УДК 512.543.76

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, И. О. ГОВОРУШКО

МНОГООБРАЗИЯ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЕРА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 24.04.2015)

Пусть $G=\langle g_1,\dots,g_m\rangle$ – конечно порожденная группа и K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любому представлению $\rho: G\to GL_n(K)$ можно поставить в соответствие набор элементов

$$(\rho(g_1),\dots,\rho(g_m))\in GL_n(K)^m.$$

Очевидно, что этот набор удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы G. Поэтому соответствие $\rho\mapsto(\rho(g_1),\dots,\rho(g_m))$ задает биекцию между множеством $\mathrm{Hom}(G,GL_n(K))$ и K-точками некоторого аффинного K-многообразия $R_n(G)\subset GL_n(K)^m$, называемого многообразием n-мерных представлений группы G.

Группа $GL_n(K)$ действует естественным образом (одновременным сопряжением компонент) на $R_n(G)$, и ее орбиты находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений G. В общем случае орбиты относительно этого действия не обязательно замкнуты и, следовательно, многообразие орбит (геометрический фактор) не является алгебраическим многообразием. Однако поскольку $GL_n(K)$ – редуктивная группа, то можно рассмотреть категорный фактор $R_n(G)//GL_n(K)$ (см. [1]), который мы будем обозначать $X_n(G)$ и называть многообразием характеров представлений G в $GL_n(K)$ (или просто многообразием характеров). Его точки параметризуют замкнутые $GL_n(K)$-орбиты, а замкнутость орбиты эквивалентна тому, что соответствующее представление вполне приводимо, и поэтому точки многообразия $X_n(G)$ находятся в биективном соответствии с классами эквивалентных вполне приводимых n-мерных представлений группы G. В дальнейшем через

$$\pi: R_n(G)\to X_n(G)$$

будем обозначать морфизм факторизации. Введем также в рассмотрение следующие множества:

$$R_n^s(G)=\{\rho\in R_n(G)\mid \rho \text{ неприводимо}\},$$
$$X_n^s(G)=\pi(R_n^s(G))\subset X_n(G).$$

Множества $R_n^s(G)$, $X_n^s(G)$ являются открытыми в топологии Зарисского подмножествами $R_n(G)$, $X_n(G)$ соответственно (см. [2]).

О многообразиях $R_n(G)$, $X_n(G)$ в общем случае известно очень мало. Детально изучен лишь класс конечных групп и частично – классы нильпотентных и разрешимых групп. Для бесконечных нильпотентных групп G бóльшая часть известных результатов собрана в книге [2], для разрешимых групп – в статье [3]. В работах [4, 5] получено описание многообразий представлений и соответствующих многообразий характеров фундаментальных групп компактных поверхностей.

В [6] приведено описание многообразий представлений $R_n(BS(p,q))$ групп Баумслага – Солитера $BS(p,q)$. Напомним, что группы Баумслага – Солитера $BS(p,q)$ имеют копредставление

$$BS(p,q)=\langle a,t \mid t a^p t^{-1}=a^q\rangle,$$

где p и q не равны нулю. Эти группы предложены Г. Баумслагом и Д. Солитером в [7] как примеры нехопфовых конечно представленных групп, т. е. групп, которые изоморфны своей собственной факторгруппе. Легко видеть, что $BS(p,q)\cong BS(-p,-q)$ и $BS(p,q)\cong BS(q,p)$. В дальнейшем мы будем рассматривать группы $BS(p,q)$ такие, что $p>|q|>1$ и $p,\ q$ – взаимно простые числа.

Цель настоящей работы – дать описание многообразий характеров $X_n(BS(p,q))$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\Omega(p,q)$ следующее множество матриц:

$$\Omega(p,q)=\{A\in GL_n(K)\mid A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\}.$$

Пусть $A\in\Omega(p,q)$ – фиксированная матрица и пусть $B_0\in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0A^pB_0^{-1}=A^q$. Обозначим через $Z(A)$ централизатор матрицы A в $GL_n(K)$ и рассмотрим морфизм

$$f_A: Z(A)\times GL_n(K)\to GL_n(K)\times GL_n(K),\ (C,X)\mapsto (XAX^{-1},XB_0CX^{-1}).$$

Замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} f_A$ обозначим $W(A)$. В [6] доказано, что каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой многообразия $R_n(BS(p,q))$ размерности n^2 и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(BS(p,q))$. Следующая теорема дает описание многообразий характеров $X_n(BS(p,q))$.

Т е о р е м а 1. 1. *Множествами $X(A)=\pi(W(A))$, где $A\in\Omega(p,q)$ – полупростая матрица, исчерпываются все неприводимые компоненты многообразия $X_n(BS(p,q))$.*

2. *Если $A_1,A_2\in\Omega(p,q)$ – неподобные полупростые матрицы, то $X(A_1)\cap X(A_2)=\varnothing$. Следовательно,* при $K=\mathbb{C}$ *многообразия $X(A)$ являются компонентами связности многообразия $X_n(BS(p,q))$ в комплексной топологии.*

3. *Если $A\in\Omega(p,q)$ – полупростая матрица, то все вполне приводимые представления из $W(A)$ являются суммой k неприводимых представлений, где $k=k(A)$ зависит только от матрицы A и* $\dim X(A)=k$.

4. *Каждое многообразие $X(A)$ является рациональным.*

Ниже нам понадобится описание неприводимых представлений группы $BS(p,q)$, полученное в [8]. Пусть d – такое натуральное число, что $d\mid (p^n-q^n)$, но $d\nmid (p^i-q^i)$ для всех $i<n$, α – примитивный корень из единицы степени d, s – произвольное решение сравнения $sq\equiv p \pmod d$, $c\in K^*$. Тогда пара матриц

$$A=\operatorname{diag}(\alpha,\alpha^s,\alpha^{s^2},\ldots,\alpha^{s^{n-1}}),\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ c & 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix} \tag{1}$$

определяет неприводимое представление $\rho_{(n,\alpha,c)}=(A,B)\in R_n(BS(p,q))$. При этом каждое неприводимое представление, с точностью до эквивалентности, получается таким образом. Легко видеть, что в условиях теоремы все собственные значения матрицы A попарно различны, т. е. A является регулярной полупростой. В дальнейшем нам понадобится следующая

Л е м м а. *Представления $\rho_{(n,\alpha,c)}$ и $\rho_{(n,\beta,c_1)}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $c=c_1$ и $\beta=\alpha^{s^i}$, $0\le i\le n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho_{(n,\alpha,c)}=(A_1,B_1)$ и $\rho_{(n,\beta,c_1)}=(A_2,B_2)$ эквивалентны. Тогда $\det B_1=\det B_2$, откуда $c=c_1$. Далее, из сопряженности матриц A_1 и A_2 следует, что $\beta=\alpha^{s^i}$,

$0 \le i \le n-1$. Наоборот, если $c = c_1$ и $\beta = \alpha^{s^i}$, то $B_1 = B_2$ и $B_1^i A_1 B_1^{-i} = A_2$. Значит, $\rho_{(n,\alpha,c)}$ и $\rho_{(n,\beta,c_1)}$ эквивалентны. Лемма доказана.

Для фиксированной матрицы $A \in \Omega(p,q)$ обозначим через $S(A)$ множество таких матриц $C \in \Omega(p,q)$, что спектр C совпадает со спектром A. Справедлива

Т е о р е м а 2. *Пусть $K = \mathbb{C}$ и $A \in \Omega(p,q)$. Тогда множество $T(A) = \cup_{C \in S(A)} W(C)$ является компонентой связности многообразия $R_n(BS(p,q))$ в комплексной топологии.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что если $(F,H) \in W(C)$, то спектры матриц F и C совпадают. Пусть $\sigma_i(X)$ обозначает i-й коэффициент характеристического полинома матрицы X и пусть $\lambda_i = \sigma_i(C)$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда для любой точки $(A_1, B_1) \in \operatorname{Im} f_C$ мы имеем $\sigma_i(A_1) - \lambda_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$, поскольку матрицы C и A_1 подобны. Это означает, что регулярная на $W(C)$ функция $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $\operatorname{Im} f_C$. Следовательно, $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $W(C)$. Поэтому $\sigma_i(F) - \lambda_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$. Таким образом, характеристические полиномы у C и F совпадают, т. е. C и F имеют одинаковые спектры.

Пусть A' – диагональная матрица, собственными значениями которой являются собственные значения матрицы A. Пусть $C \in S(A)$, $\rho = (C,D) \in W(C)$, $\mathcal{O}(\rho)$ – орбита представления ρ и $H = \overline{\mathcal{O}(\rho)}$. Известно, что $\mathcal{O}(\rho) \subset W(C)$, следовательно, $H \subset W(C)$. Далее, H содержит вполне приводимое представление $\rho' = (C', D')$ (см. [2, 9]). Переходя при необходимости к эквивалентному представлению, мы без ограничения общности можем считать, что $C' = \operatorname{diag}(C_1,\ldots,C_s)$, $D' = \operatorname{diag}(D_1,\ldots,D_s)$, где $\rho_i = (C_i, D_i)$ – неприводимое представление. Из (1) получаем, что матрица C' диагонализируема. Кроме того, спектры C' и C совпадают, т. е. $C' \in S(A)$. Значит, C' подобна A' и поэтому $\rho' \in W(A')$. Итак, мы получили, что для произвольной матрицы $C \in S(A)$ неприводимые компоненты $W(C)$ и $W(A')$ имеют непустое пересечение. Из этого следует связность множества $T(A) = \cup_{C \in S(A)} W(C)$. Если спектр матрицы $F \in \Omega(p,q)$ отличен от спектра A, то из рассуждений выше следует, что $W(F) \cap T(A) = \varnothing$. Это и означает, что множество $T(A)$ является компонентой связности многообразия $R_n(BS(p,q))$ в комплексной топологии. Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е 1. *Число компонент связности многообразия $R_n(BS(p,q))$ в комплексной топологии равно числу классов сопряженности диагональных матриц в $\Omega(p,q)$.*

С л е д с т в и е 2. *Если $A_1, A_2 \in \Omega(p,q)$ полупростые неподобные матрицы, то $W(A_1) \cap W(A_2) = \varnothing$.*

Напомним, что матрица $A \in GL_n(K)$ называется регулярной, если в ее жордановой нормальной форме каждому собственному значению соответствует единственный блок Жордана.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть $A \in \Omega(p,q)$ – регулярная полупростая матрица. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любой неприводимой компоненты $W(B)$, отличной от $W(A)$, справедливо $W(A) \cap W(B) = \varnothing$, т. е. в случае $K = \mathbb{C}$ многообразие $W(A)$ является компонентой связности многообразия $R_n(BS(p,q))$ в комплексной топологии.*

2. $W(A) = \operatorname{Im} f_A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Если $W(A) \cap W(B) \ne \varnothing$, то из доказательства теоремы 2 следует, что матрицы A и B имеют одинаковый спектр. Так как A – регулярная полупростая матрица, то B сопряжена с A и $W(A) = W(B)$.

2. Если $(A_1, B_1) \in W(A)$, то, как и выше, получаем, что A_1 подобна A. Следовательно, $(A_1, B_1) \in \operatorname{Im} f_A$. Предложение 1 доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если $W(A)$ содержит неприводимое представление, то все представления $\rho \in W(A)$ неприводимы, т. е. $W(A) \subset R_n^s(BS(p,q))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho = (C,D) \in W(A)$ – неприводимое представление. Тогда C – регулярная полупростая матрица, спектр которой равен спектру A. Следовательно, матрицы A и C подобны. Поэтому без ограничения общности можем считать, что A – диагональная матрица вида (1). Тогда, по предложению 1, $W(A) = \operatorname{Im} f_A$. Поскольку централизатор $Z(A)$ состоит из диагональных матриц, то любое представление $\rho_1 \in \operatorname{Im} f_A$ эквивалентно представлению вида $\rho_2 = (A, B)$, где

$$B=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопрягая ρ_2 диагональной матрицей $\operatorname{diag}(1,a_1,\dots,a_1\cdots a_{n-1})$, получим неприводимое представление вида (1). Предложение 2 доказано.

В качестве следствия теоремы 2 и предложения 2 получаем

С л е д с т в и е 3. *Многообразие неприводимых представлений $R_n^s(BS(p,q))$ является открытым и замкнутым подмножеством в $R_n(BS(p,q))$.*

Важную роль в доказательстве теоремы 1 играет

Т е о р е м а 3. *Если $A\in\Omega(p,q)$ – полупростая матрица, то множество вполне приводимых представлений плотно в $W(A)$. Пусть $\rho=\rho_{(n_1,\alpha_1,c_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,c_k)}\in W(A)$ – вполне приводимое представление, где $\rho_{(n_i,\alpha_i,c_i)}$ определены в (1). Тогда все вполне приводимые представления из $W(A)$ с точностью до эквивалентности имеют вид*

$$\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)} \tag{2}$$

для произвольных $b_1,\dots,b_k\in K^*$. В частности, каждое вполне приводимое представление из $W(A)$ является суммой k неприводимых представлений, где $k=k(A)$ зависит только от матрицы A. Если A – регулярная полупростая матрица, то $W(A)=\operatorname{Im} f_A$ и все представления из $W(A)$ вполне приводимы и эквивалентны представлениям вида (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $W(A)$ содержит хотя бы одно вполне приводимое представление. Действительно, если $\varphi\in W(A)$ – произвольное представление, то замыкание $\overline{\varphi}$ орбиты φ содержится в $W(A)$. Выше мы уже отмечали, что $\overline{\varphi}$ содержит вполне приводимое представление ρ. Пусть $\rho=\rho_{(n_1,\alpha_1,c_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,c_k)}$ и

$$U=\{(x_1\dots x_k)\in\mathbb{A}^k \mid x_1\dots x_k\neq 0\}.$$

Рассмотрим морфизм

$$\Psi_\rho: GL_n(K)\times U\to W(A),\quad (X,b_1,\dots,b_k)\mapsto X(\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)})X^{-1}. \tag{3}$$

Докажем, что Ψ_ρ – доминантный морфизм. Пусть $(X,d_1,\dots,d_k)\in\Psi_\rho^{-1}(\Psi_\rho(X_0,b_1,\dots,b_k))$, где мы предполагаем, что $b_1,\dots,b_k$ попарно различны. Тогда представления $\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)}$ и $\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}$ эквивалентны. Следовательно, набор $(d_1,\dots,d_k)$ является перестановкой набора $(b_1,\dots,b_k)$ и имеется лишь конечное число возможностей для выбора $d_1,\dots,d_k$. Зафиксируем набор $(d_1,\dots,d_k)$. Тогда имеем равенство

$$X_0^{-1}X(\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)})X^{-1}X_0=\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)}. \tag{4}$$

Пусть Z_0 – фиксированная матрица такая, что

$$Z_0(\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)})Z_0^{-1}=\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}.$$

Тогда, сопрягая обе части (4) при помощи Z_0, получаем, что $Z_0X_0^{-1}X$ централизует вполне приводимое представление $\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}$. В этом представлении слагаемые $\rho_{(n_i,\alpha_i,d_i)}$ и $\rho_{(n_j,\alpha_j,d_j)}$ не эквивалентны при $i\neq j$ в силу того, что $d_1,\dots,d_k$ попарно различны. Значит, $Z_0X_0^{-1}X=\operatorname{diag}(x_1E_{n_1},\dots,x_kE_{n_k})$ для произвольных $x_1,\dots,x_k\in K^*$, откуда

$$X = X_0 Z_0^{-1} \operatorname{diag}(x_1 E_{n_1}, \ldots, x_k E_{n_k}).$$

Следовательно, $\dim \Psi_\rho^{-1}(\Psi_\rho(X_0, b_1, \ldots, b_k)) = k$ и по теореме о размерности слоев морфизма имеем

$$\dim \overline{\operatorname{Im}(\Psi_\rho)} = (n^2 + k) - k = n^2 = \dim W(A),$$

что и доказывает доминантность Ψ_ρ.

Докажем теперь, что все вполне приводимые представления из $W(A)$ лежат в $\operatorname{Im}(\Psi_\rho)$. Пусть $\delta = \rho_{(m_1,\beta_1,d_1)} + \cdots + \rho_{(m_h,\beta_h,d_h)} \in W(A)$. Определим морфизм Ψ_δ аналогично морфизму Ψ_ρ. Как и выше доказывается, что Ψ_δ доминантен. Тогда $\operatorname{Im}(\Psi_\rho)$ содержит открытое подмножество $U_1 \subset W(A)$, а $\operatorname{Im}(\Psi_\delta)$ – открытое подмножество $U_2 \subset W(A)$. Пусть $\gamma \in U_1 \cap U_2$. Тогда γ эквивалентно, с одной стороны, представлению вида $\rho_{(n_1,\alpha_1,a_1)} + \cdots + \rho_{(n_k,\alpha_k,a_k)}$, а с другой – представлению вида $\rho_{(m_1,\beta_1,c_1)} + \cdots + \rho_{(m_h,\beta_h,c_h)}$. Отсюда немедленно получаем, что $h = k$ и после подходящей перенумерации слагаемых имеем, что представления $\rho_{(n_i,\alpha_i,a_i)}$ и $\rho_{(m_i,\beta_i,c_i)}$ эквивалентны, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, $n_i = m_i$ и по лемме $a_i = c_i$ и $\beta_i = \alpha_i^{s^j}$ для некоторого j, где s определено в (1). Но тогда по лемме представление $\rho_{(m_i,\beta_i,d_i)}$ эквивалентно представлению $\rho_{(n_i,\alpha_i,d_i)}$. Следовательно, δ эквивалентно представлению $\rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \cdots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)} \in \operatorname{Im}(\Psi_\rho)$, откуда $\delta \in \operatorname{Im}(\Psi_\rho)$.

Пусть теперь $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ – регулярная диагональная матрица. Тогда $W(A) = \overline{\operatorname{Im} f_A}$ по предложению 1. Пусть $\rho = (A, B) \in W(A)$. Докажем, что ρ вполне приводимо. Замыкание $\overline{\mathcal{O}(\rho)}$ содержит вполне приводимое представление $\rho' = (A, B')$, и без ограничения общности можно считать, что ρ' имеет вид $\rho' = \rho_{(n_1,\alpha_1,d_1)} + \cdots + \rho_{(n_k,\alpha_k,d_k)}$, где $\rho_{(n_i,\alpha_i,d_i)} = (A_i, B_i)$ и матрицы A_i, B_i имеют вид (1). Отсюда получаем, что $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$, $B = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$. Поскольку

$$BA^pB^{-1} = A^q = B'A^pB'^{-1},$$

то $B = B'Y$, где $Y \in Z(A^p) = Z(A)$. Так как A – регулярная полупростая матрица, то $Y = \operatorname{diag}(Y_1, \ldots, Y_k)$ – диагональная матрица. Значит, $B = \operatorname{diag}(B_1Y_1, \ldots, B_kY_k)$. Рассмотрим представления $\delta_i = (A_i, B_iY_i)$. Сопрягая δ_i подходящей диагональной матрицей, мы получим представление $\delta_i' = (A_i, B_i')$, имеющее вид (1). Значит, δ_i неприводимо и $\rho = \delta_1 + \cdots + \delta_k$ – вполне приводимо, что и требовалось доказать. Теорема 3 доказана.

Морфизм факторизации $\pi : R_n(G) \to X_n(G)$ обладает следующими общими свойствами (см. [10, § 3]).

Свойство $GL_n(K)$-замкнутости. Если $Y \subset R_n(G)$ – замкнутое $GL_n(K)$-инвариантное подмножество в $R_n(G)$, то $\pi(Y)$ замкнуто в $X_n(G)$.

Свойство разделения. Пусть $(X_i)_{i \in I}$ – семейство замкнутых $GL_n(K)$-инвариантных подмножеств в $R_n(G)$, тогда $\pi\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} \pi(X_i)$. В частности, образы двух непересекающихся замкнутых $GL_n(K)$-инвариантных подмножеств многообразия $R_n(G)$ не пересекаются.

Доказательство теоремы 1. Каждый слой $\pi^{-1}(x)$ содержит вполне приводимое представление. Действительно, $\pi^{-1}(x)$ является замкнутым и $GL_n(K)$-инвариантным множеством. Поэтому если $\rho \in \pi^{-1}(x)$, то $\overline{\mathcal{O}(\rho)} \subset \pi^{-1}(x)$ и $\overline{\mathcal{O}(\rho)}$ содержит вполне приводимое представление. Далее, если $\rho = (A, B)$ – вполне приводимое представление, то эквивалентно прямой сумме $\rho_1 + \cdots + \rho_s$ неприводимых представлений $\rho_i = (A_i, B_i)$ вида (1), где A_i – полупростая матрица. Следовательно, матрица A полупроста, поскольку подобна матрице $\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_s)$. Таким образом, $\pi(\rho) \in X(A)$ и

$$X_n(BS(p,q)) = \bigcup_{A \in \Omega(p,q)} \pi(W(A)),$$

где объединение берется по полупростым матрицам A. В силу свойства замкнутости морфизма π множества $X(A) = \pi(W(A))$ замкнуты. Если $A_1, A_2 \in \Omega(p,q)$ – не подобные полупростые матрицы, то по следствию 2 $W(A_1)\cap W(A_2)=\varnothing$. Тогда по свойству разделения морфизма π имеем $X(A_1)\cap X(A_2)=\varnothing$. Таким образом, замкнутые множества $X(A)$ попарно не пересекаются и их объединением является $X_n(BS(p,q))$. Значит, множества $X(A)$, где $A\in\Omega(p,q)$ – полупростая матрица, – это в точности все неприводимые компоненты многообразия характеров $X_n(BS(p,q))$. Тем самым мы доказали пункты 1 и 2 теоремы 1.

Докажем пункт 3. Пусть $\rho=\rho_{(n_1,\alpha_1,b_1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,b_k)}\in W(A)$. Рассмотрим представление $\rho_1=\rho_{(n_1,\alpha_1,1)}+\dots+\rho_{(n_k,\alpha_k,1)}\in W(A)$. Среди представлений $\rho_{(n_i,\alpha_i,1)}$ есть попарно эквивалентные. Сгруппируем их в наборы попарно эквивалентных представлений. Пусть среди них есть m_i представлений, эквивалентных $\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$, $i=1,\dots,r$, и представления $\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$ попарно неэквивалентны. По лемме для любых $x,y\in K^*$ представления $\rho_{(h_i,\beta_i,x)}$ и $\rho_{(h_j,\beta_j,y)}$ не эквивалентны. Тогда ρ_1 эквивалентно представлению

$$\rho_2=m_1\rho_{(h_1,\beta_1,1)}+\dots+m_r\rho_{(h_r,\beta_r,1)}, \tag{5}$$

где $m_i\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$ обозначает сумму m_i экземпляров представления $\rho_{(h_i,\beta_i,1)}$. Пусть

$$U=\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{A}^k \mid x_1\cdots x_k\neq 0\}\subset\mathbb{A}^k.$$

Рассмотрим морфизм

$$\psi:U\to X(A),\quad \psi(x_1,\dots,x_k)=\pi(\rho_{(h_1,\beta_1,x_1)}+\rho_{(h_2,\beta_2,x_2)}+\dots+\rho_{(h_k,\beta_k,x_k)}).$$

По теореме 3 каждое вполне приводимое представление $\delta\in W(A)$ эквивалентно представлению вида $\rho_{(h_1,\beta_1,x_1)}+\dots+\rho_{(h_k,\beta_k,x_k)}$ для некоторого набора $(x_1,\dots,x_k)\in U$. Следовательно, ψ – сюръективный морфизм. Вычислим слои морфизма ψ. Пусть $(y_1,\dots,y_k)\in\psi^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_k))$. Тогда представления $\rho_{(h_1,\beta_1,x_1)}+\dots+\rho_{(h_k,\beta_k,x_k)}$ и $\rho_{(h_1,\beta_1,y_1)}+\dots+\rho_{(h_k,\beta_k,y_k)}$ являются вполне приводимыми и имеют равные характеры. Следовательно, они эквивалентны и по лемме набор $(y_1,\dots,y_k)$ является следующей перестановкой набора $(x_1,\dots,x_k)$:

$$(y_{m_1+\dots+m_{i-1}+1},\dots,y_{m_1+\dots+m_i})-\text{перестановка }(x_{m_1+\dots+m_{i-1}+1},\dots,x_{m_1+\dots+m_i}),$$

$i=1,\dots,r$. Отсюда немедленно получаем, что каждый слой $\psi^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_k))$ конечен. Значит, по теореме о размерности слоев морфизма $\dim X(A)=k$.

Докажем пункт 4. Отождествим поле рациональных функций $K(X(A))$ с подполем $\psi^*(K(X(A)))$ поля $K(U)=K(x_1,\dots,x_k)$, где $x_1,\dots,x_k$ мы рассматриваем как независимые переменные. Обозначим через $T=S_{m_1}\times\dots\times S_{m_r}$ прямое произведение симметрических групп $S_{m_1},\dots,S_{m_r}$. Зададим действие группы T на $K(x_1,\dots,x_k)$ следующим образом. Группа S_{m_j} действует перестановками на множестве $\{x_{m_1+\dots+m_{j-1}+1},\dots,x_{m_1+\dots+m_j}\}$, состоящем из m_j переменных, и оставляет неподвижными остальные переменные. Анализ рассуждения в пункте 3 показывает, что слой $\psi^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_k))$ совпадает с орбитой действия группы T на набор $(x_1,\dots,x_k)$. Поэтому поле $\psi^*(K(X(A)))$ совпадает с полем инвариантов $K(x_1,\dots,x_k)^T$. Из классических результатов о симметрических многочленах следует, что поле $K(x_1,\dots,x_k)^T$ является чисто трансцендентным расширением поля K. Это и доказывает рациональность $X(A)$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получаем

С л е д с т в и е 4. *Многообразие характеров неприводимых представлений $X_n^s(BS(p,q))$ открыто и замкнуто в $X_n(BS(p,q))$. При этом каждая неприводимая компонента многообразия $X_n^s(BS(p,q))$ имеет размерность* 1.

С л е д с т в и е 5. *Размерности* $\dim X(A)$ *неприводимых компонент* $X(A)$ *многообразия* $X_n(BS(p,q))$ *принимают все значения от* 1 *до n. В частности,* $\dim X_n(BS(p,q))=n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из описания неприводимых представлений группы $BS(p,q)$ в [8] следует, что для любого натурального k существует неприводимое представление группы $BS(p,q)$

степени *k*. Пусть $s \le n$ и $k_1 + \cdots + k_s = n$ – произвольное разбиение числа *n* и $\rho_i : BS(p,q) \to GL_{k_i}(K)$ – неприводимое представление. Далее, пусть $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_s$ – вполне приводимое представление группы $BS(p,q)$ степени *n*. Тогда $\rho \in W(A)$ для некоторой неприводимой компоненты $W(A)$ и по теореме 1 $\dim X(A) = s$. Максимальная размерность *n* достигается лишь в том случае, когда $k_1 = \cdots = k_n = 1$ и представление ρ является прямой суммой одномерных представлений.

Литература

1. *Mumford D., Fogarty J.* Geometric invariant theory. Berlin; Heidelberg; New York, 1982.
2. *Lubotzky A., Magid A.* // Memoirs AMS. 1985. Vol. 58, N 336. P. 1–116.
3. *Rudnick Z.* // J. Pure and Applied Algebra. 1987. Vol. 45. P. 261–272.
4. *Benyash-Krivetz V. V., Rapinchuk A. S., Chernousov V. I.* // Israel J. Math. 1996. Vol. 93. P. 29–71.
5. *Беняш-Кривец В. В., Черноусов В. И.* // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 7. С. 47–92.
6. *Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О.* // Вестн. БГУ, сер. 1. 2014. № 2. С. 43–45.
7. *Baumslag G., Solitar D.* // Bull. AMS. 1962. Vol. 68, N 3. P. 199–201.
8. *McLaury D.* // J. Group Theory. 2012. Vol. 15, N 4. P. 543–552.
9. *Artin M.* // J. Algebra. 1969. Vol. 11. P. 532–563.
10. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М., 1987.

V. V. BENIASH-KRYVETS, I. O. GOVORUSHKO

CHARACTER VARIETIES OF BAUMSLAG – SOLITAR GROUPS

Summary

Character varieties of Baumslag – Soliter groups are investigated. Irreducible components of these varieties are found, their dimensions are calculated, and their rationality is proved.