ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.8
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-179-189

Поступила в редакцию 25.02.2022
Received 25.02.2022

В. А. Емеличев, С. Е. Бухтояров

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Аннотация. Рассматривается многокритериальная задача целочисленного линейного программирования с параметрическим принципом оптимальности. Параметризация реализована путем разбиения множества критериев на несколько упорядоченных по важности непересекающихся групп (подмножеств) критериев с доминированием по Парето в пределах каждой группы. Введенный параметрический принцип оптимальности позволил связать такие классические принципы оптимальности, как лексикографический и паретовский. Для радиуса устойчивости, который является предельным уровнем возмущений параметров задачи, не приводящих к появлению новых оптимальных решений, получены верхняя и нижняя оценки в случае произвольных норм Гёльдера в критериальном пространстве и пространстве решений. Некоторые ранее известные результаты по устойчивости булевой задачи линейного программирования сформулированы в качестве следствий.

Ключевые слова: многокритериальная задача, задача целочисленного линейного программирования, параметрический принцип оптимальности, лексикографический принцип оптимальности, оптимальность по Парето, радиус устойчивости, норма Гёльдера

Для цитирования. Емеличев, В. А. Мера устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования с параметрическим принципом оптимальности / В. А. Емеличев, С. Е. Бухтояров // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 179–189. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-179-189

Vladimir A. Emelichev, Sergey E. Bukhtoyarov

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

STABILITY MEASURE OF MULTICRITERIA INTEGER LINEAR PROGRAMMING PROBLEM WITH A PARAMETRIC OPTIMALITY PRINCIPLE

Abstract. In this paper, we consider a multicriteria integer linear programming problem with a parametric principle of optimality. Parameterization is realized by dividing the set of criteria into several disjoint groups (subsets) of criteria ordered by importance, with Pareto dominance within each group. The introduced parametric principle of optimality made it possible to connect such classical principles of optimality as lexicographic and Pareto ones. For the stability radius, which is the limiting level of perturbations of the parameters of the problem, not causing the appearance of new optimal solutions, the upper and lower estimations are obtained in the case of arbitrary Hölder's norms in the criterion space and solution space. Some previously known results on the stability of the Boolean linear programming problem are formulated as corollaries.

Keywords: multicriteria problem, integer linear programming problem, parametric principle of optimality, lexicographic principle of optimality, Pareto optimality, stability radius, Hölder's norm

For citation. Emelichev V. A., Bukhtoyarov S. E. Stability measure of multicriteria integer linear programming problem with a parametric optimality principle. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 179–189 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-179-189

Введение. При решении практических задач оптимизации необходимо учитывать различные виды неопределенности, связанные с ограниченной информацией о входных данных, с не полным соответствием математических моделей реальным процессам, округлениями и ошибками в расчетах и т. д. Поэтому исходные данные оптимизационной задачи определяются с определенной погрешностью и, как правило, зависят от многих параметров и могут уточняться в процессе решения. Основной вопрос, который при этом возникает: в каких пределах можно варьировать (возмущать) исходные данные задачи, чтобы множество оптимальных решений обладало некоторым свойством инвариантности. Такая постановка вопроса и порождает проблему устойчивости задачи, признание которой как одной из центральных в математических исследованиях восходит к Ж. Адамару [1]: он включил условие устойчивости в понятие корректной математической задачи наравне с условиями существования и единственности решения.

Применительно к задачам дискретной оптимизации с множеством решений представляется важным выделить классы так называемых устойчивых задач, в которых небольшие изменения входных данных приводят к небольшим изменениям результата. К настоящему времени сформировались два основных подхода к исследованию устойчивости задач дискретной оптимизации с неопределенностью: качественный и количественный.

В рамках качественного подхода формулируются необходимые и достаточные условия различных типов устойчивости одного решения или множества решений рассматриваемой проблемы [2–6].

В рамках количественного подхода основные усилия направлены на определение такого диапазона возмущений для входных данных, чтобы множество эффективных (оптимальных) решений обладало некоторым свойством инвариантности. Распространенной количественной мерой предельного уровня таких возмущений исходных данных является радиус (различных типов) устойчивости, для которого найдены формулы или (достижимые) нижние и верхние оценки для случаев разнообразных метрических норм в критериальном пространстве и пространстве параметров [7–14]. Анализ чувствительности также проводится для различных задач теории расписаний [15, 16].

Данная работа развивает количественный подход применительно к многокритериальной задаче целочисленного линейного программирования. Первые результаты в этом направлении были получены в [17] и позже развиты, например, в [10, 11, 13, 18–23] для разнообразных принципов оптимальности, в том числе и параметрических, и для случаев различных норм в критериальном пространстве и пространстве решений.

В настоящей работе мы находим верхнюю и нижнюю границы радиуса устойчивости задачи целочисленного линейного программирования с параметрическим принципом оптимальности. Параметризация реализована путем разбиения множества критериев на несколько упорядоченных по важности непересекающихся групп (подмножеств) критериев с доминированием по Парето в пределах каждой группы. Частными случаями введенного параметрического принципа являются лексикографический принцип и принцип оптимальность по Парето.

Постановка задачи и основные определения. Рассмотрим m-критериальную задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с n переменными

$$Cx = (C_1x, C_2x, \ldots, C_mx)^T \to \min_{x\in X},$$

где $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $n, m \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, C_i – i-я строка матрицы C, $i \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, X – множество решений в $\mathbf{Z}^n$, причем $1 < |X| < \infty$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

Для этой задачи введем параметрический принцип оптимальности лексикографического порядка.

Пусть $s \in N_m$, $I = (I_1, I_2, \ldots, I_s)$ – разбиение множества N_m на s непустых непересекающихся подмножеств (групп), т. е.

$$N_m = \bigcup_{k\in N_s} I_k,$$

где

$$I_k \neq \varnothing, \quad k \in N_s; \quad i \neq j \Rightarrow I_i \cap I_j = \varnothing;$$

$$I_1 = \{1, 2, \ldots, t_1\},$$

$$I_2 = \{t_1 + 1, t_1 + 2, \ldots, t_2\},$$

$$\ldots$$

$$I_s = \{t_{s-1}+1, t_{s-1}+2, ..., m\}.$$

Каждому такому разбиению I на s групп в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ поставим в соответствие бинарное отношение лексикографического порядка $\Omega^{m,s}$ между различными векторами $y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$ и $y' = (y_1', y_2', ..., y_m')^T$, полагая

$$y\,\Omega^{m,s}\,y' \;\Leftrightarrow\; y_{I_k} \succ y'_{I_k},$$

где $k = \min\left\{i \in N_s : y_{I_i} \neq y'_{I_i}\right\}$; y_{I_i} и y'_{I_i} – проекции соответственно векторов y и y' на координатные оси пространства $\mathbf{R}^m$ с номерами группы I_k; $\succ$ – отношение, порождающее в пространстве $\mathbf{R}^{|I_k|}$ принцип оптимальности по Парето [24]:

$$y_{I_k} \succ y'_{I_k} \;\Leftrightarrow\; y_{I_k} \neq y'_{I_k} \quad \& \quad y_{I_k} \geq y'_{I_k}.$$

Введенное бинарное отношение $\Omega^{m,s}$ задает принцип упорядоченности сформированных s групп критериев по важности, при этом внутри каждой группы задается паретовский принцип оптимальности. В результате это отношение порождает лексикографическое множество или, иначе, множество I-эффективных решений

$$G^{m,s}(C) = \left\{x \in X \,:\, \forall x' \in X \;\; (Cx\,\overline{\Omega^{m,s}}\,Cx')\right\},$$

где $\overline{\Omega^{m,s}}$, как обычно, означает отрицание отношения $\Omega^{m,s}$. Задачу ЦЛП, состоящую в поиске множества $G^{m,s}(C)$, будем обозначать через $Z^{m,s}(C)$, а задачу с булевыми переменными, т. е. при $X \subseteq \mathbf{E}^n$, через $Z_B^{m,s}(C)$.

Множество $G^{m,s}(C)$ также можно задать в следующем виде:

$$G^{m,s}(C) = \left\{x \in X \,:\, X(x, C) = \varnothing\right\},$$

где

$$X(x, C) = \{x' \in X \,:\, Cx\,\Omega^{m,s}\,Cx'\}.$$

Очевидно, что множество $G^{m,1}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, где $I = (N_m)$, есть множество Парето, т. е.

$$G^{m,1}(C) = P(C) = \left\{x \in X : \forall x' \in X \;\; (Cx \overline{\succ} Cx')\right\}.$$

В частности, если $m = 1$, то очевидно, что

$$P(C) = \text{Arg}\min\left\{Cx : x \in X\right\}.$$

Также очевидно, что множество $G^{m,m}(C)$, где $I = (\{1\}, \{2\}, ..., \{m\})$, совпадает с множеством лексикографически оптимальных решений

$$G^{m,m}(C) = L(C) = \left\{x \in X : \forall x' \in X \;\; (Cx \overline{\rhd} Cx')\right\},$$

где $\rhd$ – лексикографический порядок в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$, задаваемый формулой

$$y \rhd y \;\Leftrightarrow\; y_k > y_k',$$

где $y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$, $y' = (y_1', y_2', ..., y_m')^T$, $k = \min\{i \in N_m : y_i \neq y'_{.i}\}$.

Таким образом, в данном контексте под параметризацией принципа оптимальности понимается введение такой характеристики бинарного отношения предпочтения решений, которая в частных случаях порождает такие широко известные принципы оптимальности, как паретовский и лексикографический.

Нетрудно понять, что введенное бинарное отношение $\Omega^{m,s}$ антирефлексивно, асимметрично, транзитивно, а следовательно, и ациклично. Поэтому в силу конечности множества X множество $G^{m,s}(C)$ не пусто при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ и при всяком разбиении I множества N_m на s групп, $s \in N_m$. Более того, с учетом конечности и дискретности множества X, множество $G^{m,s}(C)$ внешне устойчиво [24], т. е. для любого $x \notin G^{m,s}(C)$ существует $x' \in G^{m,s}(C) \cap X(x,C)$.

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ зададим произвольную метрику Гёльдера l_p, $p \in [1,\infty]$, т. е. под нормой вектора $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T \in \mathbf{R}^n$ понимаем число

$$\| a \|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j \in N_n} | a_j |^p \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty, \\ \max\{| a_j | : j \in N_n\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ зададим произвольную метрику Гёльдера l_q, $q \in [1,\infty]$, и $l_p \ne l_q$. Под нормой $\| C \|_{pq}$ матрицы $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ со строками C_i, $i \in N_m$, мы понимаем норму вектора, составленного из норм строк матрицы, т. е.

$$\| C \|_{pq} = \left\| (\| C_1 \|_p, \| C_2 \|_p, ..., \| C_m \|_p) \right\|_q .$$

Очевидно, что

$$\| C_i \|_p \le \| C_I \|_{pq} \le \| C \|_{pq}, \quad i \in I \subseteq N_m. \tag{1}$$

Легко видеть, что для любого вектора $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T \in \mathbf{R}^n$ такого, что

$$| a_j | = \alpha, \; j \in N_n,$$

при любом $p \in [1,\infty]$ выполняется равенство

$$\| a \|_p = \alpha n^{1/p}. \tag{2}$$

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ наряду с нормой l_p, $p \in [1,\infty]$, будем использовать сопряженную норму l_{p^*}, где числа p и p^* связаны равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1,$$

полагая $p^* = 1$ при $p = \infty$ и $p^* = \infty$ при $p = 1$. Таким образом, в последующем считаем, что областью изменений чисел p и q является отрезок $[1,\infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями.

Далее будем использовать неравенство Гёльдера

$$| a^T b | \le \| a \|_p \| b \|_{p^*}, \tag{3}$$

справедливое для любых векторов $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T \in \mathbf{R}^n$ и любого $p \in [1,\infty]$.

Возмущения элементов матрицы C будем осуществлять путем сложения ее с матрицей $C' \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Это означает, что возмущенная задача $Z^{m,s}(C + C')$ имеет вид

$$(C + C')x \to \min_{x \in X},$$

а множество ее I-эффективных решений – $G^{m,s}(C + C')$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зададим множество возмущающих матриц

$$\Xi_{pq}(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m\times n} : \| C' \|_{pq} < \varepsilon\}$$

со строками C'_i, $i \in N_m$.

Следуя [17, 25], радиусом устойчивости задачи $Z^{m,s}(C)$ (в терминологии [3–5] – радиусом T_3-устойчивости) назовем число

$$\rho = \rho^{m,s}(p,q) = \begin{cases} \sup \Upsilon, & \text{если } \Upsilon \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Upsilon = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Upsilon = \left\{ \varepsilon > 0 : \ \forall C' \in \Xi_{pq}(\varepsilon) \ \left(G^{m,s}(C + C') \subseteq G^{m,s}(C) \right) \right\}.$$

Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^{m,s}(C)$ определяет предельный уровень всех тех возмущений элементов матрицы C, которые не приводят к появлению новых I-эффективных решений в возмущенной задаче $Z^{m,s}(C + C')$. Очевидно, что если в задаче $Z^{m,s}(C)$ $G^{m,s}(C) = X$, то для любых $C' \in \Xi_{pq}(\varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$ имеем $G^{m,s}(C + C') \subseteq G^{m,s}(C)$, т. е. радиус устойчивости такой задачи $Z^{m,s}(C)$ равен бесконечности. Задачу $Z^{m,s}(C)$, в которой $G^{m,s}(C) \neq X$, будем называть нетривиальной.

Оценки радиуса устойчивости. Далее положим

$$G^{m,s}(x, C) = G^{m,s}(C) \cap X(x, C),$$

$$\varphi = \varphi^{m,s}(p) = \min_{x \notin G^{m,s}(C)} \ \max_{x' \in G^{m,s}(x,C)} \ \min_{i \in I_1} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|_{p*}},$$

$$\psi = \psi^{m,s}(p,q) = n^{1/p} \, | I_1 |^{1/q} \, \varphi^{m,s}(\infty) = n^{1/p} \, | I_1 |^{1/q} \min_{x \notin G^{m,s}(C)} \ \max_{x' \in G^{m,s}(x,C)} \ \min_{i \in I_1} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|_1},$$

$$\gamma = \gamma(p,q) = \| C \|_{pq} \, .$$

Очевидно, что $\varphi, \psi \geq 0$.

Т е о р е м а. *При любых* $m \in \mathbf{N}$, $p, q \in [1, \infty]$ *и* $s \in N_m$ *для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной задачи* ЦЛП $Z^{m,s}(C)$ *справедливы оценки*

$$\varphi \leq \rho^{m,s}(p,q) \leq \gamma, \tag{4}$$

причем

$$\varphi \leq \rho^{m,s}(p,q) \leq \min\{\psi, \gamma\}, \tag{5}$$

если $Z^{m,s}(C) = Z_B^{m,s}(C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем справедливость неравенств (4) для задачи ЦЛП $Z^{m,s}(C)$.

Покажем, что $\rho \geq \varphi$. Будем предполагать, что $\varphi > 0$, в противном случае неравенство очевидно.

Пусть $C' \in \Xi_{pq}(\varphi)$ – возмущающая матрица со строками $C'_i, i \in N_m$. Тогда, согласно определению числа φ, для любого решения $x \notin G^{m,s}(C)$ существует такое $x^0 \in G^{m,s}(x, C)$, что с учетом (1) выполняется

$$\frac{C_i(x - x^0)}{\| x - x^0 \|_{p*}} \geq \varphi > \| C' \|_{pq} \geq \| C'_i \|_p, \quad i \in I_1.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера (3), выводим

$$(C_i + C'_i)(x - x^0) \geq C_i(x - x^0) - \| C'_i \|_p \| x - x^0 \|_{p*} > 0, \quad i \in I_1.$$

Это значит, что $(C_{I_1} + C'_{I_1})x \succ (C_{I_1} + C'_{I_1})x^0$, т. е. $(C + C')x \, \Omega^{m,s} (C + C')x^0$. Тем самым, $x \notin G^{m,s}(C + C')$.

Резюмируя, заключаем, что любое решение задачи $Z^{m,s}(C)$, не являющееся I-эффективным, остается таковым и в возмущенной задаче $Z^{m,s}(C+C')$. Следовательно, $G^{m,s}(C+C')\subseteq G^{m,s}(C)$ при любой возмущающей матрице $C'\in\Xi_{pq}(\varphi)$, т. е. $\rho\geq\varphi$.

Неравенство $\rho\leq\gamma$ очевидно. Действительно, если в качестве возмущающей матрицы C' взять матрицу $-C$, то получим (с учетом нетривиальности задачи $Z^{m,s}(C)$)

$$G^{m,s}(C+C')=G^{m,s}(C-C)=X\not\subseteq G^{m,s}(C).$$

Перейдем к доказательству неравенств (5) для булевой задачи $Z_B^{m,s}(C)$. Так как неравенства (4) верны и для $Z_B^{m,s}(C)$, то остается показать, что $\rho\leq\psi$.

Согласно определению числа ψ, справедлива формула

$$\exists x^0\notin G^{m,s}(C)\ \ \forall x\in G^{m,s}(x^0,C)\ \ \exists u\in I_1\ \ \left(n^{1/p}\,|I_1|^{1/q}\,C_u(x^0-x)\leq\psi\,\|x^0-x\|_1\right). \tag{6}$$

Теперь, полагая $\varepsilon>\psi$, рассмотрим возмущающую матрицу $C^0=[c_{ij}^0]$ со строками $C_i^0,\ i\in N_m$, элементы которой для любого $j\in N_n$ задаются по формуле

$$c_{ij}^0=\begin{cases}-\delta, & \text{если } i\in I_1,\ x_j^0=1,\\ \delta, & \text{если } i\in I_1,\ x_j^0=0,\\ 0, & \text{если } i\notin I_1,\end{cases}$$

где

$$\psi<\delta n^{1/p}\,|I_1|^{1/q}<\varepsilon. \tag{7}$$

Отсюда, согласно (2), находим

$$\|C_i^0\|_p=\delta n^{1/p},\ \ i\in I_1,$$

$$\|C_{I_1}^0\|_{pq}=\delta n^{1/p}\,|I_1|^{1/q}<\varepsilon,$$

$$C^0\in\Xi_{pq}(\varepsilon),$$

$$C_i^0(x^0-x)=-\delta\,\|x^0-x\|_1<0,\ \ i\in I_1. \tag{8}$$

Поэтому, используя (6) и (7), для любого решения $x\in G^{m,s}(x^0,C)$ получаем соотношения

$$(C_u+C_u^0)(x^0-x)\leq\left(\psi(n^{1/p}\,|I_1|^{1/q})^{-1}-\delta\right)\|x^0-x\|_1<0.$$

Тем самым,

$$\left(\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x^0\neq\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x\right)\ \&\ \left(\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x^0\not\geq\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x\right),$$

т. е.

$$\left(\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x^0\neq\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x\right)\ \&\ \left(\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x^0\,\overline{\succ}\,\left(C_{I_1}+C_{I_1}^0\right)x\right),$$

и, следовательно, $(C+C^0)x^0\ \overline{\Omega^{m,s}}\ (C+C^0)x.$ Таким образом,

$$\forall x\in G^{m,s}(x^0,C)\ \ \left(x\notin X(x^0,C+C^0)\right). \tag{9}$$

Если $X(x^0,C+C^0)=\varnothing$, то $x^0\in G^{m,s}(C+C^0)$.

Если $X(x^0, C+C^0) \neq \varnothing$, то в силу внешней устойчивости множества I-эффективных решений существует $x^* \in G^{m,s}(x^0, C+C^0)$.

Покажем, что $x^* \notin G^{m,s}(C)$. Предположим обратное, т. е. что $x^* \in G^{m,s}(C)$. Тогда в силу (9) $x^* \in G^{m,s}(C) \setminus G^{m,s}(x^0, C)$, т. е. $Cx^0 \, \overline{\Omega^{m,s}} \, Cx^*$. В соответствии с определением отношения $\Omega^{m,s}$ это означает, что либо $C_{I_1}x^0 = C_{I_1}x^*$, либо $C_{I_1}x^0 \neq C_{I_1}x^*$ и $C_{I_1}x^0 \, \overline{\succ} \, C_{I_1}x^*$.

Если $C_{I_1}x^0 = C_{I_1}x^*$, то $C_i x^0 = C_i x^*, i \in I_1$, и с учетом (8) имеем

$$\left(C_i + C_i^0\right)(x^0 - x^*) = C_i(x^0 - x^*) - \delta \| x^0 - x^* \|_1 = -\delta \| x^0 - x^* \|_1 < 0, \quad i \in I_1.$$

Если $C_{I_1}x^0 \neq C_{I_1}x^*$ и $C_{I_1}x^0 \, \overline{\succ} \, C_{I_1}x^*$, то существует такой индекс $w \in I_1$, что $C_w x^0 < C_w x^*$. И снова, используя (8), получаем

$$\left(C_w + C_w^0\right)(x^0 - x^*) = C_w(x^0 - x^*) - \delta \| x^0 - x^* \|_1 < 0.$$

Итак, в обоих случаях отношений между $C_{I_1}x^0$ и $C_{I_1}x^*$ имеем

$$\left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0 \neq \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^*\right) \ \& \ \left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0 \not\geq \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^*\right),$$

т. е.

$$\left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0 \neq \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^*\right) \ \& \ \left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0 \, \overline{\succ} \, \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^*\right),$$

и, следовательно, $(C+C^0)x^0 \, \overline{\Omega^{m,s}} \, (C+C^0)x^*$, что противоречит включению $x^* \in G^{m,s}(x^0, C+C^0)$. Тем самым доказано, что $x^* \notin G^{m,s}(C)$.

Резюмируя, заключаем, что при любом числе $\varepsilon > \psi$ гарантируется существование такой возмущающей матрицы $C^0 \in \Xi_{pq}(\varepsilon)$, что найдется решение ($x^0$ или x^*), которое, не являясь I-эффективным решением исходной задачи $Z_B^{m,s}(C)$, является таковым в возмущенной задаче $Z_B^{m,s}(C+C^0)$. Таким образом, справедлива формула

$$\forall \varepsilon > \psi \ \ \exists C^0 \in \Xi_{pq}(\varepsilon) \ \left(G^{m,s}(C+C^0) \not\subseteq G^{m,s}(C)\right).$$

Следовательно, верно неравенство $\rho \leq \psi$. Теорема доказана.

Следствия. Следствие 1. *Если задача ЦЛП* $Z^{m,s}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \in \mathbf{N}$, $p, q \in [1, \infty]$, $s \in N_m$, *имеет единственное I-эффективное решение* x^0, *т. е.* $\{x^0\} = G^{m,s}(C)$, *то*

$$\rho^{m,s}(p,q) = \varphi^{m,s}(p),$$

где

$$\varphi^{m,s}(p) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \ \min_{i \in I_1} \frac{C_i(x - x^0)}{\| x - x^0 \|_{p*}}.$$

Доказательство. Поскольку задача $Z^{m,s}(C)$ нетривиальна ($|G^{m,s}(C)| = 1$), то в силу теоремы верно неравенство $\rho^{m,s}(p,q) \geq \varphi$. Поэтому далее докажем, что $\rho^{m,s}(p,q) \leq \varphi$.

В соответствии с определением числа φ, существуют такие $\hat{x} \in X \setminus \{x^0\}$ и $r \in I_1$, что

$$C_r(\hat{x} - x^0) = \varphi \| \hat{x} - x^0 \|_{p*}. \tag{10}$$

Задав $\varepsilon > \varphi$, зафиксируем число ξ, удовлетворяющее неравенствам

$$\varphi < \xi < \varepsilon. \tag{11}$$

Согласно равенству (10), найдется такой вектор $a \in \mathbf{R}^n$, что

$$a^T(\hat{x} - x^0) = -\xi \| \hat{x} - x^0 \|_{p*},$$

$$\| a \|_p = \xi.$$

Далее зададим возмущающую матрицу $C^0 = [c_{ij}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ со строками C_i^0, $i \in N_m$, по правилу

$$C_i^0 = \begin{cases} a^T, & \text{если } i = r, \\ \mathbf{0}^T, & \text{если } i \in N_m \setminus \{r\}, \end{cases}$$

где $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ – вектор, состоящий из нулей.

Тогда имеем

$$\| C_r^0 \|_p = \xi,$$

$$\| C^0 \|_{pq} = \xi, \ C^0 \in \Xi_{pq}(\varepsilon),$$

$$C_r^0(\hat{x} - x^0) = -\xi \| \hat{x} - x^0 \|_{p*}.$$

Поэтому, используя (10) и (11), получаем

$$\left(C_r + C_r^0\right)(\hat{x} - x^0) = C_r(\hat{x} - x^0) - \xi \| \hat{x} - x^0 \|_{p*} = (\varphi - \xi) \| \hat{x} - x^0 \|_{p*} < 0,$$

т. е.

$$\left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)\hat{x} \neq \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0\right) \ \& \ \left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)\hat{x} \not\geq \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0\right),$$

или, иначе,

$$\left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)\hat{x} \neq \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0\right) \ \& \ \left(\left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)\hat{x} \overline{\succ} \left(C_{I_1} + C_{I_1}^0\right)x^0\right).$$

Это означает, что $x^0 \notin X(\hat{x}, C + C^0)$. Поэтому либо $\hat{x} \in G^{m,s}(C + C^0)$, либо $\hat{x} \notin G^{m,s}(C + C^0)$. Во втором случае, в силу внешней устойчивости множества *I*-эффективных решений, существует $x^* \in G^{m,s}(\hat{x}, C + C^0)$, причем $x^* \neq x^0$.

Итак, при любом числе ε > φ гарантируется существование такой возмущающей матрицы $C^0 \in \Xi_{pq}(\varepsilon)$, что $G^{m,s}(C + C^0) \not\subseteq G^{m,s}(C)$. Следовательно, $\rho^{m,s}(p,q) \leq \varphi$. Следствие 1 доказано.

В частном случае, при $s = 1$, непосредственно из теоремы получаем ранее известный результат.

С л е д с т в и е 2 [20]. *При любых* $m \in \mathbf{N}$ *и* $p, q \in [1, \infty]$ *для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи* $Z_B^{m,1}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, *поиска множества Парето* $P(C)$ *справедливы оценки*

$$\varphi^{m,1}(p) \leq \rho^{m,1}(p,q) \leq \min\left\{n^{1/p} \ m^{1/q} \ \varphi^{m,1}(\infty), \gamma(p,q)\right\},$$

где

$$\varphi^{m,1}(p) = \min_{x \notin P(C)} \ \max_{x' \in P(x,C)} \ \min_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|_{p*}},$$

$$P(x, C) = \{x' \in P(C) \ : \ Cx \succ Cx'\}.$$

В еще одном частном случае, при $s = m$, также непосредственно из теоремы получаем

С л е д с т в и е 3. *При любых* $m \in \mathbf{N}$ *и* $p, q \in [1, \infty]$ *для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи* $Z_B^{m,m}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, *поиска лексикографического множества* $L(C)$ *справедливы оценки*

$$\varphi^{m,m}(p) \le \rho^{m,m}(p,q) \le \min\left\{n^{1/p}\varphi^{m,m}(\infty), \gamma(p,q)\right\},$$

где

$$\varphi^{m,m}(p) = \min_{x \notin L(C)} \max_{x' \in L(x,C)} \frac{C_1(x - x')}{\| x - x' \|_{p^*}},$$

$$L(x,C) = \{x' \in L(C) \ : \ Cx \rhd Cx'\}.$$

Отметим, что при $p = q = \infty$ будет справедливо равенство $\varphi^{m,s}(\infty) = \psi^{m,s}(\infty,\infty)$, $s \in N_m$. Более того, с учетом неравенства Гёльдера (3) будут выполняться соотношения

$$\frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|_1} \le \frac{\| C_i \|_\infty \| x - x' \|_1}{\| x - x' \|_1} \le \| C \|_{\infty\infty} = \gamma(\infty,\infty), \ i \in N_m,$$

откуда

$$\min\{\psi^{m,s}(\infty,\infty), \gamma(\infty,\infty)\} = \psi^{m,s}(\infty,\infty), \ s \in N_m.$$

Это означает, что при $p = q = \infty$ верхняя и нижняя оценки совпадают, и поэтому являются достижимыми.

Итак, можно сформулировать еще два известных результата.

С л е д с т в и е 4 [18]. *При любом* $m \in \mathbf{N}$ *для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи* $Z_B^{m,1}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, *поиска множества Парето* $P(C)$ *справедлива формула*

$$\rho^{m,1}(\infty,\infty) = \varphi^{m,1}(\infty) = \psi^{m,1}(\infty,\infty) = \min_{x \notin P(C)} \max_{x' \in P(x,C)} \min_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|_1}.$$

С л е д с т в и е 5 [18]. *При любом* $m \in \mathbf{N}$ *для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи* $Z_B^{m,m}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, *поиска лексикографического множества* $L(C)$ *справедлива формула*

$$\rho^{m,m}(\infty,\infty) = \varphi^{m,m}(\infty) = \psi^{m,m}(\infty,\infty) = \min_{x \notin L(C)} \max_{x' \in L(x,C)} \frac{C_1(x - x')}{\| x - x' \|_1} > 0.$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Ф20УКА-005 «Дискретные структуры, корректность, алгоритмическая сложность задач дискретной оптимизации и теории графов».

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Basic Research within the framework of project no. Ф20УКА-005 “Discrete structures, correctness, algorithmic complexity of discrete optimization problems and graph theory”.

Список использованных источников

1. Hadamard, J. Lectures on Cauchy’s problem in linear partial differential equations / J. Hadamard. – Yale: Yale University Press, 1923. – 338 p.

2. Сергиенко, И. В. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.

3. Сергиенко, И. В. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – Киев: Наук. думка, 2003. – 261 с.

4. Устойчивость и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией / В. А. Емеличев [и др.] // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 1. – С. 53–67.

5. Лебедева, Т. Т. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход / Т. Т. Лебедева, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и систем. анализ. – 2008. – Т. 44, № 3. – С. 142–148.

6. Kuzmin, K. On necessary and sufficient conditions of stability and quasistability in combinatorial multicriteria optimization / K. Kuzmin, Yu. Nikulin, M. Makela // Control and Cybernetics. – 2017. – Vol. 46, № 4. – P. 361–382.

7. Леонтьев, В. К. Дискретная оптимизация / В. К. Леонтьев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 2. – С. 338–352.

8. Емеличев, В. А. О радиусе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями минимаксного риска Сэвиджа / В. А. Емеличев, В. В. Коротков // Кибернетика и систем. анализ. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 68–77.

9. Емеличев, В. А. Постоптимальный анализ векторного варианта одной инвестиционной задачи / В. А. Емеличев, В. И. Мычков // Тр. Ин-та математики. – 2016. – Т. 24, № 1. – С. 9–18.

10. Emelichev, V. On a quasistability radius for multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions / V. Emelichev, Yu. Nikulin // Кибернетика и систем. анализ. – 2019. – Т. 55, № 6. – С. 80–89.

11. Emelichev, V. Post-optimal analysis for multicriteria integer linear programming problem with parametric optimality / V. Emelichev, Yu. Nikulin // Control and Cybernetics. – 2020. – Vol. 49, № 2. – P. 163–178.

12. Гордеев, Э. Н. Сравнение трех подходов к исследованию устойчивости решений задач дискретной оптимизации и вычислительной геометрии / Э. Н. Гордеев // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2015. – Т. 22, вып. 3. – С. 18–35.

13. Бухтояров, С. Е. Аспекты устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования / С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2019. – Т. 26, № 1. – С. 5–19. https://doi.org/10.33048/daio.2019.26.624

14. Emelichev, V. A. Stability measures for multicriteria quadratic Boolean programming problem of finding extremum solutions / V. A. Emelichev, Y. V. Nikulin // Тр. Ин-та математики. – 2017. – Т. 25, № 2. – С. 82–90.

15. Scheduling under uncertainty. Theory and algorithms / Y. Sotskov [et al.]. – Minsk: Belaruskaya nauka, 2010. – 328 p.

16. Nikulin, Y. Accuracy and stability functions for a problem of minimization a linear form on a set of substitutions / Y. Nikulin // Sequencing and Scheduling with Inaccurate Data / eds.: Y. Sotskov, F. Werner. – Nova Science Pub Inc., 2014. – Ch. 15. – P. 409–426.

17. Емеличев, В. А. О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования / В. А. Емеличев, Д. П. Подкопаев, // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 11. – С. 1801–1805.

18. Stability and regularization of vector problem of integer linear programming / V. Emelichev [et al.] // Optimization. – 2002. – Vol. 51, № 4. – P. 645–676. https://doi.org/10.1080/0233193021000030760

19. Емеличев, В. А. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Кибернетика и систем. анализ. – 2010. – Т. 46, № 1. – С. 82–89.

20. Emelichev, V. A. Estimates of stability radius of multicriteria Boolean problem with Hölder metrics in parameter spaces / V. A. Emelichev, K. G. Kuzmin, V. I. Mychkov // Bull. Acad. Sci. Moldova. Math. – 2015. – № 2 (78). – P. 74–81.

21. Emelichev, V. Post-optimal analysis for multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions / V. Emelichev, Yu. Nikulin // Control and Cybernetics. – 2018. – Vol. 47, № 3. – P. 225–238.

22. Emelichev, V. A. On two stability types for a multicriteria integer linear programming problem / V. A. Emelichev, S. E. Bukhtoyarov // Bull. Acad. Sci. Moldova. Math. –2020. – Vol. 92, № 1. – P. 17–30.

23. Emelichev, V. On one type of stability for multiobjective integer linear programming problem with parameterized optimality / V. Emelichev, Yu. Nikulin // Comput. Sci. J. Moldova. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 249–268.

24. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

25. Леонтьев, В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах / В. К. Леонтьев // Проблемы кибернетики. – 1979. – Вып. 35. – С. 169–184.

References

1. Hadamard J. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale, Yale University Press, 1923. 338 p.

2. Sergienko I. V., Kozeratskaya L. N., Lebedeva T. T. *Research of Stability and Parametric Analysis of Discrete Optimization Problems*. Kyiv, Navukova dumka Publ., 1995. 168 p. (in Russian).

3. Sergienko I. V., Shilo V. P. *Discrete Optimization Problems. Problems, Methods, Research*. Kiev, Naukova dumka Publ., 2003. 261 p. (in Russian).

4. Emelichev V. A., Kotov V. M., Kuzmin K. G., Lebedeva T. T., Semenova N. V., Sergienko T. I. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2014, vol, 46, no. 2, pp. 27–41. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i2.30

5. Lebedeva T. T., Sergienko T. I. Different types of stability of vector integer optimization problem: General approach. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 429–433. https://doi.org/10.1007/s10559-008-9017-9

6. Kuzmin K., Nikulin Yu., Makela M. On necessary and sufficient conditions of stability and quasistability in combinatorial multicriteria optimization. *Control and Cybernetics*, 2017, vol. 46, no. 4, pp. 361–382.

7. Leont'ev V. K. Discrete optimization. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 2, pp. 328–340. https://doi.org/10.1134/S0965542507020157

8. Emelichev V. A., Korotkov V. V. Stability radius of a vector investment problem with Savage's minimax risk criteria. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 378–386. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9417-8

9. Emelichev V. A., Mychkov V. I. Postoptimal analysis of the vector version of one investment problem. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2016, vol. 24, no. 1, pp. 9–18 (in Russian).

10. Emelichev V., Nikulin, Y. On the quasistability radius for a multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 949–957. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00205-9

11. Emelichev V., Nikulin Yu. Post-optimal analysis for multicriteria integer linear programming problem with parametric optimality. *Control and Cybernetics*, 2020, vol. 49, no. 2, pp. 163–178.

12. Gordeev E. N. Comparison of three approaches to studying stability of solutions to problems of discrete optimization and computational geometry. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2015, vol. 9, no. 3, pp. 358–366. https://doi.org/10.1134/S1990478915030072

13. Bukhtoyarov S. E., Emelichev V. A. Stability aspects of multicriteria integer linear programming problems. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2019, vol. 13, no. 1, pp. 22–29. https://doi.org/10.1134/S1990478919010034

14. Emelichev V. A., Nikulin Yu. V. Stability measures for multicriteria quadratic Boolean programming problem of finding extremum solutions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 82–90 (in Russian).

15. Sotskov Y., Sotskova N., Lai T., Werner F. *Scheduling under Uncertainty. Theory and Algorithms.* Minsk, Belaruskaya nauka Publ., 2010. 328 p.

16. Nikulin Y. Accuracy and stability functions for a problem of minimization a linear form on a set of substitutions. Sotskov Y., Werner F. (eds.). *Sequencing and Scheduling with Inaccurate Data. Ch. 15.* Nova Science Pub Inc., 2014, pp. 409–426.

17. Emelichev V. A., Podkopaev D. P. On a quantitative measure of stability for a vector problem in integer programming. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1998, vol. 38, no. 11, pp. 1727–1731.

18. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P. Stability and regularization of vector problem of integer linear programming. *Optimization*, 2002, vol. 51, no. 4, pp. 645–676. https://doi.org/10.1080/0233193021000030760

19. Emelichev V. A., Kuzmin K. G. Stability radius of a vector integer linear programming problem: case of a regular norm in the space of criteria. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 72–79. https://doi.org/10.1007/s10559-010-9185-2

20. Emelichev V. A., Kuzmin K. G., Mychkov V. I. Estimates of stability radius of multicriteria Boolean problem with Hölder metrics in parameter spaces. *Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics*, 2015, no. 2 (78), pp. 74–81.

21. Emelichev V., Nikulin Yu. Post-optimal analysis for multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Control and Cybernetics*, 2018, vol. 47, no. 3, pp. 225–238.

22. Emelichev V. A., Bukhtoyarov S. E. On two stability types for a multicriteria integer linear programming problem. *Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics*, 2020, vol. 92, no. 1, pp. 17–30.

23. Emelichev V., Nikulin Yu. On one type of stability for multiobjective integer linear programming problem with parameterized optimality. *Computer Science Journal of Moldova*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 249–268.

24. Podinovskii V. V., Nogin V. D. *Pareto-Optimal Solutions of Multicriteria Problems.* Moscow, Nauka Publ., 1982. 256 p. (in Russian).

25. Leont'ev V. K. Stability in linear discrete problems. *Problemy kibernetiki* [Problems of Cybernetics], 1979, no. 35, pp. 169–184 (in Russian).

Информация об авторах

Емеличев Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vemelichev@gmail.com

Бухтояров Сергей Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: buser@tut.by

Information about the authors

Vladimir A. Emelichev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vemelichev@gmail.com

Sergey E. Bukhtoyarov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: buser@tut.by