ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-169-178

Поступила в редакцию 20.12.2021
Received 20.12.2021

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ЦЕПИ В ГРАФЕ И ЕГО ТРАССИРУЕМОСТЬ

Аннотация. Известно, что существование многих классических комбинаторных структур в графе, таких как совершенные паросочетания, гамильтоновы циклы, эффективные доминирующие множества и другие, может быть охарактеризовано с помощью (κ,τ)-регулярных множеств, определение которых эквивалентно нахождению этих классических комбинаторных структур. В свою очередь, определение (κ,τ)-регулярных множеств тесно связано со свойствами главного спектра графа. Нами используются полученные ранее обобщенные свойства (κ,τ)-регулярных множеств графов для разработки алгоритма распознавания трассируемости графа. Также получены новые достаточные условия существования максимальной простой цепи в графе в терминах спектрального радиуса матрицы смежности и беззнаковой матрицы Лапласа графа.

Ключевые слова: гамильтоновость, трассируемость, матрица смежности, беззнаковая матрица Лапласа, (κ,τ)-регулярное множество, спектр, главный спектр, спектральный радиус графа

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Спектральные достаточные условия существования максимальной цепи в графе и его трассируемость / В. И Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 169–178. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-169-178

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

SPECTRAL SUFFICIENT CONDITIONS OF THE EXISTENCE OF THE LONGEST PATH IN THE GRAPH AND ITS TRACEABILITY

Abstract. It is known that the existence of many classical combinatorial structures in a graph, such as perfect matchings, Hamiltonian cycles, effective dominating sets, etc., can be characterized using (κ,τ)-regular sets, whose determination is equivalent to the determination of these classical combinatorial structures. On the other hand, the determination of (κ,τ)-regular sets is closely related to the properties of the main spectrum of a graph. We use the previously obtained generalized properties of (κ,τ)-regular sets of graphs to develop a recognition algorithm of the traceability of a graph. We also obtained new sufficient conditions for the existence of a longest simple path in a graph in terms of the spectral radius of the adjacency matrix and the signless Laplacian of the graph.

Keywords: Hamiltonicity, traceability, adjacency matrix, signless Laplace matrix, (κ,τ)-regular set, spectrum, main spectrum, spectral radius of a graph.

For citation. Benediktovich V. I. Spectral sufficient conditions of the existence of the longest path in the graph and its traceability. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 169–178 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-169-178

Пусть G – простой неориентированный связный граф порядка n и размера m с множеством вершин $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ и множеством ребер $E(G)$ ((n,m)-граф). Поскольку матрица смежности $A(G)$ графа G является симметрической, то все ее собственные значения $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$ являются действительными числами, и множество этих собственных значений, взятых вместе со своими алгебраическими кратностями, называется *спектром* графа G и обозначается через $Sp(G)$. Наибольшее собственное значение называется его *спектральным радиусом* или *индексом* графа G и обозначается через $\rho(G)=\lambda_1$. Для каждого собственного значения $\lambda_i \in Sp(G),\ i=\overline{1,n}$, обозначим соответствующее ему *собственное пространство* через $\mathcal{E}_G(\lambda_i)=\{b\in \mathbb{R}^n \mid A\cdot b=\lambda_i\cdot b\}$.

Через $G[K]$ будем обозначать граф, *порожденный* подмножеством вершин $K \subset V(G)$. Для каждой вершины $v \in V(G)$ ее *окружением* называется множество ее соседей $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. Пусть задано произвольное разбиение π множества вершин $V(G)$ графа G на непустые подмножества вершин V_i: $V(G) = \bigcup_{i=1}^{s} V_i$. *Матрицей частных* графа G относительно разбиения π называется квадратная матрица порядка s

$$A_\pi(G) = A(V_1, V_2, ..., V_s) = (b_{ij})_{s \times s},$$

где b_{ij} – среднее число соседей в множестве V_j вершин из множества V_i для $1 \le i, j \le s$, т. е.

$$b_{ij} = \frac{\sum_{v \in V_i} \left| N(v) \cap V_j \right|}{\left| V_i \right|}.$$

Более того, если для каждой пары (i, j) число соседей во множестве V_j любой вершины из множества V_i одно и то же, т. е. *порожденные* подграфы $G[V_i]$, $i = 1, \dots, s$, являются регулярными, а ребра, соединяющие два различных подмножества вершин V_i, V_j, $i \ne j$, образуют *бирегулярный* граф $G[V_i, V_j]$, то разбиение называется *равноправным*, а матрица $A_\pi(G)$ соответственно называется *матрицей частных равноправного разбиения* π.

Говорят, что спектр $\mu_1 \ge \mu_2 \ge ... \ge \mu_m$ квадратной матрицы H порядка $m < n$ *перемежает* спектр $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_n$ квадратной матрицы A, если для каждого $i = 1, ..., m$ справедливы неравенства

$$\lambda_i \ge \mu_i \ge \lambda_{i+n-m}.$$

Известно следующее

Утверждение 1 [1]. *Пусть G – произвольный граф. Тогда спектр матрицы частных $A_\pi(G)$ произвольного разбиения графа G перемежает спектр графа G. Более того, если матрица является матрицей частных равноправного разбиения π, то характеристический многочлен матрицы частных $A_\pi(G)$ делит характеристический многочлен матрицы смежности $A(G)$ графа G, причем спектральные радиусы матрицы смежности $A(G)$ и матрицы частных $A_\pi(G)$ совпадают.*

Если обозначить через j $(n \times 1)$-вектор-столбец, все компоненты которого равны 1, то все различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, каждое из которых имеет соответствующий собственный вектор, не ортогональный вектору j, называются, как и соответствующие им собственные векторы, *главными*. При этом говорят, что множество $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ образует *главный спектр* графа G. Остальные различные собственные значения $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, ..., \lambda_s$, $s \le n$, называются *неглавными*. По теореме Фробениуса – Перрона [2] любой граф G содержит главное собственное значение, равное его *индексу*.

Многочлен

$$M(G, x) =: \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i) = x^p - c_0 x^{p-1} - c_1 x^{p-2} - ... - c_{p-2} x - c_{p-1}, \quad (1)$$

корнями которого являются все главные собственные значения графа G, является целочисленным и называется *главным характеристическим многочленом* графа G.

Имеет место разложение: $\mathbb{R}^n = Main(G) \oplus \left(Main(G)\right)^\perp$, где векторное пространство $Main(G)$ натянуто на ортонормированную систему из p главных собственных векторов, относящихся к соответствующим главным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, а векторное пространство $\left(Main(G)\right)^\perp$ натянуто на ортонормированную систему из остальных $(n - p)$ собственных векторов, ортогональных j. Оба векторных пространства $Main(G)$ и $\left(Main(G)\right)^{\perp}$ являются A-инвариантными [3]. Более того, пространство $Main(G) = \langle j, Aj, A^2 j, \dots, A^{p-1} j\rangle$. Матрица $W = (j\ Aj\ A^2 j\ \dots\ A^{p-1} j)$ размера ($n \times p$) называется *матрицей маршрутов* графа G. Для нее справедливо равенство [3]

$$A^p j = W\begin{pmatrix} c_{p-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Отметим, что спектр сопутствующей матрицы

$$C =: \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

совпадает с главным спектром графа G и определяет матрицу маршрутов, т. е. матрица W является матрицей маршрутов тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AW = WC$ [3].

Реберный граф $L(G)$ графа G – это граф, вершинами которого являются ребра графа G, при этом две вершины в графе $L(G)$ смежны, если существует вершина в графе G, инцидентная соответствующим ребрам графа G.

Подмножество вершин $S \subset V(G)$ называется (κ,τ)-*регулярным*, если граф $G[S]$ является κ-регулярным графом, а для любой вершины $v \in V(G) \setminus S$ число ее соседей в S равно τ, т. е. $\left|N_G(v) \cap S\right| = \tau$.

Для множества $S \subset V(G)$ ($n \times 1$)-вектор x_S, у которого i-я компонента равна 1, если $v_i \in S$, и равна 0, если $v_i \notin S$, называется *характеристическим вектором* множества S.

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Если графы G и H не пересекаются ($V(G) \cap V(H) = \varnothing$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H.

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа G, называются *гамильтоновыми*. Граф G, содержащий гамильтонов цикл или цепь, называется соответственно *гамильтоновым* или *трассируемым*. Как известно, *задачи распознавания* гамильтоновости и трассируемости графа являются NP-полными.

Поскольку условие, что минимальная степень $\delta \geq 1$ является необходимым условием связности графа, то в дальнейшем мы будем это предполагать.

Кроме матрицы смежности мы будем рассматривать *беззнаковую матрицу Лапласа* (или *беззнаковый лапласиан*) графа G: $Q(G) = A(G) + D(G)$, где $D(G)$ – диагональная матрица, состоящая из диагональных элементов, равных степеням вершин d_v графа G. Матрица $Q(G)$ является симметрической, положительно полуопределенной матрицей, а ее наибольшее собственное значение называется *спектральным радиусом беззнакового лапласиана* и обозначается через $q(G)$.

Ранее нами было доказано утверждение о трассируемости графа [4].

Т е о р е м а 1. *Пусть G – простой связный граф на n ≥ 8 вершинах минимальной степени* $\delta \geq 1$, *отличный от графов из множества* $\{K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1), G = K_3 \vee 5K_1\}$. *Тогда если его спектральный радиус* $\rho(G) \geq n-3$, *то граф G трассируем.*

Данное утверждение мы обобщим в виде достаточного спектрального условия существования цепи наибольшей длины в заданном графе. Для этого мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из результатов статьи [5].

У т в е р ж д е н и е 2. 1) *Пусть G – простой связный граф на* $n \geq \frac{5k}{2}$ *вершинах минимальной степени* $\delta \geq 1$ *и размера* $e(G) > nk - \frac{k(k+1)}{2}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k+1$.

2) *Пусть G – простой связный граф на* $n < \frac{5k}{2}$ *вершинах минимальной степени* $\delta \geq 1$ *и размера* $e(G) > n + 2k^2 - 3k$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k+1$.

3) *Пусть G – простой связный граф на* $n \geq \frac{5k-1}{2}$ *вершинах минимальной степени* $\delta \geq 1$ *и размера* $e(G) > n(k-1) - \frac{k(k-1)}{2} + 1$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k$.

4) *Пусть G – простой связный граф на* $n < \frac{5k-1}{2}$ *вершинах минимальной степени* $\delta \geq 1$ *и размера* $e(G) > n + 2k^2 - 5k + 2$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k$.

Нам понадобятся еще некоторые факты для связных графов.

У т в е р ж д е н и е 3 [6]. *Пусть G – граф порядка n и размера e(G). Если минимальная степень удовлетворяет неравенству* $\delta(G) \geq k \geq 1$, *то справедливо неравенство*

$$\rho(G) \leq \frac{k-1+\sqrt{(k+1)^2 + 4\big(2e(G) - kn\big)}}{2}. \tag{4}$$

У т в е р ж д е н и е 4 [7]. *Пусть G – произвольный граф порядка n. Тогда справедливо неравенство*

$$q(G) \leq \frac{2e(G)}{n-1} + n - 2. \tag{5}$$

Из этих утверждений вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. 1) *Пусть G – простой связный граф на* $n \geq \frac{5k}{2}$ *вершинах, спектральный радиус которого* $\rho(G) > \sqrt{(2k-1)n - k(k+1) + 1}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k+1$.

Пусть G – простой связный граф на $n \geq \frac{5k}{2}$ *вершинах, спектральный радиус беззнакового лапласиана которого* $q(G) > n - 2 + \frac{k\big(2n-(k+1)\big)}{n-1}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k+1$.

2) *Пусть G – простой связный граф на* $n < \frac{5k}{2}$ *вершинах, спектральный радиус которого* $\rho(G) > \sqrt{n + 4k^2 - 6k + 1}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k+1$.

Пусть G – простой связный граф на $n < \frac{5k}{2}$ *вершинах, спектральный радиус беззнакового лапласиана которого* $q(G) > n - 2 + \frac{2n + 4k^2 - 6k}{n-1}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k + 1$.

3) *Пусть G – простой связный граф на* $n \geq \frac{5k-1}{2}$ *вершинах, спектральный радиус которого* $\rho(G) > \sqrt{(2k-3)n - k(k-1)+3}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k$.

Пусть G – простой связный граф на $n \geq \frac{5k-1}{2}$ *вершинах, спектральный радиус беззнакового лапласиана которого* $q(G) > n - 2 + \frac{(k-1)(2n-k)+2}{n-1}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k$.

4) *Пусть G – простой связный граф на* $n < \frac{5k-1}{2}$ *вершинах, спектральный радиус которого* $\rho(G) > \sqrt{n + 4k^2 - 10k + 5}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k$.

Пусть G – простой связный граф на $n < \frac{5k-1}{2}$ *вершинах, спектральный радиус беззнакового лапласиана которого* $q(G) > n - 2 + \frac{2n + 4k^2 - 10k + 4}{n-1}$. *Тогда в графе G существует простая цепь длины* $l \geq 2k$.

Докажем, например, первое утверждение теоремы. Действительно, в силу неравенства (4) и условия теоремы имеем

$$\sqrt{(2k-1)n - k(k+1)+1} < \frac{\sqrt{4 + 4\left(2e(G) - n\right)}}{2},$$

откуда получаем

$$e(G) > nk - \frac{k(k+1)}{2}.$$

В силу неравенства (5) и условия теоремы имеем

$$n - 2 + \frac{k\left(2n - (k+1)\right)}{n-1} < q(G) \leq \frac{2e(G)}{n-1} + n - 2,$$

откуда тоже получаем

$$e(G) > nk - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Поэтому в силу утверждения 2.1) граф G содержит простую цепь длины $l \geq 2k + 1$.

Остальные три утверждения теоремы 2 доказываются аналогично.

Далее мы представим алгоритм распознавания трассируемости графа, основываясь на понятии (κ,τ)-регулярного множества.

Для этого нам понадобятся следующие утверждения.

Утверждение 5 [3]. *Если* x_S *характеристический вектор* (κ,τ)-*регулярного множества S графа G с матрицей смежности A = A(G), то справедливо равенство*

$$\left(A - (\kappa - \tau)E\right)x_S = \tau j. \tag{6}$$

Верно и обратное утверждение: *всякое* (0,1)-*решение системы* (6) *определяет некоторое* (κ,τ)-*регулярное множество S графа G* [8].

Утверждение 6 [8]. *Граф* $G \neq K_2$ *гамильтонов тогда и только тогда, когда его реберный граф L(G) содержит* (2,4)-*регулярного множества S, индуцирующего связный подграф.*

Утверждение 7 [8]. *Пусть G – граф с* (κ,τ)-*регулярным множеством* $S \subset V(G)$ *и* g – *частное решение линейной системы уравнений*

$$\left(A-(\kappa-\tau)E\right)x=\tau j,$$

кроме того, $(\kappa-\tau)$ *является собственным значением кратности t. Тогда характеристический вектор* x_S *множества S определяется равенством*

$$x_S = g + \sum_{j=1}^{t} \delta_{i_j} q_j,$$

где $\delta_{i_j} \in \{-g_{i_j}, 1-g_{i_j}\}$, $j=\overline{1,t}$, *а векторы* $\langle q_1, q_2, \ldots, q_t\rangle = \mathcal{E}_G(\kappa-\tau)$, *причем матрица* $V=(q_1\ q_2 \ldots q_t)$, *столбцы которой составлены из этих векторов, содержит единичную матрицу порядка t, стоящую в строках с номерами из множества индексов* $I=\{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$.

Ранее нами была доказана справедливость следующих утверждений [9].

Теорема 3 [9]. *Пусть граф G с матрицей смежности A имеет* (κ,τ)-*регулярное множество S, тогда для его характеристического вектора* x_S *имеет место разложение*

$$x_S = g + q, \tag{7}$$

где $g=\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i A^i j$ *и* $q \in \left(Main(G)\right)^{\perp}$, причем

$$Aq=(\kappa-\tau)q;$$

$$\alpha_{p-1}c_{p-1}-\alpha_0(\kappa-\tau)=\tau,\ \ \alpha_i-\alpha_{i+1}(\kappa-\tau)+\alpha_{p-1}c_{p-2-i}=0,\ i=\overline{0,p-2}. \tag{8}$$

Решая систему уравнений (6), нетрудно получить, в частности, равенство

$$-\tau=\alpha_{p-1}M\left(G,(\kappa-\tau)\right).$$

Теорема 4 [9]. *Если граф G с матрицей смежности A имеет* (κ,τ)-*регулярное множество S, где* $\tau>0$, *тогда* $(\kappa-\tau)$ *не может быть его главным собственным значением.*

Более того, можно получить явный вид главного собственного значения:

$$\lambda=\tau\frac{u^T x_{\overline{S}}}{u^T x_S}+\kappa=\tau\frac{u^T j}{u^T x_S}+(\kappa-\tau),$$

где u – главный собственный вектор, относящийся к главному собственному значению λ матрицы смежности A.

Кроме решения системы уравнений (8), разложение вектора g в равенстве (7) по базису $\{j, Aj, \ldots, A^{p-1}j\}$ главного пространства $Main(G)$ можно найти в матричном виде.

При доказательстве теоремы 3 показывается, что если граф G имеет (κ,τ)-регулярное множество, то справедливы два равенства:

i $\left(A-(\kappa-\tau)E\right)g=\tau j;$

ii $(A-(\kappa-\tau)E)q=0.$

Будем различать два случая: 1) $(\kappa-\tau)\notin Sp(G)$; 2) $(\kappa-\tau)\in Sp(G)$.

В случае 1) из *ii* следует, что $q = 0$, а значит, $x_S = g$. Поэтому в силу невырожденности матрицы $\left(A-(\kappa-\tau)E\right)$ из *i* следует $g=x_S=\tau\left(A-(\kappa-\tau)E\right)^{-1}j$, т. е. x_S является *единственным* решением системы $\left(A-(\kappa-\tau)E\right)x=\tau j$.

В случае 2) рассмотрим линейное преобразование главного пространства $Main(G)$:

$$\varphi: Main(G)\to Main(G),$$
$$x\mapsto((\kappa-\tau)E-A)x,$$

матрица которого в базисе $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$, как нетрудно видеть, равна $M_\varphi = (\kappa - \tau)E - C$, где C – сопутствующая матрица (3). Поэтому матрица M_φ вырождена тогда и только тогда, когда $(\kappa - \tau)$ – собственное значение матрицы C, что равносильно, $(\kappa - \tau)$ – главное собственное значение графа G. Поэтому в силу теоремы 4 и существования (κ,τ)-регулярного множества в графе G матрица M_φ обратима при $\tau > 0$.

Равенство i в базисе $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$ эквивалентно равенству

$$M_\varphi \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \end{pmatrix} = -\tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\tau e_1.$$

Откуда получаем

$$g = W \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \end{pmatrix} = -\tau W M_\varphi^{-1} e_1.$$

Заметим, что $\det M_\varphi = \det\big((\kappa - \tau)E - C\big) = M\big(G, (\kappa - \tau)\big)$, поэтому $M_\varphi^{-1} = \dfrac{1}{M\big(G, (\kappa - \tau)\big)} M_\varphi^*$, где M_φ^* – *присоединенная матрица* для матрицы M_φ. Поэтому, чтобы вычислить произведение $M_\varphi^{-1} e_1$, достаточно найти только алгебраические дополнения для элементов первой строки матрицы M_φ. Нетрудно убедиться индукцией по p, что

$$M_\varphi^* e_1 = \begin{pmatrix} (\kappa - \tau)^{p-1} - c_0(\kappa - \tau)^{p-2} - \ldots - c_{p-2} \\ (\kappa - \tau)^{p-2} - c_0(\kappa - \tau)^{p-3} - \ldots - c_{p-3} \\ \vdots \\ (\kappa - \tau) - c_0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \overline{\alpha}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$g = -\frac{\tau}{M\big(G, (\kappa - \tau)\big)} W \overline{\alpha},$$

где вектор $g_1 =: W\overline{\alpha}$ называется *дискриминирующим*.

Отсюда получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 5 [9]. *Для дискриминирующего вектора g_1 произвольного графа G с матрицей смежности A справедливо равенство $\big(A - (\kappa - \tau)E\big) g_1 = 0$ тогда и только тогда, когда* $(\kappa - \tau)$ *является его главным собственным значением.*

Нам понадобится также следующее утверждение.

Лемма [7]. *Пусть G – простой граф. Тогда G трассируем тогда и только тогда, когда граф $G_1 = G \vee K_1$ гамильтонов.*

Пусть теперь $B = (b_{ij})_{n\times m}$, где $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j, \end{cases}$ – матрица инцидентности графа G. Тогда матрица инцидентности графа $G \vee K_1$ имеет вид: $B_1 = \begin{pmatrix} B & I_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где

0, 1 – строки размерности m и n соответственно. Следовательно, матрица смежности реберного графа $A\big(L(G_1)\big)$ равна

$$A\big(L(G_1)\big) = B_1^T B_1 - 2E_{m+n} = \begin{pmatrix} B^T B & B^T \\ B & E_n + J \end{pmatrix} - 2E_{m+n} = \begin{pmatrix} A\big(L(G)\big) & B^T \\ B & J - E_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где все элементы квадратной матрицы J порядка n равны единице. Поэтому к графу G_1 можно применить алгоритм распознавания гамильтоновости.

Заметим, что если исходный граф G является (n,m)-графом, то граф $G_1 = G \vee K_1$ является не двудольным $(n + 1,\ m + n)$-графом, а граф $L(G_1)$ является $\left(n+m, \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + m + \dfrac{1}{2}n(n-1)\right)$-графом, где $d_i = \deg_G(v_i),\ i = \overline{1,n}.$

В результате мы получаем следующий алгоритм.

***Алгоритм распознавания трассируемости графа*.**

Вход: матрица инцидентности $B = (b_{ij})_{n\times m}$ графа G порядка n и размера m.

Выход: ответ: содержит ли граф G гамильтоновую цепь или нет; если граф G содержит гамильтоновую цепь, она выдается.

Шаг 1. Найти матрицу смежности $A = A\big(L(G_1)\big)$ реберного графа $L(G_1)$ графа $G_1 = G \vee K_1$ по формуле (9), где $B = (b_{ij})_{n\times m}$ – матрица инцидентности графа G, а также найти наименьшее натуральное число $p \geq 2$, при котором векторы $j, Aj, ..., A^{p-1}j, A^p j$ являются линейно зависимыми.

Шаг 2. Найти коэффициенты $1, c_0, c_1, ..., c_{p-2}, c_{p-1}$ характеристического многочлена $M\big(L(G_1), x\big) =: \prod_{i=1}^{p}(x - \lambda_i) = x^p - c_0 x^{p-1} - c_1 x^{p-2} - ... - c_{p-2}x - c_{p-1}$ графа $L(G_1)$ из решения однородной системы уравнений $W_{p+1}x = 0,$ где матрица W_{p+1} размера $n \times (p+1)$ получается из матрицы маршрутов $W = (j\ \ Aj\ \ A^2 j\ \dots\ A^{p-1} j)$ добавлением еще одного столбца $A^p j$.

Шаг 3. Вычислить дискриминирующий вектор $g_1 =: W\overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} (-2)^{p-1} - c_0(-2)^{p-2} - ... - c_{p-2} \\ (-2)^{p-2} - c_0(-2)^{p-3} - ... - c_{p-3} \\ \vdots \\ (-2) - c_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Шаг 4. Если $(A + 2E)g_1 = 0,$ то по теореме 5 число (–2) является главным собственным значением реберного графа $L(G_1)$, а значит, в силу утверждения 6 и теоремы 4 граф G_1 не содержит гамильтонов цикл, а граф G не трассируем.

Если $(A + 2E)g_1 \neq 0,$ то возможны 2 случая: 1) (–2) не является собственным значением реберного графа $L(G_1)$; 2) (–2) является собственным значением реберного графа $L(G_1)$ кратности t.

В случае 1) проверить, является ли вектор $g = \dfrac{2}{M\big(L(G_1), (-2)\big)} g_1$ (0,1)-вектором с n ненулевыми компонентами: если да, то граф G_1 содержит гамильтонов цикл и (0,1)-вектор g – характеристический вектор гамильтонова цикла, иначе – не содержит гамильтонов цикл, а граф G не трассируем.

В случае 2) перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Решить методом Гаусса систему уравнений $(A + 2E)x = 0$ и найти фундаментальную систему решений $q_1, q_2, ..., q_t,$ соответствующих наборам $e_1, e_2, ..., e_t,$ которые принимают свободные неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_t}$ с индексами из некоторого множества $I = \{i_1, i_2, ..., i_t\},$ где $t = \dim\ker(A + 2E)$ – дефект матрицы $(A + 2E)$. Положить множество $\Lambda =: \Big\{(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t}) \,|\, \delta_{i_j} \in \{-g_{i_j}, 1 - g_{i_j}\}, i_j \in I\Big\}$ и для каждого набора $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t})$ из множества Λ проверить, является ли вектор $g + \sum_{j=1}^{t} \delta_{i_j} q_j$ (0,1)-вектором с n ненулевыми компонентами: если существует такой набор $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t})$, то граф G_1 содержит гамильтонов цикл, и (0,1)-вектор g – характеристический вектор этого гамильтонова цикла, иначе – не содержит гамильтонов цикл, а значит, граф G не трассируем.

Конец алгоритма.

Оценим вычислительную сложность предложенного алгоритма. Шаг 1 включает умножение матриц и поэтому требует $O\left((m+n)^4\right)$ времени. На шаге 2 можно применить метод исключения Гаусса, и поэтому он требует $O\left((m+n)^3\right)$ времени. На шаге 3 выполняется алгоритм умножения матриц, на которое затрачивается $O\left((m+n)^2\right)$ времени. Такое же время будет затрачено на выполнение шага 4. Шаг 5 требует в общем случае экспоненциальное время $O\left(2^t(m+n)^3\right)$, где t – кратность собственного значения (–2). Известно [10], что кратность $m\left(-2, L(G_1)\right)$ собственного значения (–2) графа $L(G_1)$ в нашем случае равна

$$t = m\left(-2, L(G_1)\right) = m + n - (n+1) = m - 1.$$

Благодарности. Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция 2025» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф20УКА–005).

Acknowledgements. This work was funded by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Republic of Belarus within the framework of “Convergence” State Program for Fundamental Research and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф20УКА–005).

Список использованных источников

1. Cvetković, D. An Introduction to the Theory of Graph Spectra / D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić. – Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9780511801518

2. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.

3. Sciriha, I. Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian graphs / I. Sciriha, D. M. Cardoso // J. Combin. Math. Comb. Comput. – 2012. – Vol. 80. – P. 127–150.

4. Бенедиктович, В. И. Собственные значения, трассируемость и совершенное паросочетание графа / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 274–285. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-274-285

5. Копылов, Г. Н. О максимальных путях и циклах в графе / Г. Н. Копылов // Докл. Акад. наук СССР. – 1977. – Т. 234, № 1. – С. 19–21.

6. Hong, Y. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Y. Hong, J. Shu, K. Fang // J. Comb. Theory. Ser. B. – 2001. – Vol. 81, № 2. – P. 177–183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997

7. Bondy, J. A. Graph Theory / J. A. Bondy, U. S. R. Murty. – New York: Springer, 2008. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

8. Cardoso, D. M. An overview of (κ,τ)-regular sets and their applications / D. M. Cardoso // Discrete Appl. Math. – 2019. – Vol. 269. – P. 2–10. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.12.020

9. Бенедиктович, В. И. Главные собственные значения графа и его гамильтоновость / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 398–407. https://doi. org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-398-407

10. Cvetković, D. Spectral generalizations of line graphs / D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić // London Mathematical Society Lecture Note Series. – Cambridge University Press, 2004. – Vol. 314. https://doi.org/10.1017/cbo9780511751752

References

1. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9780511801518

2. Gantmacher F. R. *The Theory of Matrices*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 560 p. (in Russian).

3. Sciriha I., Cardoso D. M. Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 2012, vol. 80, pp. 127–150.

4. Benediktovich V. I. Eigenvalues, traceability, and perfect matching of a graph. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 274–285 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-274-285

5. Kopylov G. N. Maximal paths and cycles in a graph. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1977, vol. 234, no. 1, pp. 19–21 (in Russian).

6. Hong Y., Shu J., Fang K. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B,* 2001, vol. 81, no. 2, pp. 177–183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997

7. Bondy J. A., Murty U. S. R. *Graph Theory*. New York, Springer, 2008. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

8. Cardoso D. M. An overview of (κ,τ)-regular sets and their applications. *Discrete Applied Mathematics*, 2019, vol. 269, pp. 2–10. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.12.020

9. Benediktovich V. I. Main eigenvalues of a graph and its Hamiltonicity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 398–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-398-407

10. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S. Spectral generalizations of line graphs. *London Mathematical Society Lecture Note Series. Vol. 314*. Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/cbo9780511751752

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by