.

Через $C(I)$ обозначим банахово пространство функций, непрерывных на отрезке $I = [-1, 1]$. При этом норма $g \in C(I)$ определяется стандартно, т. е. $\|g\|_{C(I)} = \max_{x \in I} |g(x)|$. $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n ($n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$). Для функции $g \in C(I)$ введем

$$E_n(g) = \inf \left\{ \|f - p_n\|_{C(I)} : p_n \in \mathcal{P}_n \right\}$$

– наилучшее равномерное приближение множеством $\mathcal{P}_n$.

Пусть функция $g(t)$ определена на отрезке I и интегрируема на нем с весом $1/\sqrt{1-t^2}$. Тогда $\hat{g}$ (функция, сопряженная g) определяется следующим образом:

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I. \quad (1)$$

Как известно, указанный сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши, существует почти всюду на I .

Основными результатами настоящей статьи являются теоремы 1 и 2. При этом через $c, c_1, c_2, \dots$ мы обозначаем абсолютные положительные постоянные; $c(\dots), c_1(\dots), c_2(\dots), \dots$ – некоторые положительные величины, зависящих лишь от указанных в скобках параметров.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $g \in C(I)$ такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g) < \infty. \quad (2)$$

Тогда $\hat{g} \in C(I)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$E_n(\hat{g}) \leq \frac{c_1}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g).$$

С л е д с т в и е. Пусть $g \in C(I)$, $\alpha > 0$ и $E_n(g) = O(n^{-\alpha})$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\hat{g} \in C(I)$ и при $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место соотношение

$$E_n(\hat{g}) = \begin{cases} O(1/n^\alpha), & 0 < \alpha < 1; \\ O(\ln n/n), & \alpha = 1; \\ O(1/n), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. Пусть $g \in C(I)$ и $s \in \mathbb{N}$. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} E_k(g)$, то функция $\hat{g}$ непрерывно дифференцируема s раз на интервале $(-1, 1)$ и

$$\hat{g}^{(s)}(x) = O\left(1/\left(1-x^2\right)^{s-1/2}\right) \text{ при } x \in (-1, 1). \quad (3)$$

Для обсуждения теорем 1 и 2 отметим равенство

$$\int_I \frac{1}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4)$$

которое несложно найти, используя определение главного значения несобственного интеграла по Коши. Равенство (4) является также частным случаем формулы (47.28) из [2]. Из (1) и (4) находим, что

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I. \quad (5)$$

Отсюда получаем, что если p_n — алгебраический многочлен степени n , $n \in \mathbb{N}_0$, то $\hat{p}_0(x) = 0$ при $x \in I$. Если же $n \in \mathbb{N}$, то $\hat{p}_n(x) = \sqrt{1-x^2} q_{n-1}(x)$ при $x \in I$, где q_{n-1} — алгебраический многочлен степени $n-1$. В связи с этим отметим работу [3], в которой изучаются наилучшие равномерные приближения функции $\hat{g}$ посредством функций вида $\sqrt{1-x^2} p_n(x)$, где $p_n \in \mathcal{P}_n$.

Если $g(x) = x$, то из (5) следует, что $\hat{g}(x) = \sqrt{1-x^2}$. В этом случае $E_0(g) = 1$ и $E_n(g) = 0$ при $n \geq 1$. С другой стороны, из результата С. Н. Бернштейна (см., напр., [1, п. 7.2.1]) о наилучшем приближении функции $|x|$ на I находим, что $E_n(\hat{g}) \sim c/n$ при $n \rightarrow \infty$. Этот простой пример показывает следующее. Во-первых, появление переходного показателя $\alpha = 1$ в теореме 1 связано с существом решаемой задачи и, во-вторых, оценка (3) из теоремы 2 является точной.

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2. В теории функций более известна сопряженная функция на торе $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, чем на отрезке I . Именно, сопряженная функция $\tilde{f}$ для суммируемой на $\mathbb{T}$ функции f определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} d\tau, \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

Здесь, как и в (1), сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В следующей лемме 1 устанавливается связь между сопряженными функциями $\hat{g}$ и $\tilde{f}$. При этом для $t \in \mathbb{R}$ мы полагаем $\operatorname{sign} t = 1$ при $t > 0$, -1 при $t < 0$ и 0 при $t = 0$.

Л е м м а 1. Пусть функция $g(t)$ определена на отрезке I , суммируема на нем с весом $1/\sqrt{1-t^2}$ и $f(\theta) = g(\cos \theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда почти для всех $\theta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$\hat{g}(\cos \theta) = \tilde{f}(\theta) \cdot \operatorname{sign}(\sin \theta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко осуществить с помощью замены $x = \cos \theta$ и $t = \cos \tau$ в формуле (1) для $\hat{g}(x)$.

Введем некоторые понятия и сформулируем теоремы 3–5 и лемму 2, необходимые нам для доказательства теоремы 1.

Через $C(\mathbb{T})$ обозначим банахово пространство непрерывных функций на торе $\mathbb{T}$. Для $f \in C(\mathbb{T})$ вводится стандартная норма, т. е. $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$. Через $\omega(\delta, f)$, $0 \leq \delta \leq \pi$, обозначим модуль непрерывности функции f . Именно, $\omega(\delta, f) = \sup \{|f(\theta_1) - f(\theta_2)| : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{T}, |\theta_1 - \theta_2| \leq \delta\}$. Через $\mathcal{T}_n$ обозначим множество тригонометрических полиномов степени не выше n ($n \in \mathbb{N}_0$). Для $f \in C(\mathbb{T})$ введем $\mathcal{E}_n(f) = \inf \{\|g - t_n\|_{C(\mathbb{T})} : t_n \in \mathcal{T}_n\}$ – наилучшее приближение множеством $\mathcal{T}_n$.

Т е о р е м а 3 (Д. Джексон, см. [1, п. 5.5.4]). Если $f \in C(\mathbb{T})$, то

$$\mathcal{E}_n(f) \leq 3\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Т е о р е м а 4 (С. Б. Стечкин, см. [1, п. 6.1.1]). Если $f \in C(\mathbb{T})$, то

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{8}{n} \sum_{k=0}^n \mathcal{E}_k(f), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Т е о р е м а 5 (С. Б. Стечкин, см. [1, п. 5.9.2]). Если $f \in C(\mathbb{T})$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{E}_k(f)$, то $\tilde{f} \in C(\mathbb{T})$ и

$$\mathcal{E}_n(\tilde{f}) \leq c_1 \mathcal{E}_n(f) + c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{E}_k(f), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Л е м м а 2 [4, гл. 3, § 1]. Пусть $g \in C(I)$ и $f(\theta) = g(\cos \theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда $\mathcal{E}_n(f) = E_n(g)$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $g \in C(I)$ и удовлетворяет условию (2). Положим $f(\theta) = g(\cos \theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Используя теорему 5 и лемму 2, получаем

$$\mathcal{E}_k(\tilde{f}) \leq c_1 E_k(g) + c_2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

На основании теоремы 4 отсюда находим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \tilde{f}\right) \leq \frac{c_3}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + \frac{c_4}{n} \sum_{k=0}^n \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g).$$

Меняя порядок суммирования в двойной сумме последнего неравенства, убеждаемся, что

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \tilde{f}\right) \leq \frac{c_3 + c_4}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + \frac{c_4}{n} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g). \quad (6)$$

Поскольку функция $f(\theta) = g(\cos \theta)$ четная, то $\tilde{f}(\theta)$ – нечетная и, значит, $\lambda(\theta) := \tilde{f}(\theta) \cdot \text{sign}(\sin \theta)$ – четная функция. Используя это, несложно найти, что $\omega(\delta, \lambda) \leq 2\omega(\delta, \tilde{f})$ при $0 \leq \delta \leq \pi$. Поэтому из (6) и теоремы 3 немедленно следует, что

$$\mathcal{E}_n(\lambda) \leq \frac{c_5}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + c_6 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g). \quad (7)$$

Ввиду леммы 1 имеем $\lambda(\theta) = \hat{g}(\cos \theta)$ при $\theta \in [0, \pi]$ и, согласно лемме 2, $\mathcal{E}_n(\lambda) = E_n(\hat{g})$. Поэтому из (7) вытекает утверждение теоремы 1.

Следующая теорема 6 дает неравенство типа Сегё для производных сопряженного алгебраического многочлена. Доказательство теоремы 2 основано на теореме 6, и мы его не излагаем, так как

оно проводится хорошо известным методом С. Н. Бернштейна доказательства обратных теорем теории аппроксимации.

Т е о р е м а 6. Пусть $p_n \in \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, и $s \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in (-1, 1)$ имеет место неравенство

$$|\hat{p}_n^{(s)}(x)| \leq c(s) \max \left\{ \frac{n^s}{(1-x^2)^{s/2}}, \frac{n}{(1-x^2)^{s-1/2}} \right\} \cdot \|p_n\|_{C(I)}.$$

Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие теорема 7 и лемма 3.

Т е о р е м а 7 (Г. Сегё, [1, п. 4.8.22]). Пусть $t_n \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|\tilde{t}_n^{(k)}\|_{C(\mathbb{T})} \leq n^k \|t_n\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Л е м м а 3 [5, с. 50]. Пусть функция $y = \omega(x)$ непрерывно дифференцируема s раз ($s \in \mathbb{N}$) на интервале $X \subset \mathbb{R}$, а функция $z = \varphi(y)$ непрерывно дифференцируема s раз на некотором интервале, содержащем $\omega(X)$. Тогда сложная функция $x \mapsto (\varphi \circ \omega)(x)$ непрерывно дифференцируема s раз на X и имеет место равенство

$$(\varphi \circ \omega)^{(s)} = \sum \frac{s!}{m_1! m_2! \dots m_s!} \cdot (\varphi^{(m_1+m_2+\dots+m_s)} \circ \omega) \cdot \left(\frac{\omega'}{1!}\right)^{m_1} \left(\frac{\omega''}{2!}\right)^{m_2} \dots \left(\frac{\omega^{(s)}}{s!}\right)^{m_s},$$

где суммирование распространяется по всем наборам неотрицательных целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$, удовлетворяющих условию $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + s \cdot m_s = s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6. Пусть $p_n \in \mathcal{P}_n$ и $t_n(\theta) := p_n(\cos \theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда, согласно лемме 1, $\hat{p}_n(x) = \tilde{t}_n(\arccos x)$, $x \in I$. Поскольку $\|t_n\|_{C(\mathbb{T})} = \|p_n\|_{C(I)}$, то, используя теорему 7 и лемму 3, находим

$$|\hat{p}_n^{(s)}(x)| \leq c_1(s) \left(\sum_{k=1}^s \frac{n^k}{(1-x^2)^{s-k/2}} \right) \cdot \|p_n\|_{C(I)}, \quad x \in (-1, 1).$$

При фиксированном $x \in (-1, 1)$ слагаемые в скобках монотонны относительно k , поэтому из последнего неравенства следует теорема 6.

В заключение отметим, что аналоги проблем, рассмотренных в данной работе, в монографии [6] и статье [7], изучаются для равномерных рациональных приближений функций.

Работа выполнена в соответствии с программой ГПНИ «Конвергенция», 2011–2015 гг.

Литература

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Моторный В. П. // Тр. МИ РАН. 2001. Т. 232. С. 268–285.
4. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л., 1977.
5. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М., 1965.
6. Lorentz G. G., Golitschek M. v., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin, 1996.
7. Пекарский А. А. // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 1. С. 86–102.

V. R. MISIUK, A. A. PEKARSKII

CONJUGATE FUNCTIONS ON A SEGMENT AND RELATIONS FOR THEIR BEST UNIFORM POLYNOMIAL APPROXIMATIONS

Summary

A relation between the best polynomial approximations of the function assigned on a segment and the function conjugated to it is found. In the periodic case, a similar relation is obtained by S. B. Stechkin. The inequality of G. Szegő type is also proved for the derivatives of an algebraic polynomial.