ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-312-317

Поступила в редакцию 09.03.2022
Received 03.03.2022

Ю. А. Курочкин, Н. Д. Шайковская

Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

МЕТОД ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ: СПЕЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Аннотация. Продемонстрировано использование геометрии Лобачевского импульсного пространства в релятивистской кинематике столкновения частиц на примере задачи о специальной системе отсчета, дополняющей геометрический образ процесса упругого рассеяния двух частиц неравных масс. Определена скорость специальной системы отсчета относительно центра масс и угол рассеяния частиц в ней. Проанализированы условия существования такой системы отсчета. Показано, что в случае процесса с равными массами точка, соответствующая такой системе, уходит в идеальную область расширенного пространства Лобачевского за конус, а прямые, пересекающиеся в ней, становятся расходящимися прямыми в смысле геометрии Лобачевского. При этом угол между расходящимися прямыми (геодезическими линиями) геометрического образа чисто мнимый и связан с минимальной длиной отрезка, перпендикулярного расходящимся прямым (геодезическим).

Ключевые слова: геометрия Лобачевского, релятивистская кинематика, система отсчета, импульсное пространство, векторы, частицы, столкновения, инвариантность

Для цитирования. Курочкин, Ю. А. Метод геометрии Лобачевского в релятивистской кинематике столкновения частиц / Ю. А. Курочкин, Н. Д. Шайковская // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 3. – С. 312–317. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-312-317

Yurii A. Kurochkin, Nadezda D. Shaikovskaya

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

THE LOBACHEVSKY GEOMETRY METHOD IN THE RELATIVISTIC KINEMATICS OF PARTICLE COLLISIONS: SPECIAL FRAME OF REFERENCE

Abstract. The use of the geometry of the Lobachevsky momentum space in the relativistic kinematics of particle collisions is demonstrated by the example of the problem of a special reference system. That system complements the geometric image of the process of elastic scattering of two particles of unequal masses. The speed of a special reference system relative to the center of mass and the angle of scattering of particles in it are determined. The conditions for the existence of such a reference system are analyzed. It is shown that in the case of a process with equal masses, the point corresponding to such a system goes into the ideal region of the extended Lobachevsky space - beyond the cone, and the lines intersecting in it become diverging lines in the sense of Lobachevsky geometry. In this case, the angle between the divergent straight lines (geodesics) of the geometric image is purely imaginary and connected to the minimum length of the segment perpendicular to the diverging straight lines (geodesics).

Keywords: Lobachevsky geometry, relativistic kinematics, systems of reference, momentum space, vectors, particles, collisions, invariance

For citation. Kurochkin Yu. A., Shaikovskaya N. D. The Lobachevsky geometry method in the relativistic kinematics of particle collisions: special frame of reference. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 312–317 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-312-317

Введение. Экспериментальное подтверждение [1] существования оддерона, понятие которого сформировалось в теории Редже, свидетельствует об актуальности данного подхода. Это тем более существенно, что данный объект имеет естественную интерпретацию в квантовой хромодинамике (КХД). Известно, как и во всяком подходе в физике частиц, в Редже-подходе важен выбор кинематики, адекватных переменных. Задачей настоящей работы является интерпретация кинематических инвариантов, используемых для параметризации амплитуд упругих процессов скалярных частиц с точки зрения геометрии Лобачевского релятивистских скоростей и релятивистских импульсов.

На связь теории относительности с геометрией пространства Лобачевского обращали внимание такие выдающиеся ученые, как В. Паули, А. Зоммерфельд, В. А. Фок. [2–4]. В работах Н. А. Черникова и Я. А. Смородинского процессам столкновений и распадов частиц ставились в соответствие геометрические фигуры (многогранники), являющиеся инвариантными образами описываемых процессов и содержащие информацию об их кинематике [5, 6].

В [7–9] развит новый метод релятивистской кинематики, основанный на связи бикватернионного исчисления с векторной параметризацией и геометрией Лобачевского. В данном подходе сторонам и диагоналям геометрических образов процесса рассеяния ставятся в соответствие комплексные векторы проективного пространства $\vec{q}$, сопоставляемые парам упорядоченных точек трехмерного пространства Лобачевского. Эти векторы являются алгебраическими (аналитическими) представлениями геометрических образов направленных отрезков геодезических линий. В основу теории положен закон сложения векторов, совпадающий по форме с законом композиции вектор-параметров Ф. И. Федорова для преобразований группы Лоренца. При этом если двум направленным сторонам треугольника пространства Лобачевского соответствуют векторы $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ с $\vec{q}_1^{\,2} = \left(\vec{q}_1^{\,2}\right)^*$, $\vec{q}_2^{\,2} = \left(\vec{q}_2^{\,2}\right)^*$ соответственно, то третьей стороне соответствует вектор

$$\vec{q} = \frac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2}{1 - (\vec{q}_1 \vec{q}_2)}. \tag{1}$$

В формуле (1) и выше круглые скобки обозначают скалярное произведение трехмерных векторов, а знак «×» – их векторное произведение.

Векторы $\vec{q}$ являются комплексными относительными скоростями. При этом

$$\sqrt{\vec{q}^{\,2}} = i \,\mathrm{th}\, \rho, \tag{2}$$

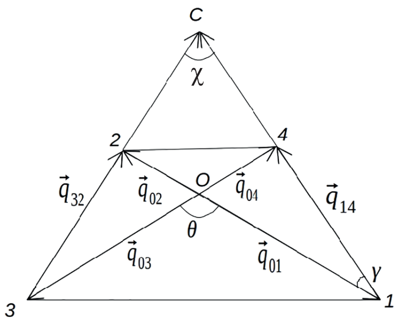
где ρ – расстояние между точками в упорядоченной паре, связанной с вектором $\vec{q}$, $\sqrt{\vec{q}^{\,2}}$ – длина вектора.

Векторы $\vec{q}$ – ковариантные объекты. При преобразованиях группы Лоренца они подвергаются преобразованиям комплексной группы вращений. Комплексность векторов учитывает релятивистский эффект, связанный с законом сложения произвольно направленных скоростей в теории относительности, в частности, приводящий к томасовской прецессии.

Квадрат вектора q^2 есть величина вещественная и дает квадрат относительной скорости двух частиц. Углы между пересекающимися векторами являются реальными углами между направлениями движения релятивистских частиц. В качестве кинематических переменных, характеризующих процесс рассеяния, в таком подходе выступают длины ребер и диагоналей многогранника (быстроты) и углы между векторами. Эти величины являются лоренцевскими инвариантами, так как $\vec{q}$ являются векторами относительно преобразований комплексных вращений. Данное их свойство есть следствие преобразований Лоренца над четырехмерными векторами, представляемыми бикватернионами [8, 9].

Нами был использован указанный метод при решении задачи о специальной системе отсчета, связанной с бинарным упругим процессом.

Специальная система отсчета. Геометрическим образом процесса бинарного упругого рассеяния является четырехугольник 1234 (рисунок). Специальным системам отсчета отвечают точки, лежащие на геодезических пространства Лобачевского, которые образуют геометриче-



Точка *C*, отвечающая специальной системе отсчета

Point *C* corresponding to a special frame of reference

ский образ процесса рассеяния, либо точки их пересечения. Примерами таких систем отсчета являются: система отсчета, связанная с центром масс частиц (ей отвечает точка пересечения диагоналей геометрического образа); система отсчета Брейта, в которой $\vec{p}_1 = -\vec{p}_3$; лабораторная система отсчета, в которой одна из частиц до столкновения покоится. Мы рассмотрели новую специальную систему отсчета, которой отвечает точка пересечения геодезических линий, заданных векторами $\vec{q}_{14}$ и $\vec{q}_{32}$.

Данная специальная система отсчета обладает той особенностью, что в ней частицы вследствие столкновения обмениваются направлениями своего движения.

Аналитические образы векторов пространства Лобачевского, соответствующие диагоналям четырехугольника и имеющие началом систему центра масс, равны

$$\vec{q}_{01} = -i\vec{V}_1, \quad \vec{q}_{02} = -i\vec{V}_2, \quad \vec{q}_{03} = -i\vec{V}_3, \quad \vec{q}_{04} = -i\vec{V}_4, \tag{3}$$

где $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – скорости первой и второй частиц до столкновения, $\vec{V}_3$ и $\vec{V}_4$ – скорости первой и второй частиц после столкновения в системе отсчета их центра масс.

Выражая эти векторы через импульсы и энергии частиц, получим

$$\vec{q}_{01} = \frac{i\vec{p}_1}{E_1}, \quad \vec{q}_{02} = \frac{i\vec{p}_2}{E_2}, \quad \vec{q}_{03} = \frac{i\vec{p}_3}{E_3}, \quad \vec{q}_{04} = \frac{i\vec{p}_4}{E_4}. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) скорость света принята равной единице.

Законы сохранения импульса и энергии для данной системы имеют вид

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0, \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4, \tag{5}$$

откуда следует, что

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2, \quad \vec{p}_3 = -\vec{p}_4,$$

и, следовательно,

$$\vec{q}_{02} = -\frac{E_1}{E_2}\vec{q}_{01}, \quad \vec{q}_{04} = -\frac{E_3}{E_4}\vec{q}_{03}.$$

При рассеянии в системе центра масс импульсы частиц только меняют свое направление и не изменяются по модулю, поэтому $E_1 = E_3$ и $E_2 = E_4$, т. е. энергии каждой из частиц в отдельности сохраняются.

Введя обозначение

$$\alpha = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_2}{V_1}, \tag{6}$$

получим

$$\vec{q}_{02} = -\alpha\vec{q}_{01}, \quad \vec{q}_{04} = -\alpha\vec{q}_{03}. \tag{7}$$

Точка *C* является точкой пересечения прямых, соответствующих вектор-параметрам $\vec{q}_{14}$ и $\vec{q}_{32}$. По определению косинус угла χ между прямыми, задаваемыми векторами $\vec{q}_{14}$ и $\vec{q}_{32}$, равен

$$\cos\chi = \frac{\vec{q}_{14}\cdot\vec{q}_{32}}{\sqrt{\vec{q}_{14}^{\,2}}\cdot\sqrt{\vec{q}_{32}^{\,2}}}. \tag{8}$$

Из закона сложения векторов (1), с учетом (7), для рассматриваемых векторов получим

$$\vec{q}_{14} = \langle \vec{q}_{04}, -\vec{q}_{01} \rangle = \frac{-\alpha\vec{q}_{03} - \vec{q}_{01} + \alpha\vec{q}_{03} \times \vec{q}_{01}}{1 - \alpha\vec{q}_{01} \cdot \vec{q}_{03}}, \tag{9}$$

$$\vec{q}_{32} = \langle \vec{q}_{02}, -\vec{q}_{03} \rangle = \frac{-\alpha\vec{q}_{01} - \vec{q}_{03} + \alpha\vec{q}_{01} \times \vec{q}_{03}}{1 - \alpha\vec{q}_{01} \cdot \vec{q}_{03}}. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим угол рассеяния частиц в специальной системе отсчета, выраженный через скорости частиц до рассеяния и угол рассеяния в системе центра масс:

$$\cos\chi = \frac{\left(V_1^2 + V_2^2\right)\cos\theta + 2V_1V_2 + V_1^2V_2^2\sin^2\theta}{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta - V_1^2V_2^2\sin^2\theta}, \tag{11}$$

где θ – угол рассеяния частиц в системе центра масс.

Найдем скорость специальной системы отчета в системе, связанной с центром масс. Для этого воспользуемся теоремой косинусов, следующей из выражения (1) после возведения его в квадрат с учетом формул (2)–(8). Из теорем косинусов для треугольников Δ 3O1, Δ 3C1 и Δ CO1 получим систему уравнений, и с учетом того, что, как следует из треугольника Δ 1O4,

$$\cos\gamma = \frac{V_1 + V_2\cos\theta}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta - V_1^2V_2^2\sin^2\theta}}, \tag{12}$$

для модуля скорости специальной системы отсчета находим выражение

$$V_{0C} = \frac{2V_1V_2\cos\frac{\theta}{2}}{V_1 - V_2}. \tag{13}$$

Данное выражение представляет собой модуль скорости специальной системы отсчета, связанной с бинарной реакцией упругого рассеяния двух частиц неравных масс, относительно центра масс системы.

Анализ формулы для угла рассеяния. Получим выражение для угла рассеяния частиц в специальной системе отсчета через кинематические инварианты Мандельстама s и t. В первом канале (s-канале) величина s есть квадрат полной энергии сталкивающихся частиц

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2, \tag{14}$$

а величина t есть квадрат импульса, переданного одной из частиц в результате столкновения,

$$t = (p_1 + p_3)^2 = 2p_1^2(1 - \cos\theta). \tag{15}$$

В переменных s и t формула (11) примет вид

$$\cos\chi = \frac{(s-t)[st + A] + t\left(m_1^2 - m_2^2\right)^2}{(s+t)[st + A] - t\left(m_1^2 - m_2^2\right)^2}, \tag{16}$$

где $A = \left(s - (m_1 - m_2)^2\right)\left(s - (m_1 + m_2)^2\right)$.

Модуль скорости специальной системы отсчета в переменных s и t имеет вид

$$V_{0C} = \frac{\sqrt{A + st}}{m_2^2 - m_1^2}. \tag{17}$$

Специальная система отчета существует, если выполняется условие $-1 < \cos\chi < 1$, что при фиксированном значении полной энергии системы приводит к условию

$$t=\left[-\frac{A}{s},-\frac{A}{s}+-\frac{1}{s}\left(m_1^2-m_2^2\right)^2\right]. \tag{18}$$

Данное условие означает ограничение на угол рассеяния в ц-системе

$$\cos\theta=\left[-1,-1+\frac{(V_1-V_2)^2}{2V_1^2V_2^2}\right]. \tag{19}$$

При $t=-\frac{A}{s}$, т. е. при $\cos\theta=-1$, $V_{0C}=0$.

При $t=-\frac{A}{s}+\frac{1}{s}\left(m_1^2-m_2^2\right)^2$, т. е. при $\cos\theta=-1+\frac{(V_1-V_2)^2}{2V_1^2V_2^2}$, рассматриваемые геодезические пересекаются на абсолюте, $\cos\chi=1$ и скорость специальной системы отсчета равна скорости света $V_{0C}=1$.

При невыполнении условия (18) рассматриваемые геодезические становятся расходящимися, и специальная система отсчета не существует.

Расходящиеся прямые. Аналогично можно найти угол между векторами $\vec{q}_{24}$ и $\vec{q}_{31}$. Оказывается, что для данных прямых пространства Лобачевского

$$\cos\chi=\frac{2+V_1V_2(1+\cos\theta)}{\sqrt{2-V_1^2(1+\cos\theta)}\cdot\sqrt{2-V_2^2(1+\cos\theta)}}>1, \tag{20}$$

т. е. сам угол χ – мнимый. Таким образом, данные геодезические не пересекаются и являются расходящимися.

Расстояние между ними определяется как длина отрезка геодезической, перпендикулярной каждой из рассматриваемых прямых, заключенного между ними. Вычисление дает следующую связь между длиной перпендикулярного расходящимся прямым отрезка и косинусом угла между ними:

$$\operatorname{ch}\rho=\cos\chi. \tag{21}$$

Отметим, что в случае равных масс обе пары геодезических линий являются расходящимися, угол между ними

$$\cos\chi=\frac{s-t}{s+t}>1 \tag{22}$$

и также справедливо соотношение (21).

Заключение. Таким образом, продемонстрировано использование метода геометрии Лобачевского для решения задачи о нахождении скорости специальной системы отсчета, которой отвечает точка пересечения продолжений сторон четырехугольника процесса упругого рассеяния двух частиц различных масс. Найден модуль ее скорости – выражение (13).

При рассмотрении столкновения из данной специальной системы отсчета обе частицы рассеиваются на одинаковый угол, косинус которого дается выражениями (11), (16), и обмениваются направлениями своего движения. Условия существования данной специальной системы отсчета при фиксированной полной энергии сталкивающихся частиц определяются интервалом (19).

Показано, что в случае расходящихся прямых косинус угла между ними и расстояние между ними связаны как $\operatorname{ch}\rho=\cos\chi$.

Благодарности. Авторы выражают благодарность участникам семинара центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» за полезное обсуждение работы и замечания.

Acknowledgments. The authors are grateful to the participants of the seminar of the Center “Fundamental Interactions and Astrophysics” for the useful discussion of the work and remarks.

Список использованных источников

1. Comparison of differential elastic cross sections and observation of the exchange of a colorless C-odd gluonic compound [Electronic resource] / V. M. Abazov [et al.] (D0 and TOTEM Collaborations) // Arxiv [Preprint]. – 2020. – Mode of access: https://arxiv:2012.03981. – Date of access: 17.03.2021.
2. Паули, В. Теория относительности / В. Паули. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
3. Зоммерфельд, А. Электродинамика / А. Зоммерфельд. – М.: Иностр. лит., 1958. – 501 с.
4. Фок, В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – М.: Физматгиз, 1961. – 569 с.
5. Черников, Н. А. Геометрии Лобачевского и релятивистская кинематика / Н. А. Черников // ЭЧАЯ. – 1973. – Т. 4, вып. 3. – С. 773–810.
6. Смородинский, Я. А. Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна / Я. А. Смородинский // Эйнштейновский сборник. – М.: Наука, 1972. – С. 272–301.
7. Богуш, А. А. Векторы пространства Лобачевского и релятивистская кинематика / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин, Ф. И. Федоров // Докл. акад. наук СССР. – 1977. – Т. 236, № 1. – С. 58–60.
8. Березин, А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – Минск: Наука и техника, 1989. – 197 с.
9. Бикватернионы в кинематике реакции $\gamma + A \to \gamma' + B + C$ в 3-пространстве Лобачевского / А. А. Богуш [и др.]. – Минск, 1989. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР; № 567).

References

1. Abazov V. M. [et al.]. (D0 and TOTEM Collaborations). Comparison of differential elastic cross sections and observation of the exchange of a colorless C-odd gluonic compound. *Arxiv* [Preprint], 2020. Available at: https://arxiv:2012.03981 (accessed 17 March 2021).
2. Pauli V. *Theory of Relativity*. New York: Dover Publications, 1981. 241 p.
3. Sommerfeld A. *Band 3: Elektrodynamik*. Wiesbaden, Dieterich'sche Verlagsbuch, 1949.
4. Fok V. A. *Theory of Space, Time and Gravity*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961. 569 p. (in Russian).
5. Chernikov N. A. Lobachevsky geometries and relativistic kinematics. *Fizika elementarnyh chastic i atomnogo yadra = Physics of Elementary Particles and the Atomic Nucleus*, 1973, vol. 4, no. 3, pp. 773–810 (in Russian).
6. Smorodinsky Ya. A. Geometry of Lobachevsky and Einstein's kinematics. *Einstein's collection.* Moscow, Nauka Publ., 1972, pp. 272–301 (in Russian).
7. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Fedorov F. I. Lobachevsky space vectors and relativistic kinematics. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1977, vol. 236, no. 1, pp. 58–60 (in Russian).
8. Berezin A. V., Kurochkin Yu. A., Tolkachev E. A. *Quaternions in Relativistic Physics*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1989. 202 p. (in Russian).
9. Bogush A. A., Borodkina I. L., Kurochkin Yu. A., Levchuk M. I. *Biquaternions in the kinematics of the reaction $\gamma + A \to \gamma' + B + C$ in the Lobachevsky 3-space. Preprint / Institute of Physics of the Academy of Sciences of the BSSR*: no. 567. Minsk, 1989 (in Russian).

Информация об авторах

Курочкин Юрий Андреевич – доктор физико-математических наук, заведующий центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Шайковская Надежда Дмитриевна – аспирант, младший научный сотрудник центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: n.shaikovskaya@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Yury A. Kurochkin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (Independence Ave., 68-2, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Nadezda D. Shaikovskaya – Postgraduate Student, Junior Researcher at the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (Independence Ave., 68-2, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.shaikovskaya@dragon.bas-net.by