

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 536.75

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-190-207>

Поступила в редакцию 30.09.2021

Received 30.09.2021

А. М. Крот, В. А. Сычѐв

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск,
Республика Беларусь*

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАТРИЧНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Аннотация. Рассматривается применение метода матричной декомпозиции для анализа хаотического осциллятора Чжуа. Показано, что система уравнений, описывающих осциллятор, методом матричной декомпозиции может быть разложена на линейный, квадратичный и кубический члены. Разложение в матричный ряд позволило рассмотреть переход к хаосу в системе Чжуа с точки зрения модели начальной турбулентности Л. Д. Ландау. Возникновение нового хаотического состояния в системе при выборе стационарного значения переменной пространства состояний объясняется методом сечений Пуанкаре. Для системы уравнений, полученных методом матричной декомпозиции, проведен спектральный и бифуркационный анализ. Выполнено компьютерное моделирование полученной системы в среде MATLAB-Simulink. Компьютерная Simulink-модель является основой построения информационной технологии распознавания хаотической динамики осцилляторов типа Чжуа.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, система Чжуа, странный аттрактор, теория Рюэля – Такенса, метод матричной декомпозиции в пространстве состояний, имитационная модель, бифуркационный анализ, хаотическая динамика

Для цитирования. Крот, А. М. Об особенностях нелинейного анализа динамических систем на основе метода матричной декомпозиции / А. М. Крот, В. А. Сычѐв // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 190–207. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-190-207>

Alexander M. Krot, Uladzislau A. Sychou

*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Republic of Belarus*

ON THE FEATURES OF NONLINEAR ANALYSIS OF DYNAMICAL SYSTEMS BASED ON THE MATRIX DECOMPOSITION METHOD

Abstract. In this paper, we consider the application of the matrix decomposition method to analyze Chua's chaotic oscillator. It is shown that Chua's system of equations describing the oscillator can be expanded into linear, quadratic, and cubic terms using the matrix decomposition method. Decomposition into a matrix series permits to study transition to chaos in Chua's system from the point of view of Landau's model of initial turbulence. The emerging new chaotic state in the system when a new stationary value of a state-space variable is chosen is explained using the Poincaré section method. For the system of equations that are obtained using the matrix decomposition method, the spectral and bifurcation analysis is conducted. Simulations using MATLAB and Simulink are carried out. A computational Simulink-model is the basis for building an information technology for recognizing the chaotic dynamics of Chua-type oscillators.

Keywords: nonlinear dynamical system, Chua's system, strange attractor, theory of Ruelle–Takens, matrix decomposition method in the state-space, computational model, bifurcation analysis, chaotic dynamics

For citation. Krot A. M., Sychou U. A. On the features of nonlinear analysis of dynamical systems based on the matrix decomposition method. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 190–207 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-2-190-207>

Введение. В настоящей работе применен метод анализа сложных нелинейных динамических систем (НДС) на основе матричного ряда в пространстве состояний [1]. Указанный метод нашел применение и для анализа НДС Лоренца, Энона, Ресслера, Фитц-Хью и Чжуа, демонстрирующих хаотическую динамику в пространстве состояний [2–4]. Общая модель возникновения и эволюции хаотических волновых процессов в сложных системах на основе матричной декомпозиции операторов нелинейных систем разработана в [5]. Как было установлено, эффект самооргани-

зации в сложных системах различной физической природы (на примерах гидродинамической, электронной и физиологической систем) заключается во взаимодействии нелинейных процессов высших порядков, приводящей к стабилизации (к конечной величине) амплитуды хаотического волнового процесса. Математически это выражается в синхронном «противодействии» нелинейных процессов четных и нечетных порядков в общей векторно-матричной модели сложной системы, находящейся в хаотическом режиме [5].

Нелинейный анализ методом матричной декомпозиции системы Чжуа с использованием численного моделирования сигналов с выходов кубического и квадратичного ядер в хаотическом режиме ее работы выявил подобие их эволюции во времени [4, 5], но с противоположным знаком и неодинаковой амплитудой. Попутно была обнаружена и существенная зависимость динамического состояния системы Чжуа от выбора величины u_1^* – стационарного значения первой переменной u_1 в пространстве состояний, в результате чего было высказано предположение, что u_1^* может рассматриваться как некий дополнительный «управляющий параметр» этой системы [4]. В свете сказанного выше цель настоящей работы – теоретически и экспериментально обосновать механизм возникновения нового хаотического состояния сложной нелинейной динамической системы за счет выбора стационарного значения одной из переменных пространства состояний этой системы. Вычислительные эксперименты проведены на примере электронной схемы Чжуа, считающейся единственной физической системой, хаотическое подведение которой подтверждено с помощью компьютерного моделирования, лабораторных экспериментов и математического анализа [6].

В статье рассматривается вариант системы Чжуа с кубической нелинейной функцией, которая, как отмечается в [7], является более предпочтительной для исследований, чем кусочно-линейная вольтамперная характеристика (ВАХ) нелинейного элемента (например, описанная в [8]). Отмечается, что все феномены, наблюдаемые при кусочно-линейной ВАХ, существуют и при кубической характеристике, в то время как некоторые феномены присущи только схеме с кубической нелинейностью [9]. В частности, для возникновения бифуркации Хопфа требуются функции класса C^3 . Следовательно, бифуркация, возникающая в схеме с кусочно-линейной ВАХ, не является в полной мере бифуркацией Хопфа и отличается резким переходом амплитуды колебаний от нуля к некоторому конечному значению.

Экспериментальные исследования в настоящей работе выполнены с помощью компьютерного моделирования в средах Matlab / Simulink, которые позволяют организовать процесс решения дифференциальных уравнений с помощью имитационной модели, состоящей из типовых блоков. Решатели дифференциальных уравнений [10] представлены в виде интеграторов, другие блоки выполняют функции сумматоров, умножителей, и т. д. (см. Приложение, рис. П1 и П2).

Разложение системы уравнений Чжуа с гладкой нелинейностью методом матричной декомпозиции. Система уравнений, описывающая систему Чжуа с кубической нелинейностью, выглядит следующим образом [4, 7, 9]:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_2 - A\alpha u_1^3 - C\alpha u_1, \\ \dot{u}_2 = u_1 - u_2 + u_3, \\ \dot{u}_3 = -\beta u_2, \end{cases} \quad (1)$$

где α, β – управляющие параметры; u_1, u_2, u_3 – переменные в пространстве состояний системы Чжуа; A, C – коэффициенты кубического полинома. Запишем систему уравнений (1) в векторно-матричных обозначениях:

$$\dot{\vec{u}} = \vec{f}(\vec{u}, \alpha, \beta, A, C), \quad (2)$$

где

$$\dot{\vec{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} \alpha u_2 - A\alpha u_1^3 - C\alpha u_1 \\ u_1 - u_2 + u_3 \\ -\beta u_2 \end{bmatrix}. \quad (2a)$$

$$L_{3 \times 27}^{(3)} = \begin{bmatrix} -6A\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7B)$$

Подставляя (7a)–(7в) в (5), получим

$$\begin{aligned} \Delta \bar{f}(\bar{v}, \bar{u}^*) &= \begin{bmatrix} -(3A\alpha u_1^{*2} + C\alpha) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} -6A\alpha u_1^* & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_1 v_2 \\ v_1 v_3 \\ v_2 v_1 \\ v_2^2 \\ v_2 v_3 \\ v_3 v_1 \\ v_3 v_2 \\ v_3^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} -6A\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^3 \\ v_1^2 v_2 \\ v_1^2 v_3 \\ v_1 v_2 v_1 \\ v_1 v_2^2 \\ v_1 v_2 v_3 \\ v_1 v_3 v_1 \\ v_1 v_3 v_2 \\ v_1 v_3^2 \\ v_2 v_1^2 \\ v_2 v_1 v_2 \\ v_2 v_1 v_3 \\ v_2^2 v_1 \\ v_2^3 \\ v_2^2 v_3 \\ v_2 v_3 v_1 \\ v_2 v_3 v_2 \\ v_2 v_3^2 \\ v_2 v_1^2 \\ v_3 v_1 v_2 \\ v_3 v_1 v_3 \\ v_3 v_2 v_1 \\ v_3 v_2^2 \\ v_3 v_2 v_3 \\ v_3^2 v_1 \\ v_3^2 v_2 \\ v_3^3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -(3A\alpha u_1^{*2} + C\alpha)v_1 + \alpha v_2 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -\beta v_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6A\alpha u_1^* v_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6A\alpha v_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_2 - (3A\alpha u_1^{*2} + C\alpha)v_1 - 3A\alpha u_1^* v_1^2 - A\alpha v_1^3 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -\beta v_2 \end{bmatrix}. \quad (8) \end{aligned}$$

Как видно из разложения (8), переменными системы являются v_1, v_2, v_3 , а в качестве параметров выступают как величины α, β, A, C , так и u_1^* – некоторое стационарное значение первой переменной u_1 , как уже отмечалось выше. Таким образом, основное предназначение метода матричной декомпозиции состоит в реализации нелинейного анализа для оценки влияния ядер $L_{N \times N}^{(1)}, L_{N \times N^2}^{(2)}, L_{N \times N^3}^{(3)}, \dots$ на динамику функционирования сложной НДС. Цифровой анализатор динамических процессов в системе Чжуа, реализованный в среде Simulink на основе матричной декомпозиции (7а)–(7в), (8), представлен на рис. П2 (см. Приложение).

Как было отмечено в [4, 5], конечные незатухающие хаотические колебания наблюдаются лишь при определенных соотношениях между вкладками линейного $L_{N \times N}^{(1)}$, квадратичного $L_{N \times N^2}^{(2)}$ и кубического $L_{N \times N^3}^{(3)}$ ядер в общую динамику системы. Действительно, воспользовавшись (4), (8), запишем уравнение для скорости изменения v_1 первой компоненты векторной переменной \vec{u} , принадлежащей пространству состояний системы Чжуа:

$$\dot{v}_1 = c(v_2) + \gamma_L v_1 - \alpha_L v_1^2 - \beta_L v_1^3, \quad (9)$$

где коэффициентами γ_L, α_L и β_L обозначены соответственно*

$$c(v_2) = \alpha v_2, \quad \gamma_L = -C\alpha - 3A\alpha u_1^{*2}, \quad \alpha_L = 3A\alpha u_1^*, \quad \beta_L = A\alpha. \quad (10)$$

При параметрах рассматриваемой схемы Чжуа, приведенных выше, следует, что

$$\gamma_L = -\alpha(3A u_1^{*2} + C) > 0; \quad (11)$$

$$\alpha_L = 3A\alpha u_1^* < 0; \quad (12)$$

$$\beta_L = A\alpha > 0. \quad (13)$$

Таким образом, условия (11)–(13) полностью соответствуют условиям *жесткого* самовозбуждения системы в рамках модели начальной турбулентности Л. Д. Ландау [11, 12], т. е. после срыва стационарного режима течения жидкости с точностью до членов третьего порядка справедливо аналогичное уравнение (9), в котором γ_L – коэффициент затухания, α_L – постоянная Ландау, β_L – положительная или отрицательная постоянная. Согласно модели начальной турбулентности Ландау [11], предложенной в 1944 г., при скачкообразном переходе от стационарного режима нелинейной системы к нестационарному возникают две дополнительные частоты ω_1 и ω_2 , определяющие 2 цикла (типа «двойной завиток») в пространстве состояний системы, что и было подтверждено вычислительными экспериментами, результаты которых рассмотрены далее.

Экспериментальное исследование работы системы Чжуа. Переход к хаосу в НДС вне зависимости от физической природы часто осуществляется по общим законам. Можно предположить, что система Чжуа, разложенная в матричный ряд, продемонстрирует тот же путь перехода к хаосу, что и иные системы. В частности, при возрастании управляющего параметра стационарный режим будет утрачивать свою устойчивость и переходить в колебательный – *периодический* режим с частотой ω_1 , которому соответствует предельный цикл в пространстве состояний системы, согласно теории Рюэля – Такенса (теории РТ). Повторившись еще дважды, процесс вызовет 3 последовательные бифуркации Хопфа, порождающие три независимые частоты ω_1, ω_2 и ω_3 , т. е. в системе реализуется *квазипериодический* режим с тремя частотами.

Как и в модели начальной турбулентности Ландау [11], в пространстве состояний системы квазипериодическому режиму с двумя частотами соответствует двумерный аттрактор – тор T^2 , а квазипериодическому режиму с тремя частотами – трехмерный аттрактор в виде тора T^3 . Но в отличие от модели Ландау, Рюэль, Такенс и Ньюхаус показали, что отдельные возмущения могут разрушить тор T^3 и преобразовать его в *хаотический* (странный) аттрактор [13, 14]. Это означает, что нестационарное поведение системы, описываемое квазипериодическим режимом с тремя частотами, перестает быть устойчивым и становится хаотическим. Вместе с тем, в отли-

* Индекс L означает констатацию того факта, что впервые эти коэффициенты были введены Л. Д. Ландау [11].

чие от тора T^3 , хаотический аттрактор обладает большей устойчивостью по отношению к действующим на систему возмущениям [15].

Итак, согласно теории РТ, спектр мощности динамической системы Чжуа как функция управляющего параметра α из уравнения (1) будет эволюционировать следующим образом. Спектр мощности после первой бифуркации Хопфа будет содержать сначала одну частоту ω_1 , затем после второй бифуркации Хопфа – две частоты ω_1, ω_2 , но иногда и три частоты ω_1, ω_2 и ω_3 , если третья бифуркация Хопфа имела место. Как только в спектре мощности появляется ω_3 , то возникает характерная для хаоса шумовая компонента. Однако третья частота может и не обнаруживаться перед тем, как в схеме идентифицируется хаос [15].

Все вышеизложенное рассматривалось с помощью компьютерной модели [4], реализующей систему (8). Под временем моделирования будет подразумеваться время в среде Simulink, относящееся ко всей модели (в то время, как обычно, при решении дифференциальных уравнений время задается для решателя). Условия моделирования, кроме случаев, оговоренных отдельно: время – 400 с модельного времени среды Simulink; $\alpha = 15,6$; $\beta = 28$; $A = 0,002$; $C = -0,3$; $u_1^* = -0,75$. Начальные значения: $u_1^0 = 1,657$; $u_2^0 = 0,2462$; $u_3^0 = -0,7882$.

В [16] определено, что значение управляющего параметра α , при котором наблюдается хаотический режим в системе Чжуа, равно $\alpha = 15,6$. Допустимое отклонение α и β лежит в пределах 10 %. Численное моделирование на основе метода матричной декомпозиции показало возможность уточнения этой величины. В частности, «двойной завиток», определяющий два цикла с частотами ω_1 и ω_2 , наблюдается от $\alpha \approx 13,8$ и до $\alpha \approx 19$, как видно из бифуркационной диаграммы на рис. 1, а.

На рис. 2 представлены зависимости спектров мощности по переменной v_1 от параметра α и соответствующие аттракторы в пространстве состояний системы. Как было отмечено выше, первая бифуркация ведет к переходу от начального стационарного состояния (неподвижной точки) к периодическому состоянию (предельному циклу) в фазовом пространстве состояний системы Чжуа, а вторая бифуркация Хопфа преобразует периодический режим (с частотой ω_1) в квазипериодический режим (с частотами ω_1 и ω_2). Как известно [15], функция x , зависящая от r независимых переменных t_1, t_2, \dots, t_r , называется *периодической* с периодом 2π по каждому из своих аргументов, если

$$x(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_r) = x(t_1, t_2, \dots, t_j + 2\pi, \dots, t_r), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (14)$$

(рис. 2, а). Такая функция называется *квазипериодической* по времени, если все ее r переменных пропорциональны времени t :

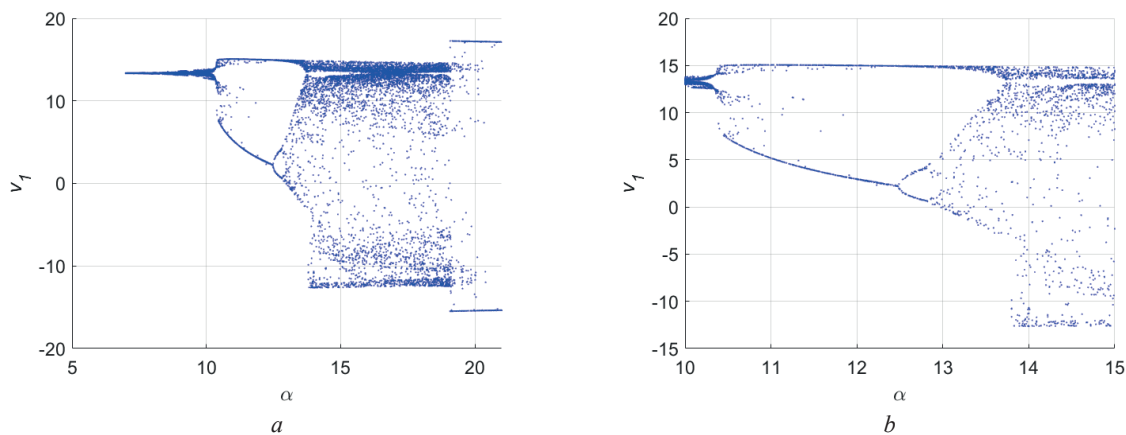


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая зависимость переменной пространства состояний v_1 от управляющего параметра α при $u_1^* = -0,75$ для: а – $\alpha \in [7; 21]$; б – $\alpha \in [10; 15]$

Fig. 1. The bifurcation diagram representing the dependence of the state space variable v_1 on the control parameter α when $u_1^* = -0.75$, and $\alpha \in [7; 21]$ (a); $\alpha \in [10; 15]$ (b)

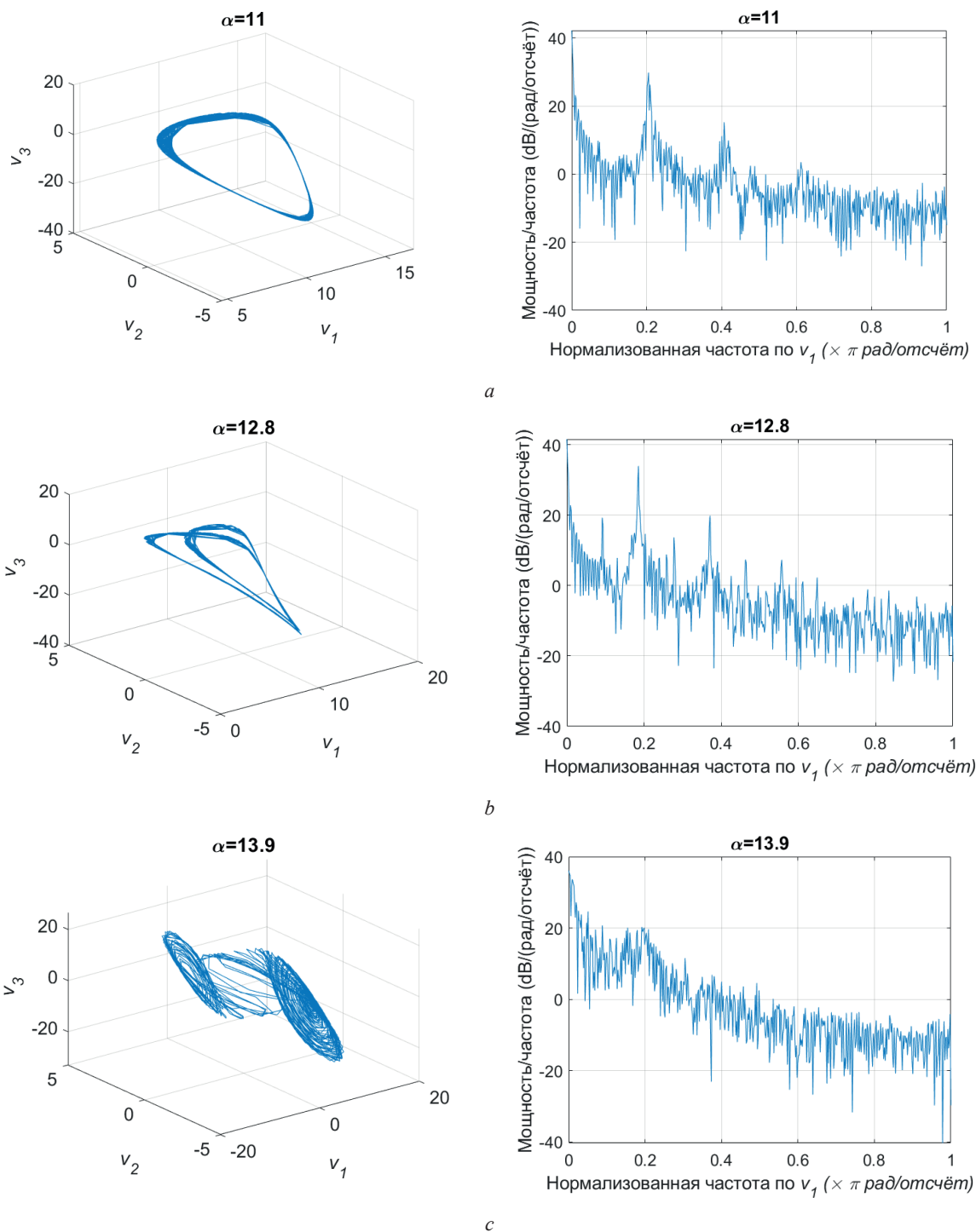


Рис. 2. Аттракторы переменных пространства состояний v_1, v_2, v_3 и соответствующие им графики спектра переменной v_1 для $\alpha = 11$ (a); $\alpha = 12,8$ (b); $\alpha = 13,9$ (c)

Fig. 2. Plots of the attractors for the state space variables v_1, v_2, v_3 and the corresponding spectrum plots of the variable v_1 for $\alpha = 11$ (a); $\alpha = 12.8$ (b); $\alpha = 13.9$ (c)

$$t_j = \omega_j t, \quad j = 1, \dots, r. \quad (15)$$

Квазипериодическая функция имеет r основных частот ω_j и, соответственно, r периодов: $T_j = 2\pi / \omega_j, \quad j = 1, \dots, r$ (рис. 2, b).

Следовательно, квазипериодический сигнал состоит из множества пиков на частотах $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ и их гармониках:

$$m_1\omega_1, m_2\omega_2, \dots, m_r\omega_r, \quad (16)$$

где m_1, \dots, m_r – положительные целые числа. Более того, если подобный сигнал включает произведения периодических (в частности, гармонических) функций $x_i(\omega_i t)x_j(\omega_j t)$, то его спектр Фурье содержит спектральные компоненты с основными частотами $|\omega_i - \omega_j|$, $|\omega_i + \omega_j|$ и их гармониками. Обобщая этот результат, можем утверждать, что спектр Фурье квазипериодической функции, нелинейно зависящей от периодических функций переменных $\omega_i t$, $i = 1, \dots, r$, содержит компоненты со всеми частотами вида

$$|m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_r\omega_r|, \quad (17)$$

где m_1, \dots, m_r – произвольные целые числа. Кроме того, отношение частот ω_i / ω_j может быть либо рациональным, либо иррациональным числом. В случае иррационального отношения из теории чисел известно, что суммы вида $|m_i\omega_i + m_j\omega_j|$ образуют на положительной вещественной полуоси *всюду плотное* множество [15].

Принимая во внимание положения теории РТ [13], заключаем, что в простейшем случае $r = 2$ при иррациональном отношении ω_1 / ω_2 любое вещественное число сколь угодно близко к одной из сумм $|m_1\omega_1 + m_2\omega_2|$. Следовательно, спектр мощности квазипериодического сигнала с двумя периодами (соответствующий аттрактор – двумерный тор T^2 в рамках теории РТ) также всюду плотен. Но это совсем не означает, что его можно представить с помощью непрерывной функции, поскольку это бы соответствовало случаю *аперриодического* сигнала. Действительно, два пика, довольно близких друг к другу на оси частот, отнюдь необязательно должны иметь близкие амплитуды (см. рис. 2).

Обычно на практике спектр мощности квазипериодического сигнала идентифицируют, пытаясь найти две *основные* частоты ω_1 и ω_2 , которые позволили бы представить частоты мод с большой амплитудой в виде простых комбинаций $|m_1\omega_1 + m_2\omega_2|$ с малыми m_1 и $m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (см. рис. 2, а). Как видно из рис. 2, а, спектральные пики на частотах 0,205, 0,406 и 0,611 радиан / отсчет вероятно являются модами с кратными гармониками по основной частоте $\omega_1 \approx 0,205$ радиан / отсчет (кратностью $m_1 = 2$ и $m_2 = 3$), т. е. при значении управляющего параметра $\alpha = 11$ спектр мощности является линейчатый, что видно на рис. 2, а. На рис. 2, б представлен случай для $\alpha = 12,8$. Можно видеть большее количество пиков на частотах, кратных (с $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ и $m_3 = 4$) первой основной частоте $\omega_1 \approx 0,092$ радиан / отсчет. Таким образом, при увеличении значения управляющего параметра от $\alpha = 11$ до $\alpha = 12,8$ первая основная частота $\omega_1 \approx 0,205$ радиан / отсчет «половинится», становясь равной $\omega_1 \approx 0,092$ радиан / отсчет, и слегка уменьшается по величине на 5 % по сравнению с предыдущим случаем, что соответствует сценарию *удвоения периода* [12]: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \rightarrow 2T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1/2}$.

Дальнейшее увеличение управляющего параметра, как видно из бифуркационной диаграммы на рис. 1, приводит к образованию «окна» при значениях α от 13,13 до 13,23, в котором первая основная частота принимает значения $\omega_1 \approx 0,062$ (измерено для $\alpha = 13,15$, может изменяться в пределах десяти процентов в пределах «окна»). Спектр данного участка характеризуется большим количеством частот, кратных основной частоте (вплоть до $m_{11} = 12$). Дальнейшее увеличение управляющего параметра до $\alpha = 13,25$ сопровождается оттоком энергии от спектральных мод с частотами, кратными гармоникам по первой основной частоте (равной $\omega_1 \approx 0,068$ при $\alpha = 13,25$), приводящим к уменьшению их амплитуд за счет притока энергии к спектральным модам с кратными гармониками, возникшей в низкочастотной области по второй основной частоте $\omega_2 = 0,107$. Как уже отмечалось, при иррациональном отношении $\omega_2 / \omega_1 = 1,573529411764706\dots$ спектр мощности такого квазипериодического сигнала ($\alpha = 13,25$) становится достаточно плотным, но не непрерывным.

Последующее увеличение управляющего параметра (случай для $\alpha = 13,9$ рассмотрен на рис. 2, с) приводит к постепенному выравниванию по амплитуде уже имеющихся спектральных

мод за счет появления в низкочастотной области новых мод, кратных трем основным частотам: $\omega_1 \approx 0,051$, $\omega_2 \approx 0,070$ и $\omega_3 \approx 0,090$, что соответствует в рамках теории РТ суперкритической третьей бифуркации Хопфа, порождающей переход от квазипериодического режима с двумя частотами к квазипериодическому режиму с тремя частотами [14].

При увеличении значения управляющего параметра до $\alpha = 14$ происходит усиление мод в низкочастотной области спектра вблизи третьей основной частоты с постепенным подавлением резонансных гармоник, так что спектр становится похожим на спектр *апериодического* сигнала, т. е. почти непрерывным. Таким образом, при $\alpha > 14$ (в частности, для $\alpha = 15,6$) наблюдается хаотический режим в пространстве состояний схемы Чжуа.

Важно отметить, что при уменьшении управляющего параметра от $\alpha = 14$ до $\alpha = 11$ происходит обратный процесс постепенного исчезновения гармоник, кратных основным частотам ω_2 и ω_3 , за счет синхронизации частот ω_1 , ω_2 и ω_3 (или *затягивания* частоты) [15]. В этом случае при уменьшении параметра α частоты ω_2 и ω_3 постепенно увеличиваются так, что их отношение, например, ω_2 / ω_3 , становится рациональным числом, т. е. $\omega_2 / \omega_3 = n_2 / n_3$, где n_2, n_3 – целые числа. Тогда квазипериодический сигнал в действительности становится периодическим с периодом $T_1 = n_2 T_2 = n_3 T_3$. В самом деле, согласно определению (14), получаем

$$x(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t) = x(\omega_1 t + 2\pi n_1, \omega_2 t + 2\pi n_2, \omega_3 t + 2\pi n_3). \quad (18)$$

Когда происходит синхронизация частот $\omega_2 / n_2 = \omega_3 / n_3$, все линии спектра Фурье являются модами с гармониками низшей частоты

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), видим, что при синхронизации частот квазипериодический сигнал вырождается в периодический:

$$x(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t) = x(\omega_1 t + 2\pi n_1, \omega_1 n_2 t + 2\pi n_2, \omega_1 n_3 t + 2\pi n_3) \equiv \check{x}(\omega_1 t), \quad (20)$$

так что соседние линии его спектра мощности всегда разделены одинаковым расстоянием $2\pi / T_1$ (см., напр., рис. 2, а).

Объяснение возникновения нового хаотического состояния сложной НДС при выборе стационарного значения переменной пространства состояний методом сечений Пуанкаре. Исследуем механизм возникновения нового хаотического состояния сложной нелинейной динамической системы за счет выбора стационарного значения u_1^* первой координаты u_1 пространства состояний \mathcal{R}^3 системы Чжуа. Заметим, что вместо прямого изучения решения систем уравнений (1) или (4) в \mathcal{R}^3 может оказаться полезным рассмотреть точки пересечения фазовой траектории с некоторой плоскостью [12, 15]. Согласно вышеизложенному, выберем плоскость S , заданную уравнением $u_1 = \text{const}$, и отметим точки пересечения P_0, P_1, P_2, \dots фазовой траекторией Γ плоскости S . В действительности S может быть любой плоскостью, но подходящий выбор ее приводит к сечениям, лучше поддающимся анализу. Итак, получается множество точек $\{P_k\}$, образующих *сечение Пуанкаре* [15]. Преобразование, переводящее точку в следующую, является непрерывным отображением плоскости S на себя, называемым *отображением Пуанкаре* [12, 15]:

$$P_{k+1} = T(P_k) = T(T(P_{k-1})) = T^2(P_{k-1}) = \dots \quad (21)$$

Так как решение системы (1) единственно согласно теореме Коши, точка P_0 однозначно определяет точку P_1 , которая в свою очередь определяет P_2 и т. д. Вообще говоря, интервал времени между последовательными точками непостоянен. Очевидно, что сечение Пуанкаре заменяет эволюцию с непрерывным временем, описываемую уравнениями (1) и (4), отображением (21) с *дискретным* временем. Известно [15], что по построению сечение Пуанкаре и отображение Пуанкаре обладают теми же топологическими свойствами, что и породивший их фазовый поток

в пространства состояний НДС. Поэтому если у фазового потока имеется аттрактор (см., напр., рис. 2), то его структурные характеристики могут быть найдены по сечению Пуанкаре.

Метод сечений Пуанкаре упрощает исследование непрерывных потоков по трем причинам. Во-первых, переходим от потока в \mathfrak{R}^3 к отображению на плоскости, понижая тем самым число координат на единицу. Во-вторых, время дискретизуется и дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями, определяющими отображение Пуанкаре (21). Эти алгебраические уравнения значительно легче поддаются решению. Наконец, в-третьих, резко сокращается число данных, подлежащих обработке, так как почти всеми точками на траектории можно пренебречь.

Существует соответствие между видом сечения Пуанкаре аттрактора и динамическими свойствами решения. Если решение *периодическое*, то, как уже упоминалось, фазовая траектория представляет собой замкнутую орбиту – *предельный цикл*. Соответствующее сечение Пуанкаре устроено очень просто: это либо одна точка P_0 , либо несколько точек, если предельный цикл очень извилист.

В случае *квазипериодического* решения с двумя основными частотами ω_1 и ω_2 известно, что аттрактором является тор $T^2 \in \mathfrak{R}^3$. Любую траекторию на поверхности тора можно рассматривать как суперпозицию двух движений: вращения по большей окружности (параллелям) и вращения вокруг «цилиндра», образующего тор. Каждая из основных частот ω_1 и ω_2 соответствует этим вращательным движениям. Точки пересечения траектории с плоскостью сечения S возникают через регулярные интервалы времени, равные периоду первого движения $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Точки пересечения расположены на замкнутой кривой C , форма которой может быть либо простой, т. е. без точек самопересечения (окружность, эллипс и т. д.), либо более сложной (восьмерка, циклоида и т. д.) при наличии гармоник с частотами ω_1 и ω_2 .

Точная форма сечения Пуанкаре зависит от отношения ω_1 / ω_2 . Если оно иррационально, то траектория не замыкается и всюду плотно покрывает поверхность тора. В этом случае говорят, что частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, поэтому замкнутая кривая C непрерывна. Если отношение ω_1 / ω_2 рационально, то сечение Пуанкаре состоит из конечного множества точек, распределенных по C . Однако на этот раз C – уже не непрерывная кривая, так как траектория уже не образует всюду плотного покрытия на торе. Между ω_1 и ω_2 возникает *затягивание частоты*: отношение ω_1 / ω_2 равно отношению двух целых чисел n_1 / n_2 . Завершив n_1 оборотов по «параллелям» и n_2 оборотов по «меридианам», траектория замыкается [15].

В этой связи, чтобы определить сечение Пуанкаре для аperiodического решения трехмерного фазового потока в пространстве состояний системы Чжуа, важно обратить внимание на сложную структуру странных аттракторов на рис. 2, с. Известно, что, когда фазовый поток сильно диссипативен и приводит к быстрому сокращению площадей [12], его сечение Пуанкаре практически можно рассматривать как множество точек, распределенных вдоль некоторой кривой. В этом случае можем определить координату x для каждой точки на кривой и исследовать, как она изменяется со временем (итерацией). Отображение Пуанкаре на таком одномерном графике называется *отображением первого возвращения* [12, 15]:

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (22)$$

Классическим примером отображения первого возвращения является нелинейное отображение Фейгенбаума на основе логистической параболы вида $x_{k+1} = f(x_k; \lambda) = 1 - \lambda x_k^2$ или $x_{k+1} = 4\mu x_k(1 - x_k)$, $x_k \in [0; 1]$, μ – управляющий параметр [12, 15, 17–19]. Известно [17–19], что такое отображение порождает *хаотическое* поведение, а многократное повторение бифуркаций удвоения периода открывает один из возможных путей возникновения турбулентности [8, 11]. Общепринятыми средствами исследования одномерного отображения являются графики на плоскости (x_k, x_{k+1}) функции $f: x_{k+1} = f(x_k)$ и тождественного отображения $x_{k+1} = x_k$. Применим этот подход к нелинейному анализу динамической системы Чжуа на основе метода матричной декомпозиции, для чего рассмотрим коэффициенты Ландау (10) для следующего набора параметров: $\alpha \in [-33, 3; 33, 3]$, $A = 0,002$, $C = -0,3$. Прежде всего представим коэффициенты Ландау (10)

как функции от стационарного значения u_1^* первой координаты u_1 в пространстве состояний системы Чжуа:

$$\gamma_L(u_1^*) = -3\alpha A u_1^{*2} - \alpha C, \tag{23}$$

$$\alpha_L(u_1^*) = 3A\alpha u_1^*. \tag{24}$$

В связи с выбором плоскости сечения Пуанкаре, заданной уравнением $u_1 = u_1^*$, обозначаем $x = u_1^*$, что в свою очередь позволяет в качестве функции f рассматривать $\gamma_L(x)$:

$$\gamma_L(x) = -3\alpha A x^2 - \alpha C, \tag{25}$$

где α – управляющий параметр. Далее целесообразно исследовать отображение (25) с помощью графических инструментов – бифуркационной диаграммы (рис. 3) и диаграммы Ферхюльста (рис. 4).

Бифуркационная диаграмма показывает переход к хаосу через удвоения периода и по форме напоминает бифуркационные диаграммы для известных вариантов логистического отображения [20, 21]. Однако данная диаграмма демонстрирует симметрию, не характерную для других отображений. Из рис. 3, *a* можно определить значения управляющего параметра, при которых наблюдается хаотический режим. Далее рассмотрим случай $\alpha = 29,6$ с помощью диаграммы на рис. 4. Можно видеть существование хаотического режима. Величина $\gamma_L(x) > 0$ в диапазоне $x \in [-7,07; 7,07]$.

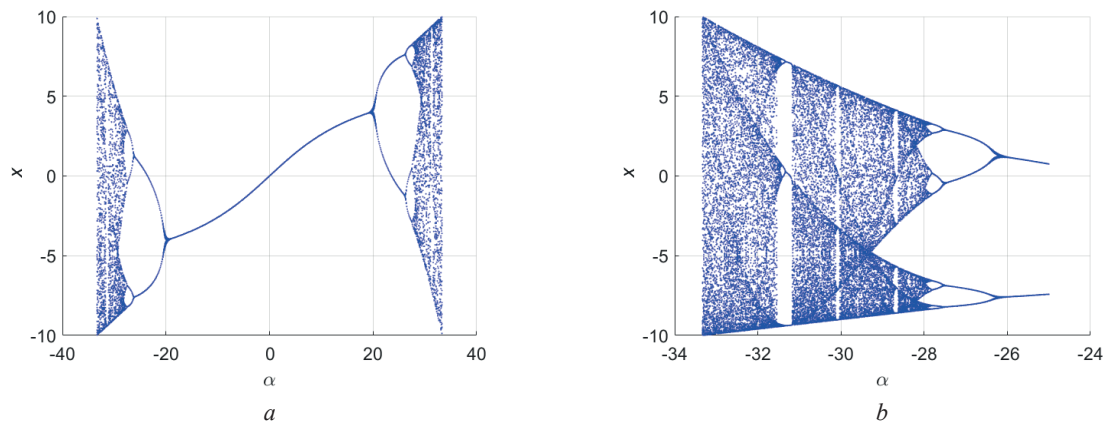


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма отображения (25) для $\alpha \in [-33,3; 33,3]$ (*a*); $\alpha \in [-33,3; -25]$ (*b*)

Fig. 3. The bifurcation diagram for the map (25) for $\alpha \in [-33,3; 33,3]$ (*a*), and $\alpha \in [-33,3; -25]$ (*b*)

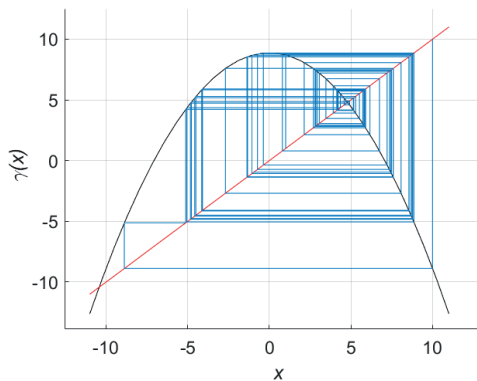


Рис. 4. Отображение $\gamma_L(x)$ при $\alpha = 29,6$; $x_k \in [-11; 11]$: неподвижными точками отображения являются точки пересечения графика функции $\gamma_L(x)$ с диагональю, т. е. с графиком функции x , задающей тождественное отображение (геометрический метод построения последовательных итераций отображения $\gamma_L(x)$)

Fig. 4. The map $\gamma_L(x)$ for $\alpha = 29,6$; $x_k \in [-11; 11]$: the fixed points of the map are those of intersection between the graph of the function $\gamma_L(x)$ and the diagonal, which is the graph of the function x that defines the identical mapping (the geometrical method to build the consequent iterations of the map $\gamma_L(x)$)

График функции $\gamma_L(x) = -3\alpha Ax^2 - \alpha C$ при заданных значениях имеет два нуля (при $x = -7,07$ и $x = 7,07$) и максимум, равный $-\alpha C$, в точке $x = 8,88$. Пользуясь этим графиком, исследуем заданную выше итерацию с начального условия $x_0 = 10$. Первая итерация $x_1 = \gamma_L(x_0)$ есть точка пересечений вертикали с абсциссой x_0 и графика функции $\gamma_L(x)$ (см. рис. 4). Аналогично вторая итерация $x_2 = \gamma_L(x_1)$ расположена на пересечении вертикали с абсциссой x_1 и графика функции γ_L и т. д. Простой и эффективный метод построения последовательных итераций состоит в использовании тождественного отображения, т. е. диагонали $x_{k+1} = x_k$. Действительно, горизонталь $x_{k+1} = x_1$ пересекает диагональ $x_{k+1} = x_k$ в точке $x_k = x_1$. Следовательно, достаточно провести вертикаль через эту точку, не обращаясь к оси абсцисс.

Существует *устойчивая* неподвижная точка x^* , к которой сходятся итерации всех начальных условий на отрезке $[-11;11]$. Действительно, повторяя последовательность операций, а именно, проведение вертикали от диагонали до пересечения с графиком функции, а затем проведение горизонтали из полученной точки до пересечения с диагональю, получаем последовательные итерации отображения. Из рис. 4 видно, что итерации сходятся к точке с абсциссой $x^* \approx 4,79$ – пересечению диагонали с графиком функции γ_L . Заметим, что устойчивость неподвижной точки определяется по угловому коэффициенту касательной к кривой, задающей отображение, в неподвижной точке: если тангенс угла наклона касательной к кривой $\gamma_L(x)$ по абсолютной величине меньше единицы, то неподвижная точка x^* устойчива (в противном случае неподвижная точка неустойчива) [15].

Отображения первого возвращения имеют самое непосредственное отношение к исследованию аperiodических решений. Таким образом, подобно отображению Фейгенбаума [17–19], данное отображение порождает *хаотическое* поведение, а многократное повторение бифуркаций удвоения периода открывает один из возможных путей возникновения турбулентности [12, 15].

Воспользовавшись теперь результатами исследования отображения (25), можно провести бифуркационный анализ системы (8), приняв теперь в качестве управляющего параметра величину u_1^* (рис. 5) при начальных значениях переменных $v_1(0) = 0,02$; $v_2(0) = 0$; $v_3(0) = 0$. Бифуркационная диаграмма на рис. 5 отличается от диаграммы на рис. 1, иллюстрирующей классический вариант управления по параметру α тем, что условно состоит из трех участков – наклонный в центре и сравнительно горизонтальные по краям. Заметим, что наклонный участок ограничен значениями u_1^* , при которых γ_L пересекает нуль. Участки диаграммы, на которых визуально наблюдаются аттракторы, напоминающие характерный для системы Чжуа «двойной завиток», отмечены красным цветом.

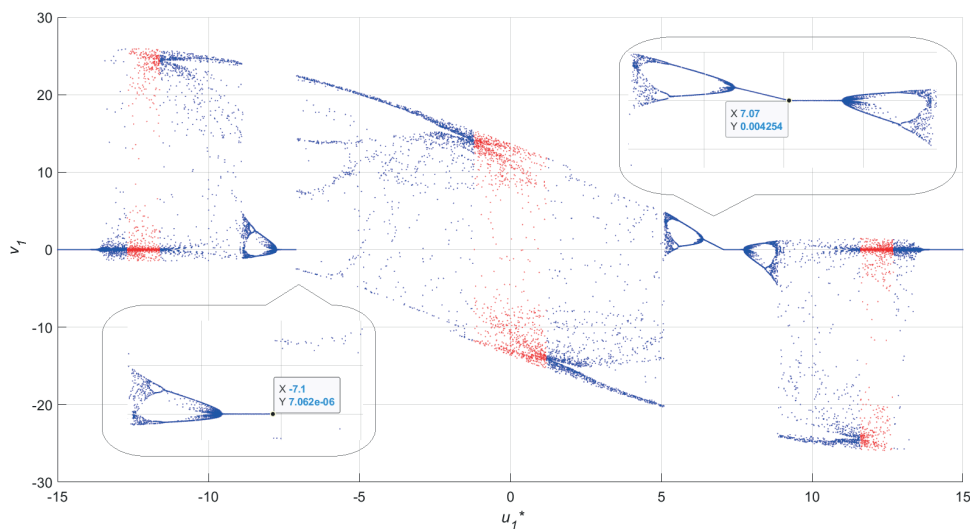


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая зависимость v_1 от управляющего параметра u_1^* при $\alpha = 15,6$

Fig. 5. The bifurcation diagram representing the dependency of the state space variable v_1 on the control parameter u_1^* when $\alpha = 15.6$

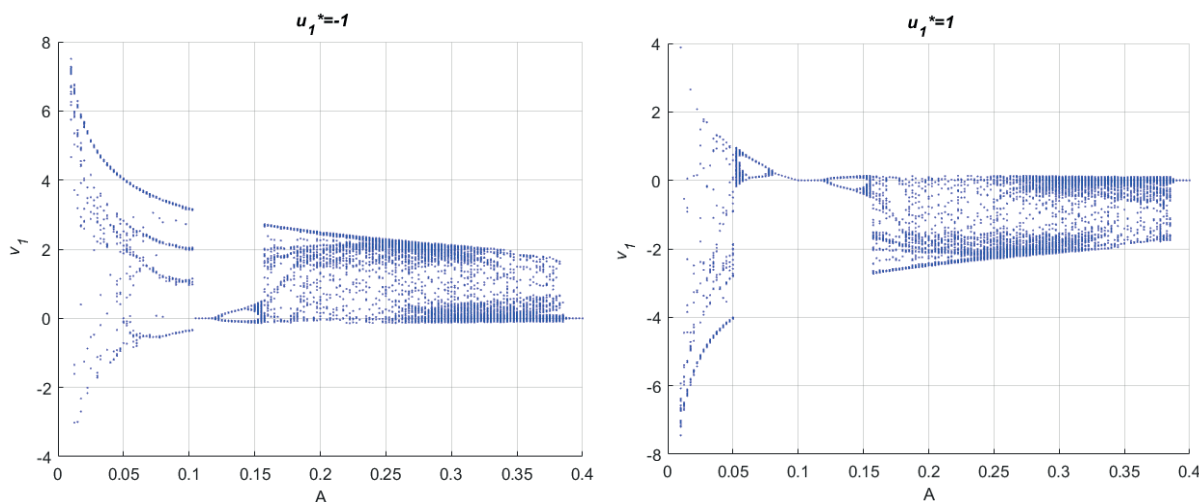


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма иллюстрирует зависимость переменной v_1 от величины A

Fig. 6. The bifurcation diagram represents the dependency of the state variable v_1 on the value A

Таким образом, условия Ландау позволили выявить стационарные значения u_1^* первой координаты u_1 пространства состояний \mathcal{R}^3 системы Чжуа, которые могут рассматриваться как начальные точки бифуркации системы. Кроме того, очевидно, что величина u_1^* может выступать новым управляющим параметром системы.

Другим важным отличием модифицированного с помощью метода матричной декомпозиции осциллятора Чжуа является зависимость режима работы от коэффициентов кубического полинома, служащего нелинейной функцией в рассматриваемой системе. В частности, при фиксированной величине u_1^* параметр A может выступать как управляющий. На рис. 6 показаны бифуркационные диаграммы, демонстрирующие переход к хаосу через удвоение периода при изменении величины A .

Заметим, что переход к хаотическому режиму через серию бифуркаций при изменении величины A наблюдается только в «модифицированном» осцилляторе Чжуа и не характерен для классической системы (1).

Заключение. Академик В. Л. Гинзбург относил сильнонелинейные явления, хаос и странные аттракторы к важнейшим проблемам в современной физике [22], отмечая при этом, что «использование современной вычислительной техники позволяет анализировать задачи, об исследовании которых раньше можно было только мечтать» [23, с. 424]. Действительно, в настоящей работе метод матричной декомпозиции, основанный на разложении векторной функции в кратный ряд Тейлора, в сочетании с компьютерным моделированием позволил провести анализ и реализовать визуализацию режимов работы хаотического осциллятора Чжуа. В то же время исследования в области нелинейных динамических систем с хаотическими режимами имеют значительную перспективу применения для решения задач обработки информации, а именно – для построения информационной технологии распознавания хаотической динамики осцилляторов.

С помощью метода матричной декомпозиции было выполнено разложение исходной системы в матричный ряд. В результате были получены линейный, квадратичный и кубический члены, полностью аппроксимирующие исходную систему. Отмечено, что первая переменная в пространстве состояний системы зависит от ее стационарного значения. Это позволяет использовать стационарное значение в качестве управляющего параметра, изменение которого приводит к хаосу через серию бифуркаций. В результате применения метода матричной декомпозиции удалось объяснить механизм перехода к хаосу с помощью модели начальной турбулентности Л. Д. Ландау. С помощью коэффициентов Ландау могут быть найдены начальные стационарные значения переменной в пространстве состояний.

Благодарности. Работа выполнена частично при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф20Р-329 «Теоретические основы исследования волновых процессов и явлений в ионосфере с использованием сигналов спутниковых радионавигационных систем») и частично при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований «Цифровые и космические технологии, безопасность человека, общества и государства», задания 1.10.3 (Т 103) и 1.3.1 (Т 31).

Acknowledgements. This work was partially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф20Р-329 “Theoretical foundations of the study of wave processes and phenomena in the ionosphere using signals from satellite radio navigation systems”), and The State Scientific Research Program “Digital and space technologies, security of man, society and state”, tasks 1.10.3 (T 103) and 1.3.1 (T 31).

Список использованных источников

1. Krot, A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system / A. M. Krot // EUSIPCO-2000: Proc. X Eur. Signal Process. Conf., Tampere, Finland, Sept. 4–8, 2000. – Tampere, 2000. – Vol. 3. – P. 2453–2456.
2. Крот, А. М. Анализ аттракторов сложных нелинейных динамических систем на основе матричных рядов в пространстве состояний / А. М. Крот // Информатика. – 2004. – № 1. – С. 7–16.
3. Krot, A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals / A. M. Krot // DSP-2009: Proc. 16th IEEE Int. Conf. Digital Signal Process., Thira, Santorini, Greece, July 5–7, 2009. – Santorini, 2009. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2009.5201123>
4. Крот, А. М. Анализ хаотических режимов функционирования схемы Чжуа с гладкой нелинейностью на основе метода матричной декомпозиции / А. М. Крот, В. А. Сычев // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2018. – Т. 63, № 4. – С. 501–512. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512>
5. Крот, А. М. Эволюционная модель хаотических волновых процессов в сложных динамических системах на основе теории матричной декомпозиции / А. М. Крот // Доповіді Нац. акад. наук України. – 2019. – № 9. – С. 12–19. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.09.012>
6. Wu, S. Chua's circuit family / S. Wu // Proc. IEEE. – 1987. – Vol. 75, № 8. – P. 1022–1032. <https://doi.org/10.1109/proc.1987.13847>
7. Zhong, G.-Q. Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity / G.-Q. Zhong // IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl. – 1994. – Vol. 41, № 12. – P. 934–941. <https://doi.org/10.1109/81.340866>
8. Matsumoto, T. A chaotic attractor from Chua's circuit / T. Matsumoto // IEEE Trans. Circuits Syst. – 1984. – Vol. 31, № 12. – P. 1055–1058. <https://doi.org/10.1109/tcs.1984.1085459>
9. Chua's equation with cubic nonlinearity / A. Huang [et al.] // Int. J. Bifurc. Chaos. – 1996. – Vol. 06, № 12a. – P. 2175–2222. <https://doi.org/10.1142/s0218127496001454>
10. Choose a Solver [Electronic resource] // Mathworks help center. – 2021. – Mode of access: <https://www.mathworks.com/help/simulink/ug/choose-a-solver.html>. – Date of access: 25.08.2021.
11. Ландау, Л. Д. К проблеме турбулентности / Л. Д. Ландау // Докл. Акад. наук СССР. – 1944. – Т. 44, № 8. – С. 339–342.
12. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для студентов физ. специальностей ун-тов: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; под ред. Л. П. Питаевского. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – Т. 6: Гидродинамика. – 736 с.
13. Ruelle, D. On the nature of turbulence / D. Ruelle, F. Takens // Commun. Math. Phys. – 1971. – Vol. 21, № 3. – P. 167–192. <https://doi.org/10.1007/bf01646553>
14. Newhouse, S. Occurrence of strange axiom A attractors near quasi periodic flows on T^m , $m \geq 3$ / S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens // Commun. Math. Phys. – 1978. – Vol. 64, № 1. – P. 35–40. <https://doi.org/10.1007/bf01940759>
15. Берже, П. Порядок в хаосе: о детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
16. Matsumoto, T. Chaos in electronic circuits / T. Matsumoto // Proc. IEEE. – 1987. – Vol. 75, № 8. – P. 1033–1057. <https://doi.org/10.1109/proc.1987.13848>
17. Feigenbaum, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations / M. J. Feigenbaum // J. Stat. Phys. – 1978. – Vol. 19, № 1. – P. 25–52. <https://doi.org/10.1007/bf01020332>
18. Feigenbaum, M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations / M. J. Feigenbaum // J. Stat. Phys. – 1979. – Vol. 21, № 6. – P. 669–706. <https://doi.org/10.1007/bf01107909>
19. Фейгенбаум, М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Фейгенбаум // Успехи физ. наук. – 1983. – Т. 141, вып. 2. – С. 343–374.
20. Hasler, M. J. Electrical circuits with chaotic behavior / M. J. Hasler // Proc. IEEE. – 1987. – Vol. 75, № 8. – P. 1009–1021. <https://doi.org/10.1109/proc.1987.13846>
21. Handbook of Chaos Control / ed.: E. Schöll, H. G. Schuster. – Weinheim: Wiley VCH Verlag GmbH, 2007. – 819 p. <https://doi.org/10.1002/9783527622313>
22. Гинзбург, В. Л. О физике и астрофизике: ст. и выступ. / В. Л. Гинзбург. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
23. Гинзбург, В. Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными (тридцать лет спустя, причем уже на пороге XXI века)? / В. Л. Гинзбург // Успехи физ. наук. – 1999. – Т. 169, № 4. – С. 419–441.

References

1. Krot A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system. *EUSIPCO-2000: Proceedings X European Signal Processing Conference, Tampere, Finland, September 4–8, 2000. Vol. 3*. Tampere, 2000, pp. 2453–2456.
2. Krot A. M. Analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems on the basis of matrix series in the state-space. *Informatica = Informatics*, 2004, no. 1, pp. 7–16 (in Russian).
3. Krot A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals. *DSP-2009: Proceedings 16th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Thira, Santorini, Greece, July 5–7, 2009*. Santorini, 2009, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2009.5201123>
4. Krot A. M., Sychou U. A. The analysis of chaotic regimes in Chua's circuit with smooth nonlinearity based on the matrix decomposition method. *Vestsi Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 4, pp. 501–512 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512>
5. Krot A. M. An evolutionary model of chaotic wave processes in complex dynamical systems based on the matrix decomposition theory. *Dopovidi Natsional'noi akademii nauk Ukraini = Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2019, no. 9, pp. 12–19 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.09.012>
6. Wu S. Chua's circuit family. *Proceedings of the IEEE*, 1987, vol. 75, no. 8, pp. 1022–1032. <https://doi.org/10.1109/proc.1987.13847>
7. Zhong G.-Q. Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1994, vol. 41, no. 12, pp. 934–941. <https://doi.org/10.1109/81.340866>
8. Matsumoto T. A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1984, vol. 31, no. 12, pp. 1055–1058. <https://doi.org/10.1109/tcs.1984.1085459>
9. Huang A., Pivka L., Wu C. H., Franz M. Chua's equation with cubic nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1996, vol. 06, no. 12a, pp. 2175–2222. <https://doi.org/10.1142/s0218127496001454>
10. *Choose a Solver*. Mathworks help center, 2021, Available at: <https://www.mathworks.com/help/simulink/ug/choose-a-solver.html> (accessed 25 August 2021).
11. Landau L. D. To the problem of turbulence. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1944, vol. 44, no. 8, pp. 339–342 (in Russian).
12. Landau L. D., Lifschitz E. M. *Fluid Mechanics*. Oxford, Pergamon, 1959. XIII, 539 p.
13. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 1971, vol. 21, no. 3, pp. 167–192. <https://doi.org/10.1007/bf01646553>
14. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. Occurrence of strange axiom A attractors near quasi periodic flows on T^m , $m \geq 3$. *Communications in Mathematical Physics*, 1978, vol. 64, no. 1, pp. 35–40. <https://doi.org/10.1007/bf01940759>
15. Bergé P., Pomeau Y., Vidal C. *L'ordre dans le chaos: Vers une approche déterministe de la turbulence*. Paris, Hermann, 1988.
16. Matsumoto T. Chaos in electronic circuits. *Proceedings of the IEEE*, 1987, vol. 75, no. 8, pp. 1033–1057. <https://doi.org/10.1109/proc.1987.13848>
17. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 1978, vol. 19, no. 1, pp. 25–52. <https://doi.org/10.1007/bf01020332>
18. Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 1979, vol. 21, no. 6, pp. 669–706. <https://doi.org/10.1007/bf01107909>
19. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems. *Los Alamos Science*. 1980, vol. 1, no.1, pp. 4–27.
20. Hasler M. J. Electrical circuits with chaotic behavior. *Proceedings of the IEEE*, 1987, vol. 75, no. 8, pp. 1009–1021. <https://doi.org/10.1109/proc.1987.13846>
21. Schöll E., Schuster H. G. (eds.). *Handbook of Chaos Control*. Weinheim, Wiley VCH Verlag GmbH, 2007. 819 p. <https://doi.org/10.1002/9783527622313>
22. Ginzburg V. L. *Physics and Astrophysics: A Selection of Key Problems*. Pergamon, 1985. 140 p.
23. Ginzburg V. L. What problems of physics and astrophysics seem now to be especially important and interesting (thirty years later, already on the verge of XXI century)? *Physics-Uspeski*, 1999, vol. 42, no. 4, pp. 353–373. <http://doi.org/10.1070/PU1999v042n04ABEH000562>

Приложение / Application

Для компьютерного моделирования рассматриваемых систем уравнений были разработаны модели в среде Simulink. Модель, реализующая систему (1), представлена на рис. П1. Модель системы (8) приведена на рис. П2.

Для визуального исследования влияния управляющего параметра на режим работы системы удобно пользоваться бифуркационной диаграммой, построенной, как описано далее. Задача диаграммы – наглядно представить такие режимы работы системы, как периодический (рис. П3, *a*), квазипериодический (рис. П3, *b*), хаотический с образованием спирального аттрактора (рис. П3, *c*) или аттрактора типа «двойной завиток» (рис. П3, *d*), а кроме того, проиллюстрировать изменение режимов в зависимости от управляющего параметра. Для построения аттракторов использовался не весь массив полученных значений, а 1700 отсчетов, начиная с 300-го. Таким образом удалось исключить начальный неустановившийся режим работы.

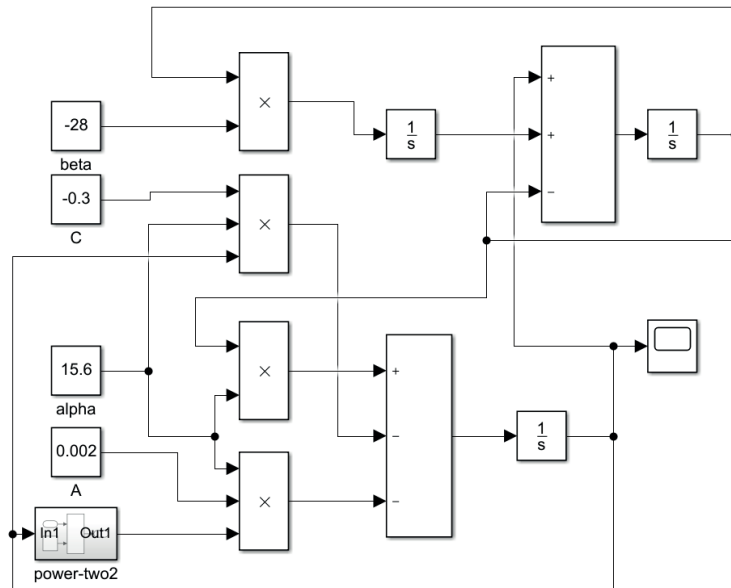


Рис. П1. Simulink-модель, реалізуючая сістэму Чжуа (1)

Fig. A1. The Simulink-model implementing the Chua circuit (1)

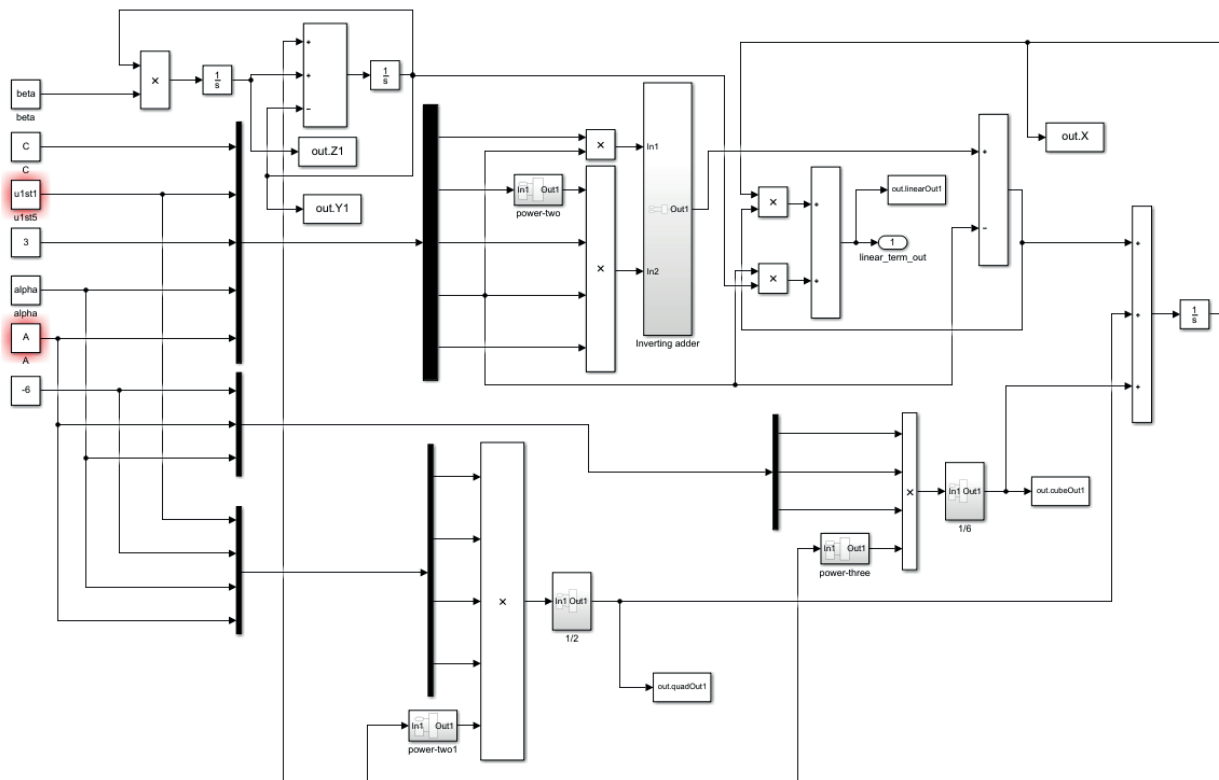


Рис. П2. Simulink-модель, реалізуючая сістэму Чжуа на аснове матрычнай дэкампазіцыі (8)

Fig. A2. The Simulink-model implementing the Chua circuit on the base of the matrix decomposition method (8)

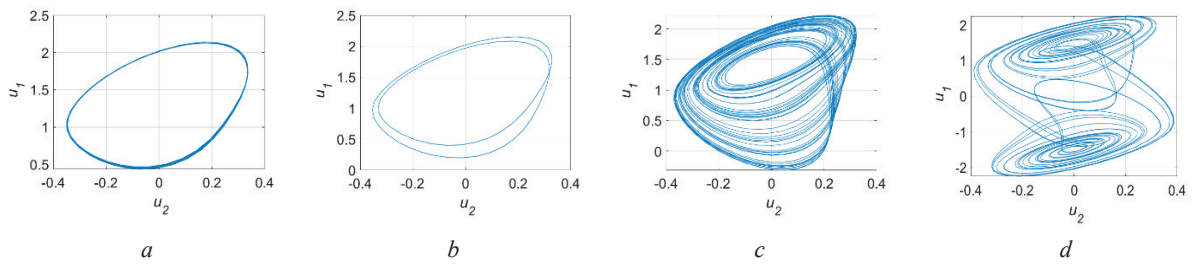


Рис. ПЗ. Аттракторы системы Чжуа:
 a – периодический, $\alpha = 12$; b – период-2, $\alpha = 13$; c – спиральный, $\alpha = 14$; d – «двойной завиток», $\alpha = 15,6$

Fig. A3. Attractors of the Chua system:
 the periodical one, $\alpha = 12$ (a); the period is 2, $\alpha = 13$ (b); the spiral one, $\alpha = 14$ (c); «double scroll», $\alpha = 15,6$ (d)

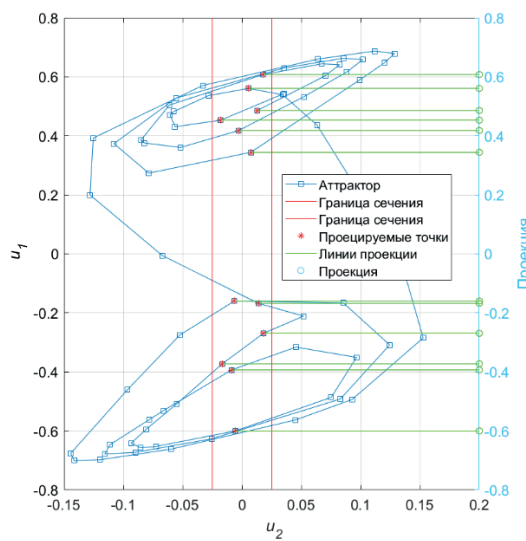


Рис. П4. Построение вертикального участка бифуркационной диаграммы для одного значения управляющего параметра

Fig. A4. Building a vertical part of a bifurcation diagram for the single value of a control parameter

Очевидно, что проекция сечения аттрактора линией, проходящей через $u_2 = 0$ может быть достаточно информативна, так как отражает характерные особенности аттракторов. Процесс построения проекции сечения более подробно проиллюстрирован рис. П4 на примере аттрактора типа «двойной завиток», построенного по 70 отсчетам. Как видно из рис. П4, при небольшом числе отсчетов ни один из них не соответствует условию $u_2 = 0$, следовательно, необходимо определить некоторый диапазон значений u_2 вблизи нуля. Для рисунка П4 он составляет $-0,25 < u_2 < 0,25$ (отмечен красными линиями). Все точки, для которых u_2 укладывается в указанный диапазон, отмечаются на оси ординат (ось «Проекция» на рис. П4). Видно, что наибольшая концентрация точек на оси «Проекция» соответствует областям притяжения в каждом из «завитков». В центре «завитков» существуют участки, по которым не проходят фазовые траектории системы. Такие участки будут выделяться на фоне скопления точек и по ним легко идентифицировать данный тип аттрактора на бифуркационной диаграмме. Для построения последней описанные действия производятся многократно для различных величин управляющего параметра. Точки, отмеченные на оси «Проекция», собираются на общем графике, пример которого показан на рис. 1. Видны участки существования затухающих колебаний сменяющихся периодическим режимом, переход к хаосу через удвоение периода с образованием «двойного завитка» и периодический режим большей амплитуды, характерный для больших значений $\alpha > 19$.

Описанный выше процесс может быть формализован в виде следующего алгоритма.

Алгоритм 1. Построение бифуркационной диаграммы.

Назначение: строит бифуркационную диаграмму переменной u_1 от u_1^* для СДУ Чжуа.

Вход:

$u_1(i, j)$ – первая переменная в пространстве состояний (двумерный массив значений);

$u_2(i, j)$ – вторая переменная в пространстве состояний (двумерный массив значений);

$u_1^*(j)$ – параметр (одномерный массив значений);

i – число значений переменных в пространстве состояний, полученных для одной величины u_1^* ;

j – число значений u_1^* , для которых получены $u_1(i, j)$ и $u_2(i, j)$;

k – число отсчетов значений переменных u_1 и u_2 , относящихся к неустоявшемуся режиму.

Выход:

графическое изображение бифуркационной диаграммы, где на оси абсцисс отмечены величины параметра, а на оси ординат – величины u_1 для каждого значения параметра.

Шаги:

1. определить цикл от 1 до j со счетчиком $cnt1$;

2. в цикле найти и сохранить в новом двумерном массиве tmp значения u_1 , которым соответствуют значения $-0,001 < u_2 < 0,001$.

Примечание. В среде Matlab это действие выполняется с помощью матричных вычислений и не требует дополнительного цикла, однако цикл может выглядеть следующим образом:

Определить цикл от k до i со счетчиком $cnt2$:

если $-0,001 < u_2(cnt2, cnt1) < 0,001$,

то $tmp(cnt2, cnt1) = u_1(cnt2, cnt1)$.

Завершить цикл от k до i :

1. завершить цикл от 1 до j ;

2. для каждого значения j построить на графике столбец точек, координата x которых равна j -му значению u_1^* , а координаты y – i -му числу из массива tmp .

Информация об авторах

Крот Александр Михайлович – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by. <https://orcid.org/0000-0003-0705-010X>

Сычёв Владислав Анатольевич – научный сотрудник, лаборатория робототехнических систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vsychyov@robotics.by. <https://orcid.org/0000-0002-1355-8965>

Information about the authors

Alexander M. Krot – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Chief of the Laboratory of Self-Organization System Modeling, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alxkrot@newman.basnet.by. <https://orcid.org/0000-0003-0705-010X>

Uladzislau A. Sychou – Researcher at the Laboratory of Robotic Systems, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vsychyov@robotics.by. <https://orcid.org/0000-0002-1355-8965>