ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.956.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-300-311

Поступила в редакцию 23.03.2021
Received 23.03.2021

В. И. Корзюк[1,2], Я. В. Рудько[2]

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ИЗ МЕХАНИКИ С НЕГЛАДКИМИ УСЛОВИЯМИ КОШИ

Аннотация. Изучается смешанная задача в четверти плоскости для системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания в однородных релаксирующих стержнях постоянного поперечного сечения, которые соответствуют модели Максвелла. На нижнем основании задаются условия Коши, причем одно из них имеет разрыв первого рода в точке. На боковой границе задается гладкое граничное условие. Система порождает уравнение Клейна – Гордона – Фока. Частное решение строится двумя способами: в явном аналитическом виде, с продолжением функции, и методом характеристик как решение интегрального уравнения, без продолжения функции. Устанавливаются условия, при которых решение обладает достаточной степенью гладкости.

Ключевые слова: модель Максвелла, уравнение Клейна – Гордона – Фока, метод характеристик, частное решение, смешанная задача

Для цитирования. Корзюк, В. И. Частное решение задачи для системы уравнений из механики с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 3. – С. 300–311. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-300-311

Viktor I. Korzyuk[1,2], Jan V. Rudzko[2]

[1]*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

A PARTICULAR SOLUTION OF A PROBLEM FOR A SYSTEM OF EQUATIONS FROM MECHANICS WITH NONSMOOTH CAUCHY CONDITIONS

Abstract. In this article, we study a mixed problem in a quarter-plane for a system of differential equations, which describes vibrations in a string from viscoelastic material, which corresponds to Maxwell material. At the bottom of the boundary, the Cauchy conditions are specified, and one of them has a discontinuity of the first kind at one point. A smooth boundary condition is set at the side boundary. The Klein – Gordon – Fock equation is derived for one of the system's functions. We find a particular solution in two ways. The first method builds it in an explicit analytical form (with a continuation of one function), and the second one constructs it as a solution of an integral equation using the method of characteristics (without continuation of one function). Conditions are established under which the solution has sufficient smoothness.

Keywords: Maxwell material, Klein – Gordon – Fock equation, method of characteristics, particular solution, mixed problem

For citation. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. A particular solution of a problem for a system of equations from mechanics with nonsmooth Cauchy conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 300–311 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-300-311

Введение. Основное явление в теории механического удара – это распространение волн смещений в твердых телах. Экспериментальное изучение почти всех явлений удара весьма затруднительно. При аналитическом изучении вызванных ударом колебаний интерес представляют задачи, в которых груз после удара остается в соприкосновении с ударяемым телом, в котором рассматриваются и описываются колебательные процессы [1, 2]. Как правило, математическая модель подобных явлений представляет собой смешанные задачи для уравнений или систем уравнений с частными производными с присутствием начальных функций, отличных от нуля на множестве нулевой меры [3–5]. Явление удара можно рассматривать не только в упругих, но и в упруго-вязких телах, как это сделано в [6, 7].

В данной работе исследуется система, которая моделирует различные колебательные процессы в стержнях, соответствующих моделям типа Максвелла [8]. Первое уравнение системы представляет собой уравнение движения [9] (аналог второго закона Ньютона), а второе является аналогом закона Гука в моделях типа Максвелла [8].

В ходе решения задачи мы столкнемся со смешанной задачей для уравнения Клейна – Гордона – Фока. В настоящее время для телеграфного уравнения изучены в основном такие типы граничных задач, как задача Коши (решалась методом преобразования Фурье [10], сведением к задаче Коши для волнового уравнения, но с повышением размерности [11], методом характеристик [12], методом функции Римана [13, 14]), смешанная задача в полуполосе (решалась методом Фурье [15]), смешанная задача в случае сопряжения разнородных областей в виде полуполос (решалась методом преобразования Лапласа [16]), также методом характеристик были получены решения первой смешанной задачи в полуполосе [17] и в криволинейной полуполосе [18, 19], смешанной задачи в полуполосе с косыми или характеристическими производными в граничных условиях [20, 21]. Но следует сказать, что почти не рассматриваются задачи в полуплоскости для уравнения Клейна – Гордона – Фока, хотя в [22] строится формальное решение такой задачи с однородными условиями Коши, но не изучается вопрос единственности решения. В настоящей работе будет рассмотрено решение первой смешанной задачи для одномерного уравнения Клейна – Гордона – Фока, которое является частным случаем телеграфного уравнения, в полуплоскости. Близкими к данной статье являются работы [12, 23].

Физический вывод системы уравнений. Рассмотрим в одномерном случае упруго-вязкий релаксирующий стержень. Для него верно уравнение движения $\rho\partial_t^2 u = F + \partial_x \sigma,$ где F – внешняя объемная сила, также при этом связь между деформацией ε и напряжением σ подчиняется закону $\sigma + n\partial_t\sigma = K\partial_t\varepsilon,$ с учетом определения деформации $\varepsilon = \partial_x u$ получаем систему уравнений

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x} + F, \qquad K\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = n\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma, \tag{1}$$

где ρ – плотность материала стержня, n – время релаксации, H – мгновенный модуль упругости, $K = nH$, u – дилатации (смещения) стержня. Если $K/(\rho n) > 0,$ то система уравнений (1) является гиперболической по классификациям С. К. Годунова [24] и Дж. К. Стрикверды [25].

Постановка задачи. В области $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему уравнений

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) + f(t,x), \quad \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(t,x) = \beta\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + w(t,x), \tag{2}$$

где ρ, γ и β – некоторые положительные константы. К уравнению (2) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$w(0,x) = \sigma(x), \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad x\in[0,\infty), \quad \partial_t w(0,0) = w_0, \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x) = \begin{cases}\psi_1, & x = 0,\\ \psi_2(x), & x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{3}$$

на другой части границы – граничное условие Дирихле

$$w(t,0) = \mu(t), \; t\in[0,\infty), \tag{4}$$

где w_0 и ψ_1 – некоторые константы (w_0 имеет физический смысл материальной скорости напряжения, т. е. скорость в лагранжевых координатах начального напряженного состояния в точке удара).

Будем полагать, что функции f, σ, φ, ψ_2, μ достаточно гладкие; $C^{m,s}(\overline{Q})$ – множество непрерывно-дифференцируемых функций порядка $\min(m,s)$ на множестве $\overline{Q}$, имеющих на $\overline{Q}$ непрерывные производные порядка m по переменной t и порядка s переменной x.

Обозначим через $C^k(\tilde{Q})$ множество функций, которые принадлежат множеству $C^k(\overline{Q})$ за исключением точек вида $(t,0)$ и (t,at), $t\in[0,\infty)$, т. е. $\tilde{Q} = (\overline{Q}\setminus\{(t,0)\})\setminus\{(t,at)\}$, $k = 2,3$. Предположим, что u принадлежит множеству $C^3(\tilde{Q})$, а w принадлежит хотя бы классу $C^2(\tilde{Q})$.

Продифференцируем первое уравнение системы (2) по x, а второе по t:

$$\rho\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}=\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{5}$$

Выражая $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}$ из обоих уравнений и приравнивая, получаем уравнение для w:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\beta}{\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial w}{\partial t},\qquad (t,x)\in\tilde{Q}. \tag{6}$$

Из условия $\partial_t u(0,x)=\psi_2(x)$ следует $\partial_x\partial_t u(0,x)=\psi_2'(x)$, $x>0$. Из соотношений (3) следует равенство $\gamma\psi_2'(x)=\beta\partial_t w(0,x)+w(0,x)$, или $\partial_t w(0,x)=\dfrac{\gamma}{\beta}\psi_2'(x)-\dfrac{1}{\beta}w(0,x)$, $x>0$. В результате относительно искомой функции w имеем задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial f}{\partial x},\qquad (t,x)\in\tilde{Q}, \tag{7}$$

$$w(0,x)=\sigma(x),\quad \partial_t w(0,x)=\begin{cases} w_0 & x=0,\\ \dfrac{\gamma}{\beta}\psi_2'(x)-\dfrac{1}{\beta}\sigma(x), & x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{8}$$

$$w(t,0)=\mu(t),\qquad t\in[0,\infty). \tag{9}$$

Упростим уравнение (7). Для этого сделаем замену $w(t,x)=v(t,x)\exp\left(-\dfrac{t}{2\beta}\right)$, и в результате получим уравнение Клейна – Гордона – Фока в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\gamma}{\rho\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4\beta^2}\right)v(t,x)=\frac{\gamma}{\rho\beta}\exp\left(\frac{t}{2\beta}\right)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x). \tag{10}$$

Граничные для функции v условия легко находятся и определяются следующим образом:

$$v(0,x)=\sigma(x),\qquad \partial_t v(0,x)=\begin{cases} w_0+\sigma(0)/(2\beta), & x=0,\\ \dfrac{\gamma}{\beta}\psi_2'(x)-\dfrac{1}{2\beta}\sigma(x), & x\in(0,\infty),\end{cases} \tag{11}$$

$$v(t,0)=\mu(t)\exp\left(\frac{t}{2\beta}\right),\qquad t\in[0,\infty). \tag{12}$$

Для удобства проведения дальнейших расчетов введем обозначения:

$$a^2=\gamma/(\rho\beta),\quad c^2=1/(4\beta^2),\quad \tilde{f}(t,x)=a^2\exp\big(t/(2\beta)\big)\partial_x f(t,x),\quad \tilde{\mu}(t)=\mu(t)\exp\big(t/(2\beta)\big),$$
$$\vartheta_1=w_0+\sigma(0)/(2\beta),\quad \vartheta_2(x)=\big(2\gamma\psi_2'(x)-\sigma(x)\big)/(2\beta).$$

Уравнение Клейна – Гордона – Фока. Для отыскания функции v было получено уравнение Клейна – Гордона – Фока. Представляется необходимым исследовать некоторые свойства этого уравнения. Пусть в области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, для удобства представляющей собой характеристический параллелограмм, рассматривается уравнение Клейна – Гордона – Фока в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-c^2\right)v(t,x)=\tilde{f}(t,x), \tag{13}$$

Заметим, что уравнение (13) заменой независимых переменных $\xi = x - at$ и $\eta = x + at$ может быть приведено ко второму каноническому виду. В результате интегрирования после замены независимых переменных уравнение (13) преобразуется в интегральное уравнение

$$v(t,x) = -\frac{1}{4a^2} T(c^2 v + \tilde{f})(t,x) + g^{(1)}(x-at) + g^{(2)}(x+at), \tag{14}$$

где $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – некоторые дважды непрерывно-дифференцируемые функции в области Ω, T – линейный вполне непрерывный оператор, имеющий вид

$$(T\bullet)(t,x) := \int_{\xi_0}^{x-at} dy \int_{\eta_0}^{x+at} \bullet\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz, \tag{15}$$

где величины ξ_0 и η_0 определяются исходя из области Ω.

Пусть $\tilde{f} \in C^1(\Omega)$. Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Функция v принадлежит классу $C^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению* (13) *тогда и только тогда, когда она представлена в виде* (14) *и функции $g^{(j)}$ из класса $C^2\left(\mathfrak{D}(g^{(j)})\right), \mathfrak{D}(g^{(j)})$ – области определения $g^{(j)}$ для $(t,x) \in \Omega,\ j = 1,2.$*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (13). Сделав невырожденную замену независимых переменных $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ и обозначив $v(t,x) = h(\xi,\eta)$, получим новое дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{c^2}{4a^2}\right) h(\xi,\eta) = -\frac{1}{4a^2}\tilde{f}\left(\frac{\xi-\eta}{2a}, \frac{\xi+\eta}{2}\right). \tag{16}$$

Его интегрируем дважды. В результате получим уравнение

$$h(\xi,\eta) = -\frac{1}{4a^2}\int_{\xi_0}^{\xi} dy \int_{\eta_0}^{\eta}\left[c^2 h(y,z) + \tilde{f}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right] dz + g^{(1)}(\xi) + g^{(2)}(\eta). \tag{17}$$

Возвращаясь к переменным t и x, получаем интегральное уравнение (14). Отсюда также следует принадлежность функций $g^{(j)}$ классам $C^2\left(\mathfrak{D}(g^{(j)})\right)$, $j = 1,2$, если $v \in C^2(\Omega)$. Значит, любое решение уравнения (13) является решением уравнения (14).

Теперь функцию v, определяемую формулой (14), где $g^{(j)}$ из класса $C^2\left(\mathfrak{D}(g^{(j)})\right)$, подставляем в уравнение (13). В результате получаем верное равенство. Значит, любое решение уравнения (14) является решением уравнения (13).

Наряду с неоднородным уравнением (14) будем рассматривать однородное уравнение

$$v^{(0)}(t,x) = -\frac{1}{4a^2} T(c^2 v^{(0)})(t,x) + g^{(1)}(x-at) + g^{(2)}(x+at). \tag{18}$$

Т е о р е м а 2. *Любое решение неоднородного уравнения* (14) *представляет собой сумму частного решения уравнения* (14) *и общего решения уравнения* (18).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два решения уравнения (14): $\tilde{v}$ и $\tilde{\tilde{v}}$, представленные формулами

$$\tilde{v}(t,x) = -\frac{1}{4a^2} T(c^2\tilde{v} + \tilde{f})(t,x) + \tilde{g}^{(1)}(x-at) + \tilde{g}^{(2)}(x+at), \tag{19}$$

$$\tilde{\tilde{v}}(t,x) = -\frac{1}{4a^2} T(c^2\tilde{\tilde{v}} + \tilde{f})(t,x) + \tilde{\tilde{g}}^{(1)}(x-at) + \tilde{\tilde{g}}^{(2)}(x+at). \tag{20}$$

Тогда для их разности $v^{(0)} = \tilde{v} - \tilde{\tilde{v}}$ в силу линейности оператора T получаем уравнение

$$v^{(0)}(t,x) = -\frac{1}{4a^2}T(c^2 v^{(0)})(t,x) + g^{(1)}(x-at) + g^{(2)}(x+at), \tag{21}$$

где $g^{(1)} = \tilde{g}^{(1)} - \tilde{\tilde{g}}^{(1)}$ и $g^{(2)} = \tilde{g}^{(2)} - \tilde{\tilde{g}}^{(2)}$.

Теорема 2 может быть легко обобщена на любую область $\tilde{\Omega}$, для чего необходимо применить ее к каждому характеристическому параллелограмму, лежащему в области $\tilde{\Omega}$. Обобщение теоремы 1 на любую область $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ несколько сложнее, вместо требования $C^2\left(\mathfrak{D}(g^{(j)})\right)$ могут появиться требования $C^2(\mathcal{A}_j)$, $\mathcal{A}_j \subseteq \mathfrak{D}(g^{(i)})$ (j – некоторое семейство индексов) совместно с условиями согласования функций $g^{(j)}$ на $\partial\mathcal{A}_j$ (более подробно об этом см.: [12, 17, 19, 26–28]).

Частное решение уравнения Клейна – Гордона – Фока. Оно может быть построено двумя способами: с продолжением $\tilde{f}$ по аргументу x на всю полуплоскость или без продолжения.

Частное решение с продолжением функции $\tilde{f}$. Продолжаем $\tilde{f}$ по аргументу x на всю полуплоскость (можно сделать аналогично правилам, указанным в [29]), тогда частное решение может быть взято как частное решение задачи Коши, и оно имеет вид [10]

$$v_p(t,x) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau,\lambda) I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\lambda)^2}{a^2}}\right) d\lambda, \tag{22}$$

где I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n.

Для данного частного решения по построению удовлетворены однородные условия Коши: $v_p(0,x) = \partial_t v_p(0,x) = 0$.

Частное решение без продолжения функции $\tilde{f}$. Разделим область Q характеристикой $x - at = 0$ на две подобласти:

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= \{(t,x) \mid x - at > 0, x > 0, t > 0\}, \\ Q^{(2)} &= \{(t,x) \mid x - at < 0, x > 0, t > 0\}. \end{aligned} \tag{23}$$

В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$, $j = 1,2$, каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения типа Вольтерры

$$v_p^{(1)}(t,x) = p^{(1)}(x-at) + g(x+at) - \frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at} dy \int_{x-at}^{x+at}\left(\tilde{f} + c^2 v_p^{(1)}\right)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)dz,\ (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}, \tag{24}$$

$$v_p^{(2)}(t,x) = p^{(2)}(x-at) + g(x+at) - \frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at} dy \int_{at-x}^{x+at}\left(\tilde{f} + c^2 v_p^{(2)}\right)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)dz,\ (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}, \tag{25}$$

где

$$p^{(1)} \in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right), \quad p^{(2)} \in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right), \quad g \in C^2\left(\mathfrak{D}(g)\right).$$

Несложно показывается непосредственной проверкой, что функции $v_p^{(i)}$ (i = 1,2), являющиеся (почти всюду) непрерывными решениями уравнений (24)–(25), являются (почти всюду) дважды непрерывно дифференцируемыми (почти всюду) и удовлетворяют уравнению (13) в областях $\overline{Q^{(j)}}$ (почти всюду).

Т е о р е м а 3. *Пусть $\tilde{f} \in C(Q)$ и заданы непрерывные функции $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ и g. Тогда решения уравнений* (24) *и* (25) *существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности рассмотрим уравнение (24). Его будем решать методом последовательных приближений. Обозначим $F(t,x) = p^{(1)}(x-at) + g(x+at)$. Возьмем начальное приближение $v_p^{(1,0)}(t,x) = F(t,x)$. Тогда каждое следующее приближение будет вычисляться по формуле

$$v_p^{(1,m)}(t,x) = F(t,x) - \frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at} dy \int_{x-at}^{x+at}\left(\tilde{f} + c^2 v_p^{(1,m-1)}\right)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)dz, \qquad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{26}$$

Рассмотрим оценки для последовательных приближений. Пусть $\tilde{x}>0$ и $M=\max\limits_{\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])}|F(t,x)|$. Тогда при $(t,x)\in\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$

$$\left|\left(v_p^{(1,1)}-v_p^{(1,0)}\right)(t,x)\right|=\left|\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dz\right|\le\frac{c^2M|x-at||2at|}{4a^2},$$

$$\left|\left(v_p^{(1,2)}-v_p^{(1,1)}\right)(t,x)\right|\le\left|\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2\frac{M|y||z-y|}{4a^2}dz\right|\le\frac{Mc^4\tilde{x}\left|at(a^2t^2-x^2)\right|}{(4a^2)^2},$$

$$\left|\left(v_p^{(1,3)}-v_p^{(1,2)}\right)(t,x)\right|\le\frac{c^6M|x-at|^3\left|at(a^2t^2-x^2)^2\right|}{6\cdot(4a^2)^3},\quad\left|\left(v_p^{(1,4)}-v_p^{(1,3)}\right)(t,x)\right|\le\frac{c^8M\tilde{x}\left|at(a^2t^2-x^2)^3\right|}{72\cdot(4a^2)^4},$$

$$\left|\left(v_p^{(1,5)}-v_p^{(1,4)}\right)(t,x)\right|\le\frac{c^{10}M\tilde{x}\left|at(a^2t^2-x^2)^4\right|}{1440\cdot(4a^2)^5},\quad\left|\left(v_p^{(1,6)}-v_p^{(1,5)}\right)(t,x)\right|\le\frac{c^{12}M\tilde{x}\left|at(a^2t^2-x^2)^5\right|}{43200\cdot(4a^2)^6},$$

$$\left|\left(v_p^{(1,i+1)}-v_p^{(1,i)}\right)(t,x)\right|\le\frac{2c^{2i+2}M\tilde{x}\left|at(a^2t^2-x^2)^i\right|}{(1)_i(2)_i(4a^2)^{i+1}}=\frac{2c^{2i+2}M\tilde{x}\left|at(a^2t^2-x^2)^i\right|}{i!(i+1)!(4a^2)^{i+1}},\tag{27}$$

где использовано обозначение $(x)_n=\prod_{k=1}^n(x+k-1)$ – символ Похгаммера. Заметим, что $v_p^{(1,m)}=v_p^{(1,0)}+\sum_{j=0}^{m-1}\left(v_p^{(1,j+1)}-v_p^{(1,j)}\right)$. Из оценок (27) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $v_p^{(1,m)}=v_p^{(1,0)}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_p^{(1,j+1)}-v_p^{(1,j)}\right)$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$, члены которого мажорируются по абсолютной величине членами равномерно сходящегося ряда

$$M+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2c^{2i+2}M\tilde{x}\left|at(a^2t^2-x^2)^i\right|}{i!(i+1)!(4a^2)^{i+1}}=M\left(1+\frac{c^2\tilde{x}t}{2a}\,{}_0F_1\left(;2;\frac{c^2(x-at)(x+at)}{4a^2}\right)\right),\tag{28}$$

где ${}_0F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция, которая может быть определена в виде суммы ряда ${}_0F_1(;b;z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(b)_k\,k!}$ [30]. Таким образом, последовательные приближения непрерывных функций $v_p^{(1,m)}$ равномерно стремятся к непрерывной в $\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$ функции $v_p^{(1)}:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])\ni(t,x)\to v_p^{(1)}(t,x)\in\mathbb{R}$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$. Переходя к пределу в (26) при $m\to\infty$, получим, что $v_p^{(1)}$ является решением уравнения из (24) на множестве $\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$, а в силу произвольности $\tilde{x}$ – на множестве $\overline{Q^{(1)}}$.

Докажем единственность решения уравнения (24) от противного. Пусть существуют два решения уравнения (24): $v_p^{(1)}$ и $\tilde{v}_p^{(1)}$. Обозначим $V=v_p^{(1)}-\tilde{v}_p^{(1)}$. Тогда

$$V(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2V\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dz,\quad(t,x)\in\overline{Q^{(1)}}.\tag{29}$$

Функция V является непрерывной, значит, $|V(t,x)|\le B$ при условиях $0\le t\le\tilde{x}/a$ и $0\le x\le\tilde{x}$, где B – некоторая константа. Из (29) следует, что $|V(t,x)|\le\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2Bdz\le\frac{c^2B\tilde{x}|2at|}{4a^2}$. Применяя метод математической индукции, получим следующую оценку:

$$|V(t,x)|\le\frac{2c^{2i+2}B\tilde{x}|at|\left|a^2t^2-x^2\right|^i}{(1)_i(2)_i(4a^2)^i}\le\frac{2^{i+1}c^{2i+2}B\tilde{x}^{2i+1}}{i!(i+1)!(4a^2)^i}\tag{30}$$

для любого натурального i и любой пары (t,x) из $\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$. Отсюда следует, что $V\equiv 0$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$, а в силу произвольности $\tilde{x}$, $V\equiv 0$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}$. Таким образом, доказано существование единственного непрерывного решения уравнения из (27).

Для доказательства непрерывной зависимости решения от начальных данных рассмотрим наряду с уравнением (24) возмущенное уравнение

$$\left(v_p^{(1)}+\Delta v_p^{(1)}\right)(t,x)=(F+\Delta F)(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}\left(\tilde{f}+c^2v_p^{(1)}+c^2\Delta v_p^{(1)}\right)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \tag{31}$$

и разность возмущенного (31) и невозмущенного уравнений (24)

$$\Delta v_p^{(1)}(t,x)=\Delta F(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{x-at}^{x+at}c^2\Delta v_p^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dz,\qquad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{32}$$

Для уравнения (32) относительно возмущения $\Delta v_p^{(1)}$ справедлива оценка модуля возмущения

$$\left|\Delta v_p^{(1)}(t,x)\right|\le M_{\Delta F}\left(1+\frac{c^2\tilde{x}t}{2a}\,{}_0F_1\left(;2;\frac{c^2(x-at)(x+at)}{4a^2}\right)\right),\qquad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}\cap\left([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}]\right), \tag{33}$$

где

$$M_{\Delta F}=\max_{\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])}\left|\Delta F(t,x)\right|.$$

Из полученного неравенства следует, что какое бы малое возмущение ΔF, $M_{\Delta F}=\varepsilon$, мы ни взяли, для возмущения решения выполняется неравенство

$$\left|\Delta v_p^{(1)}(t,x)\right|=\delta\le\varepsilon\left(1+\frac{c^2\tilde{x}^2}{2a^2}\,{}_0F_1\left(;2;\frac{c^2\tilde{x}^2}{4a^2}\right)\right)$$

на множестве $\overline{Q^{(1)}}\cap([0,\tilde{x}/a]\times[0,\tilde{x}])$. В силу произвольности $\tilde{x}$ получаем, что решение уравнения (24) непрерывно зависит от исходных данных.

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (25) доказывается аналогично.

Теорема 4. *Уравнения* (24) *и* (25) *имеют решения* $v_p^{(1)}$ *и* $v_p^{(2)}$ *из классов* $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{f}\in C^1(\overline{Q})$, $p^{(1)}\in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$, $p^{(2)}\in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$ *и* $g\in C^2\left(\mathfrak{D}(g)\right)$.

Пусть $v_p^{(1)}$ и $v_p^{(2)}$ принадлежат классам $L_1^{\text{loc}}(\overline{Q^{(1)}})$ и $L_1^{\text{loc}}(\overline{Q^{(2)}})$ соответственно. Тогда, если $\tilde{f}\in C(\overline{Q})$, то в правой части уравнений (24) и (25) двойной интеграл задает непрерывную функцию, а тогда, если $p^{(1)}\in C\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$, $p^{(2)}\in C\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$ и $g\in C\left(\mathfrak{D}(g)\right)$, то правые части уравнений (24) и (25) представляют собой непрерывные функции, т. е. $v_p^{(1)}\in C(\overline{Q^{(1)}})$ и $v_p^{(2)}\in C(\overline{Q^{(2)}})$. Теперь, если $v_p^{(1)}\in C(\overline{Q^{(1)}})$, $v_p^{(2)}\in C(\overline{Q^{(2)}})$ и $\tilde{f}\in C(\overline{Q})$, то в правой части уравнений (25) и (25) двойной интеграл задает функцию класса C^1, а тогда, если $p^{(1)}\in C^1\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$, $p^{(2)}\in C^1\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$ и $g\in C^1\left(\mathfrak{D}(g)\right)$, то правые части уравнений (24) и (25) представляют собой непрерывно-дифференцируемые функции, т. е. $v_p^{(1)}\in C^1(\overline{Q^{(1)}})$ и $v_p^{(2)}\in C^1(\overline{Q^{(2)}})$. Повторив эти рассуждения при $f\in C^1(\overline{Q})$, $p^{(1)}\in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$, $p^{(2)}\in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$ и $g\in C^2\left(\mathfrak{D}(g)\right)$, получим, что $v_p^{(1)}\in C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и $v_p^{(2)}\in C^2(\overline{Q^{(2)}})$.

Покажем, что условия на функции $p^{(1)}\in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$, $p^{(2)}\in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$ и $g\in C^2\left(\mathfrak{D}(g)\right)$ являются необходимыми для принадлежности решений $v_p^{(1)}$ и $v_p^{(2)}$ классам $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ соответственно. Рассмотрим уравнение (24) и вычислим вторую производную $v_p^{(1)}$ по направлению $\boldsymbol{\eta} = (1, a)$. В результате получим выражение

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 \partial_{\boldsymbol{\eta}}^2 v_p^{(1)}(t,x) = 4a^2 g''(x+at) -$$
$$-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\left(\partial_t f + a\partial_x f + c^2\left(\partial_t v_p^{(1)} + a\partial_x v_p^{(1)}\right)\right)\left(\frac{x+at-y}{2a}, \frac{x+at+y}{2}\right)dy, \qquad (t,x)\in \overline{Q^{(1)}}. \tag{34}$$

Здесь функция в левой части и интеграл в правой части являются непрерывными. Следовательно, функция g и ее производные также должны быть непрерывными, т. е. функция $g \in C^2\left(\mathfrak{D}(g)\right)$. Аналогично доказывается, что $p^{(1)} \in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$ и $p^{(2)} \in C^2\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$.

З а м е ч а н и е 1. Условия теоремы 4 могут быть ослаблены: $p^{(1)} \in C^1\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$, $p^{(2)} \in C^1\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$ и $g \in C^1\left(\mathfrak{D}(g)\right)$. Но в таком случае функции $v_p^{(1)}$ и $v_p^{(2)}$ будут из классов $C^1(\overline{Q^{(1)}})$ и $C^1(\overline{Q^{(2)}})$ соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Условия теоремы 4 могут быть усилены: $\tilde{f} \in C^{j-1}(\overline{Q})$, $p^{(1)} \in C^j\left(\mathfrak{D}(p^{(1)})\right)$, $p^{(2)} \in C^j\left(\mathfrak{D}(p^{(2)})\right)$ и $g \in C^j\left(\mathfrak{D}(g)\right)$, где $j > 2$. В таком случае функции $v_p^{(1)}$ и $v_p^{(2)}$ будут из классов $C^j(\overline{Q^{(1)}})$ и $C^j(\overline{Q^{(2)}})$ соответственно.

Таким образом, построено частное кусочно-гладкое решение уравнения (10) на множестве Q

$$v_p(t,x) = \begin{cases} v_p^{(1)}(t,x), & (t,x)\in Q^{(1)}, \\ v_p^{(2)}(t,x), & (t,x)\in Q^{(2)}. \end{cases} \tag{35}$$

Теперь специальным образом определим функции $p^{(1)}, p^{(2)}$ и g. Мы хотим, чтобы выполнялись однородные условия Коши $v_p(0,x) = \partial_t v_p(0,x) = 0$. Удовлетворяя их, получим систему уравнений

$$v_p(0,x) = p^{(1)}(x) + g(x) = 0, \tag{36}$$

$$\partial_t w(0,x) = \frac{1}{2a}\int_0^x \left(c^2 v_p^{(1)} + \tilde{f}\right)\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{a}\right)dy + a\left(Dg(x) - Dp^{(1)}(x)\right) = 0, \tag{37}$$

где D – оператор обыкновенной производной. Из уравнения (36) следует, что $p^{(1)}(x) = -g(x)$. Подставив это выражение в уравнение (37), которое интегрируем от 0 до x, получаем

$$g(x) = C + \frac{1}{4a^2}\int_0^x dz \int_0^z \left(c^2 v_p^{(1)} + \tilde{f}\right)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{a}\right)dy, \tag{38}$$

где C – произвольная константа из множества действительных чисел. В таком случае $v_p^{(1)}$ определяется формулой

$$v_p^{(1)}(t,x) = \frac{1}{4a^2}\int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^{z} \left(\tilde{f} + c^2 v_p^{(1)}\right)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)dy. \tag{39}$$

Функцию $p^{(2)}$ выберем исходя из требований гладкости. Мы хотим, чтобы $v_p \in C^2(\overline{Q})$. Так как $v_p \in C^2(\overline{Q^{(1)}}) \cap C^2(\overline{Q^{(2)}})$, то необходимо потребовать выполнения условий согласования для решения и его частных производных до второго порядка включительно, т. е.

$$\frac{\partial^{i+j} v_p^{(1)}}{\partial x^i \partial t^j}(t, x = at) = \frac{\partial^{i+j} v_p^{(2)}}{\partial x^i \partial t^j}(t, x = at), \qquad i, j \in \{0,1,2\}, \qquad 0 \le i + j \le 2. \tag{40}$$

Путем непосредственных вычислений приходим к выводу, что равенства (40) эквивалентны следующим условиям:

$$D^2 p^{(2)}(0) = D^2 p^{(1)}(0) + \left(f(0,0) + c^2 v_p^{(1)}(0,0)\right)/a^2, \quad Dp^{(2)}(0) = Dp^{(1)}(0), \quad p^{(2)}(0) = p^{(1)}(0).$$

Значит, функцию $p^{(2)}$ можно определить в виде

$$p^{(2)}(x) = p^{(1)}(0) + xDp^{(1)}(0) + \left(D^2 p^{(1)}(0) + \left(f(0,0) + c^2 v_p^{(1)}(0,0)\right)/a^2\right)\frac{x^2}{2}.$$

Л е м м а 1. *Пусть* v_p – *частное решение уравнения* (10) *из класса* $C^2(\overline{Q})$, *которое удовлетворяет условию* $v_p(0,x) = 0$. *Тогда* $\partial_t^2 v_p(0,x) = \tilde{f}(0,x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (10) имеем $\partial_t^2 v_p(0,x) = a^2 \partial_x^2 v_p(0,x) + c^2 v_p(0,x) + \tilde{f}(0,x)$ при $x > 0$. Вычислим $\partial_x^2 v_p(0,x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v_p(0,x+h) - 2v_p(0,x) + v_p(0,x-h)}{h^2} = 0$, $x > 0$. Тогда с учетом $v_p(0,x) = 0$ получаем, что $\partial_t^2 v_p(0,x) = \tilde{f}(0,x)$, $x > 0$. По свойству непрерывности получим $\partial_x^2 v_p(0,0) = \lim\limits_{x^*\to 0+} \partial_x^2 v_p(0,x^*) = 0$.

Т е о р е м а 5. *Уравнение* (10) *имеет частное решение* v_p, *которое принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$, *если* $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$. *Кроме того, оно удовлетворяет однородным условиям Коши* $v_p(0,x) = \partial_t v_p(0,x) = 0$ *и* $\partial_t^2 v_p(0,x) = \tilde{f}(0,x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из рассуждений выше.

Частное решение системы уравнений. Возвращаемся к исходной системе (2)–(4). Сформулируем вспомогательные леммы.

Л е м м а 2. *Функция v, определяемая как* $w(t,x) = v(t,x)\exp\left(-\dfrac{t}{2\beta}\right)$, *принадлежит классу* $C^m(\Omega)$, *где* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *тогда и только тогда, когда* $w \in C^m(\Omega)$.

Л е м м а 3. *Функция v, определяемая как* $w(t,x) = v(t,x)\exp\left(-\dfrac{t}{2\beta}\right)$, *принадлежит классу* $C^{m,k}(\Omega)$, *где* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *тогда и только тогда, когда* $w \in C^{m,k}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формулы Лейбница.

Используя выводы, полученные ранее, заключаем, что вспомогательная задача (10)–(12) имеет частное решение v_p, которое удовлетворяет начальным условиям $v_p(0,x) = \partial_t v_p(0,x) = 0$ и $\partial_t^2 v_p(0,x) = \tilde{f}(0,x)$. Кроме того, если $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$, то оно принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$. Значит, задача (7)–(9) имеет частное решение, которое определяется формулой $w_p(t,x) = v_p(t,x)\exp\left(-t/(2\beta)\right)$. Нетрудно заметить, что w_p удовлетворяет начальным условиям $w_p(0,x) = \partial_t w_p(0,x) = 0$, $\partial_t^2 w_p(0,x) = \tilde{f}(0,x)$ и принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$, если $\tilde{f} \in C^1(\overline{Q})$.

Для окончательного построения частного решения системы необходимо определить функцию *u*. Воспользуемся первым уравнением из (2). Проинтегрируем его дважды, выбрав однородные начальные условия $u_p(0,x) = \partial_t u_p(0,x) = 0$. В результате получим выражение

$$u_p(t,x) = \frac{1}{\rho}\int_0^t d\lambda \int_0^\lambda \left(\frac{\partial w_p}{\partial x} + f\right)(\tau,x)\,d\tau. \tag{41}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 6. *Система уравнений* (2) *имеет частное решение* u_p *и* w_p, *которое принадлежит классам* $C^3(\overline{Q})$ *и* $C^{2,4}(\overline{Q})$ *соответственно, если* $f \in C^{1,4}(\overline{Q})$. *Кроме того, оно удовлетворяет однородным условиям Коши* $w_p(0,x) = \partial_t w_p(0,x) = 0$, $\partial_t^2 w_p(0,x) = \gamma\rho^{-1}\beta^{-1}\partial_x f(0,x)$ *и* $u_p(0,x) = \partial_t u_p(0,x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во первых, для доказательства данной теоремы необходимо показать совместность условий $u_p(0,x) = \partial_t u_p(0,x) = 0$ и $w_p(0,x) = \partial_t w_p(0,x) = 0$. Полагая функции σ, ψ, φ и константу w_0 в условиях (3) тождественно равными нулю, получим по формуле (8) $\partial_t w_p(0,x) = 0$. Во вторых, воспользовавшись представлениями (22) (но в таком случае необходимо предварительно продолжить *f* на всю полуплоскость с сохранением принадлежности классу $C^{1,4}(\overline{Q})$), при $f \in C^{1,4}(\overline{Q})$ (что влечет $\tilde{f} \in C^{1,3}(\overline{Q})$), получим $w \in C^{2,4}(\overline{Q})$. В третьих, непротиворечивость условий $u \in C^3(\overline{Q})$ и $w \in C^{2,4}(\overline{Q})$ следует из уравнений системы (2) и представления (41).

Отметим, что для отыскания классического решения системы уравнений (2) условия теоремы 6 можно ослабить. Для этого введем обозначения: $C_{t,x}^{2,1}(\Omega)$ – множество функций, определенных на множестве Ω, имеющих всюду в Ω непрерывные частные производные $\partial_t\partial_t\partial_x$, $\partial_t\partial_x\partial_t$, $\partial_x\partial_t\partial_t$; $C^{1,1}_{t,x}(\Omega)$ – множество функций, определенных на множестве Ω, имеющих всюду в Ω непрерывные частные производные $\partial_t\partial_x$, $\partial_x\partial_t$.

Теорема 7. *Система уравнений* (2) *имеет частное решение* u_p *и* w_p, *которое принадлежит классам* $C^2(\overline{Q})\cap C^{2,1}_{t,x}(\overline{Q})$ *и* $C^{2,3}(\overline{Q})$ *соответственно, если* $f\in C^{1,3}(\overline{Q})$. *Кроме того, оно удовлетворяет однородным условиям Коши* $w_p(0,x)=\partial_t w_p(0,x)=0$, $\partial_t^2 w_p(0,x)=\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}\partial_x f(0,x)$ *и* $u_p(0,x)=\partial_t u_p(0,x)=0$.

Доказательство. Во-первых, мы предположили, что $u\in C^3(\overline{Q})$, чтобы осуществить переход от (4) к (5). Но переход останется в силе, если функции $\partial_t\partial_t\partial_x u$, $\partial_t\partial_x\partial_t u$, $\partial_x\partial_t\partial_t u$ будут непрерывными. Совместность условий $u_p(0,x)=\partial_t u_p(0,x)=0$ и $w_p(0,x)=\partial_t w_p(0,x)=0$ была показана ранее. Аналогично теореме 6 можно показать, что если $f\in C^{1,3}(\overline{Q})$, то $w\in C^{2,3}(\overline{Q})$. Непротиворечивость условий $u\in C^2(\overline{Q})\cap C^{2,1}_{t,x}(\overline{Q})$ и $w\in C^{2,3}(\overline{Q})$ следует из уравнений системы (2) и представления (41).

Теорема 8. *Система уравнений* (2) *имеет частное решение* u_p *и* w_p, *которое принадлежит классам* $C^{2,1}(\overline{Q})\cap C^{2,1}_{t,x}(\overline{Q})\cap C^{1,1}_{t,x}(\overline{Q})$ *и* $C^2(\overline{Q})$ *соответственно, если* $f\in C^{1,2}(\overline{Q})$. *Кроме того, оно удовлетворяет однородным условиям Коши* $w_p(0,x)=\partial_t w_p(0,x)=0$, $\partial_t^2 w_p(0,x)=\gamma\rho^{-1}\beta^{-1}\partial_x f(0,x)$ *и* $u_p(0,x)=\partial_t u_p(0,x)=0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

Заключение. Рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающих колебания в однородных релаксирующих стержнях постоянного поперечного сечения. Краевая задача для такой системы сведена к краевой задаче для уравнения Клейна – Гордона – Фока и задаче Коши для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Рассмотрены некоторые свойства уравнения Клейна – Гордона – Фока. Построено его частное решение в четверти плоскости. Доказана единственность и непрерывная зависимость от начальных данных частного решения. Построено частное решение исходной системы дифференциальных уравнений, показана зависимость его гладкости от функции, присутствующей в системе. В дальнейшем планируется использовать полученные результаты для решения смешанных задач для системы уравнений (2).

Список использованных источников

1. Лазарян, В. А. О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей / В. А. Лазарян // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. – 1950. – Вып. 20. – С. 3–32.

2. Маврин, А. И. К теории ударного погружения свай / А. И. Маврин // Изв. вузов (строительство и архитектура). – 1967. – № 8. – С. 24–28.

3. Boussinesq, J. Du choc longitudinal d’une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l’autre / J. Boussinesq // Comptes Rendus. – 1883. – Vol. 97, № 2. – P. 154–157.

4. Гайдук, С. И. О некоторых задачах, связанных с теорией поперечного удара по стержням / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1233–1243.

5. Гайдук, С. И. О единственности решения одной задачи из волновой теории механического удара / С. И. Гайдук, Г. М. Заяц // Дифференц. уравнения. – 1989 – Т. 25, № 5. – С. 833–839.

6. Гайдук, С. И. Математическое рассмотрение одной задачи о продольном ударе по релаксирующему стержню / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 668–685.

7. Гайдук, С. И. Задача о продольных колебаниях конечного упруго-вязкого стержня / С. И. Гайдук // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 8. – С. 1061–1071.

8. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с.

9. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 7: Теория упругости. – 264 с.

10. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – 2-е изд., стер. – М.: МЦНМО, 2004. – 208 с.

11. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – Т. 2. – 848 с.

12. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для телеграфного уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, Ю. В. Шейко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 4. – С. 48–54.

13. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд. – М.: Наука, 1986. – 545 с.

14. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

15. Chen, J. Analytical solution for time-fractional telegraph equation by the method of separating variables / J. Chen, F. Liu, V. Ahn // J. Math. Anal. Appl. – 2008. –Vol. 338, № 2. – P. 1364–1377. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.023

16. Smirnov, I. N. Mixed problems for the telegraph equation in case of a system consisting of two segments with different densities and elasticities but equal impedances / I. N. Smirnov // Doklady Mathematics. – 2010. – Vol. 82, № 3. – P. 887–891. https://doi.org/10.1134/s106456241006013x

17. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1108–1117.

18. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в криволинейной полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 9–15.

19. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 77–88.

20. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

21. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 7–21. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

22. Giusti, A. Dispersive Wave Solutions of the Klein-Gordon equation in Cosmology [Electronic resource] / A. Giusti. – Università di Bologna, 2013. – Mode of access: https://amslaurea.unibo.it/id/eprint/6148. – Date of access: 02.03.2021.

23. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 22–31.

24. Годунов, С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1979. – 392 с.

25. Strikwerda, J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations / J. C. Strikwerda. – 2nd ed. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. – 435 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898717938

26. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. –2-е изд., испр. и доп. – Москва: URSS, 2021. – 480 с.

27. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Дифференц. уравнения. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 174–184. https://doi.org/10.31857/S0374064122020042

28. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с неоднородными условиями согласования / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 1. – С. 7–13. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-7-13

29. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск: БГУ, 2017. – Ч. 2. – 50 с.

30. Weisstein, E. W. Confluent Hypergeometric Limit Function [Electronic resource] / E. W. Weisstein // Wolfram MathWorld. – Mode of access: https://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricLimitFunction.html. – Date of access: 02.03.2021.

References

1. Lazaryan V. A. On dynamic forces in harness devices of homogeneous trains with resistance to relative movements of carriages. *Trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta = Proceedings of the Dnepropetrovsk Institute of Railway Engineers*, 1950, no. 20, pp. 3–32 (in Russian).

2. Mavrin A. I. To the theory of shock piling. *Izvestiya vuzov (stroitel'stvo i arkhitektura) = News of Higher Educational Institutions (Building and Architecture)*, 1967, no. 8, pp. 24–28 (in Russian).

3. Boussinesq J. Du choc longitudinal d'une barre élastique prismatique fixée à un bout et heurtée à l'autre. *Comptes Rendus*, 1883, vol. 97, no. 2, pp. 154–157 (in French).

4. Gayduk S. I. On some problems related to the theory of transverse impact on rods. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 7, pp. 1233–1243 (in Russian).

5. Gayduk S. I., Zayats G. M. On the uniqueness of the solution of one problem from the wave theory of mechanical shock. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 5, pp. 833–839 (in Russian).

6. Gayduk S. I. Mathematical consideration of one problem of longitudinal collision on a relaxing string. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1976, vol. 12, no. 4, pp. 668–685 (in Russian).

7. Gayduk S. I. The problem of longitudinal vibrations of a finite viscoelastic string. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1966, vol. 2, no. 8, pp. 1061–1071 (in Russian).

8. Rzhanitsyn A. R. *Theory of Creep*. Moscow, Stroiizdat Publ., 1968. 418 p. (in Russian).

9. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Theoretical Physics: in 10 vol. Vol. 7. Elasticity theory*. 5th ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 264 p. (in Russian).

10. Pikulin V. P., Pokhozhaev S. I. *Practical Course on Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2004. 208 p. (in Russian).

11. Smirnov V. I. *Higher Mathematics Course. Vol. 2.* 24th ed. Saint Petersburg, BHV-Petersburg Publ., 2008. 848 p. (in Russian).

12. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sheiko Yu. V. Solution of the Cauchy problem for the telegraph equation by the method of characteristics. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2011, no. 4, pp. 48–54 (in Russian).

13. Bronstein I. N., Semendyaev K. A. *A Guide to Mathematics for Engineers and College Students.* 13th ed. Moscow, Nauka Publ., 1986. 545 p. (in Russian).

14. Bitsadze A. V. *Some Classes of Partial Differential Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1981. 448 p. (in Russian).

15. Chen J., Liu F., Ahn V. Analytical solution for time-fractional telegraph equation by the method of separating variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 338, no. 2, pp. 1364–1377. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.023

16. Smirnov I. N. Mixed problems for the telegraph equation in case of a system consisting of two segments with different densities and elasticities but equal impedances. *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 82, no. 3, pp. 887–891. https://doi.org/10.1134/s106456241006013x

17. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. doi.org/10.1134/s0012266114080084

18. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the first mixed problem for Klein – Gordon – Fock equation in the curvilinear half-strip. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 9–15 (in Russian).

19. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficient. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 77–85. doi.org/10.1134/S0012266117010074

20. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the halfstrip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391403

21. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation with characteristic oblique derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

22. Giusti A. *Dispersive Wave Solutions of the Klein-Gordon equation in Cosmology*. Università di Bologna, 2013. 64 p. Available at: http://amslaurea.unibo.it/6148/ (accessed 02 March 2021).

23. Korzyuk V. I., Puzyrnyi S. I. Classical solution of mixed problems for the one-dimensional wave equation with Cauchy nonsmooth conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 2, pp. 22–31 (in Russian).

24. Godunov S. K. *Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1979. 392 p. (in Russian).

25. Strikwerda J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. 435 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898717938

26. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. Moscow, URSS Publ., 2021. 480 p. (in Russian).

27. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 175–186. https://doi.org/10.1134/s0012266122020045

28. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution for the first mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation with inhomogeneous matching conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 1, pp. 7–13 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-1-7-13

29. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical Solutions of Problems for Hyperbolic Equations. Part 2.* Minsk, Belarusian State University, 2017. 50 p. (in Russian).

30. Weisstein E. W. *Confluent Hypergeometric Limit Function*. Wolfram MathWorld. Available at: https://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricLimitFunction.html (accessed 02 March 2021).

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Рудько Ян Вячеславович – магистр (математика и компьютерные науки), Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Jan V. Rudzko – Master of Mathematics and Computer Science, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janycz@yahoo.com. https://orcid.org/0000-0002-1482-9106