

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 530.12

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-318-326>

Поступила в редакцию 17.02.2022

Received 17.02.2022

А. П. Рябушко¹, Т. А. Жур²¹Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь²Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Республика Беларусь

ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ И ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В КОСМОСЕ

Аннотация. Исследуется степень влияния гравитационного поля темной материи на законы движения тел в среде в ограниченной задаче двух тел, когда пробное тело (планета, астероид, искусственный спутник звезды, в частности, Солнца и т. д.) обладает собственным вращением, т. е. собственным угловым моментом импульса. Исследование проведено в рамках постньютоновского приближения общей теории относительности. В соответствии с новейшими экспериментальными данными приняты гипотезы об усредненных плотностях темной материи $\rho_{Т.М}$ и видимой материи $\rho_{\text{вид}}$ в планетарных системах. В частности, в Солнечной системе принято: $\rho_{Т.М} \approx 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\rho_{\text{вид}} \approx 3 \cdot 10^{-20} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и $\rho_{\Sigma} = \rho_{\text{вид}} + \rho_{Т.М} \approx 3,1 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. В постньютоновском приближении общей теории относительности выведено уравнение траектории вращающегося пробного тела при учете ρ_{Σ} и получены рабочие формулы, дающие законы вековых изменений направления вектора собственного углового момента импульса пробного тела и модуля этого вектора. Показано, что учет $\rho_{Т.М}$ изменяет величину смещения периастра. В Солнечной системе, например, при учете только $\rho_{\text{вид}}$ все планеты, кроме Плутона, имеют в постньютоновском приближении общей теории относительности прямое смещение перигелия. При учете ρ_{Σ} планеты от Меркурия до Сатурна включительно имеют прямое смещение перигелиев, а Уран, Нептун, Плутон – обратное (против хода планет по орбите). Также происходит вековое изменение эксцентриситета орбиты. Выведена формула, с помощью которой можно вычислять вековое отклонение поступательного движения вращающегося тела от движения в плоскости. Учет ρ_{Σ} это отклонение усиливает. Подчеркивается, что все отмеченные эффекты для планетарных систем в окрестностях нейтронных звезд, радиопульсаров и прочих плотных объектов могут быть на много порядков больше, чем в Солнечной системе.

Ключевые слова: общая теория относительности, ньютоновское и постньютоновское приближения, темная материя, пробное тело, задача двух тел

Для цитирования. Рябушко, А. П. Темная материя и движение тел в космосе / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2022. – Т. 58, № 3. – С. 318–326. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-318-326>

Anton P. Ryabushko¹, Tatyana A. Zhur²¹Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus²Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Republic of Belarus

DARK MATTER AND MOTION OF BODIES IN SPACE

Abstract. This paper investigates the degree of influence of the gravitational field of dark matter on the laws of motion of bodies in a medium in a restricted two-body problem, when a test body (planet, asteroid, artificial satellite of a star, in particular, the Sun, etc.) has its own rotation, i. e. own angular momentum impulse. The study was carried out within the framework of the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity. In accordance with the latest experimental data, hypotheses about the average densities of dark matter $\rho_{D.M.}$ and visible matter ρ_{vis} in planetary systems are accepted. In particular, in the Solar system the following is accepted: $\rho_{D.M.} \approx 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $\rho_{\text{vis}} \approx 3 \cdot 10^{-20} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ and $\rho_{\Sigma} = \rho_{\text{vis}} + \rho_{D.M.} \approx 3,1 \cdot 10^{-19} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. In the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity, the equation for the trajectory of a rotating test body with respect to ρ_{Σ} is derived, and working formulas are obtained that give the laws of secular changes in the direction of the vector of the proper angular momentum impulse of the test body and the modulus of this vector. It is shown that accounting $\rho_{D.M.}$ changes the magnitude of the periastron shift. For example, in the Solar System when taking into account ρ_{vis} , all the planets except Pluto have a directly shifted perihelion in the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity. When taking into account ρ_{Σ} the planets from Mercury to Saturn included, they have a direct shift of perihelion, and Uranus, Neptune, Pluto have the reverse (against the planets in orbit). There is also a secular change in the eccentricity of the orbit. The formula is derived that can be used to calculate the secular deviation of the translational motion of a rotating body from motion in a plane. Accounting ρ_{Σ} enhances deviation. It is emphasized that all the noted effects for planetary systems in the vicinity of neutron stars, radio pulsars and other dense objects can be many orders of magnitude greater than in the solar system.

Keywords: general theory of relativity, Newtonian and post-Newtonian approximations, dark matter, test body, two-body problem

For citation. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Dark matter and motion of bodies in space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 318–326 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-318-326>

Введение. В области астрофизики в XX в. возникла так называемая проблема «скрытой» массы, суть которой состоит в следующем. Наблюдения за движением звезд на периферии Галактики (Млечного Пути) показали, что скорости их поступательного движения настолько велики, что при установленной видимой массе Галактики звезды под действием центробежных сил должны покинуть ее, но этого не происходит. Аналогично наблюдения за скоплениями галактик установили их устойчивость, хотя величины их видимых масс недостаточны для этого.

Возникла гипотеза о существовании «скрытой» массы, которая невидима из-за отсутствия электромагнитных излучений, но эта масса оказывает гравитационное притяжение или отталкивание наблюдаемой материи. Что из себя представляет «скрытая» масса, из чего она состоит, какова ее физическая природа – было неясно. Поэтому сейчас для «скрытой» массы используется другое название – «темная» материя, т. е. непонятная и невидимая материя, которая признается *новой формой* материи.

В конце XX в. с помощью космического телескопа «Хаббл» было окончательно экспериментально доказано ускоренное расширение Вселенной, что свидетельствует о существовании новой субстанции, приводящей к *антигравитации* в масштабах Вселенной. Физическая природа этой антигравитации пока не совсем ясна, поэтому ее стали именовать «темной энергией», которой, согласно формуле Эйнштейна $E = mc^2$, соответствует масса, а следовательно, и плотность темной энергии.

В настоящее время принимается, что видимая (наблюдаемая) материя составляет только ~5 %, темная материя ~25 %, масса темной энергии ~70 % от всей материи во Вселенной.

Более подробное описание ситуации до 2006 г., когда появились гипотезы о существовании темной материи и энергии, можно найти, например, в [1–4]. Но с 2006 г. и до настоящего времени крупнейшими обсерваториями мира, выдающимися астрофизиками и астрономами проведены обширные исследования (см., напр., [5–15]), которые несколько проясняют физическую природу этих «темных» субстанций и подтверждают их примерное процентное соотношение: (1–5) %, 25 %, (74–70) %.

В работе [12], например, утверждается, что 96 % общего количества вещества во Вселенной составляют темная материя и энергия, которые обнаруживают свое существование фоновым излучением радиоволн, находятся в газообразном состоянии и заполняют все пространство.

Состав, химические и физические свойства «темного» газа пока достоверно не выяснены, но он обладает плотностью. В ряде исследований (см., напр., [16–18]) сделаны попытки найти величину этой плотности. Согласно [17], в Солнечной системе плотность темной материи $\rho_{Т.М} < (10^{-19} \div 10^{-20}) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. В Галактике и скоплениях галактик плотность темной материи, как, например, утверждается в [16], в несколько раз больше плотности видимой материи (см. также [18, 19]):

$$\rho_{Т.М} \sim n\rho_{\text{вид}}, \quad 2 \leq n \leq 10. \quad (1)$$

Итак, принимаем, что пространство заполнено видимой материей, плотность которой обозначим $\rho_{\text{вид}}$, темной материей с плотностью $\rho_{Т.М}$. Обзор исследований по темной материи приводит к выводу: плотность $\rho_{Т.М}$ в различных областях Вселенной находится в пределах от 10^{-18} до $10^{-29} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Астрофизиками была выдвинута еще одна гипотеза: в масштабе Вселенной темная энергия может являться причиной *антигравитации* (см. [4, 16]). Но ее плотность во Вселенной постоянна и чрезвычайно мала: $\rho_{Т.ЭН} = 10^{-29} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, поэтому она не может влиять на движение тел в космосе. Следовательно, принимать во внимание $\rho_{Т.ЭН}$ в рамках проблемы движения тел нет смысла. В любом случае в различных областях Вселенной имеем плотность всей материи ρ_{Σ} , определяемой простой формулой

$$\rho_{\Sigma} = \rho_{\text{вид}} + \rho_{Т.М}. \quad (2)$$

Движение тел при учете темной материи. Рассмотрим подробнее некоторые из возможностей, используя весьма скудные экспериментальные данные о плотностях. Обсуждение разделим на две части: поступательное движение и вращательное движение частицы (пробного тела, планетезимали, экзопланеты, планеты).

Поступательное движение. В любой области пространства имеем $\rho_\Sigma > \rho_{\text{вид}} > 0$, и поэтому рассмотренные ранее эффекты в движении тел и лучей света (см. [19–36]) должны претерпеть определенные изменения в количественном и даже качественном смысле. Проиллюстрируем эти утверждения на конкретных примерах.

В работах [20–29, 32–36] подробно исследованы закономерности движения тел в среде в ньютоновском приближении (НП) и постньютоновском приближении (ПНП) теории тяготения Эйнштейна, т. е. в общей теории относительности (ОТО). Во всех рассмотренных задачах принималась в расчет только видимая (наблюдаемая) материя (газопылевые облака, астероиды, кометы, планеты, звезды, галактики и т. д.), плотность которой определялась путем усреднения в некотором объеме пространства и обозначалась во всех выведенных формулах буквой ρ . При учете гравитационного поля темной материи во всех формулах в упомянутых работах вместо ρ следует писать ρ_Σ из формулы (2).

Рассмотрим, например, орбиту вращающейся частицы в гравитационном поле, создаваемом однородным материальным шаром с плотностью материи ρ_Σ и притягивающим центром массой M .

Так как $\rho_\Sigma = \text{const} > 0$ и величина малая, то имеем те же условия, при которых решалась задача о выводе уравнения орбиты поступательного движения вращающейся частицы в работе [21] без учета гравитационного поля темной материи. А при его учете получаем уравнения орбит в НП и ПНП ОТО из уравнений (2.5) и (3.7) работы [21] автоматически путем замены в этих уравнениях ρ на ρ_Σ . В НП ОТО движение частицы происходит в плоскости $x^1 O x^2$.

Итак, не повторяя вычислений, проделанных в [21], заменив всюду в этой работе плотность $\rho = \text{const}$ на $\rho_\Sigma = \text{const}$, получаем уравнение орбиты поступательного движения вращающейся частицы в полярных координатах r, φ с точностью до ρ_Σ в первой степени и до эксцентриситета e во второй степени $0 < e < 1$: а) ньютоновское приближение общей теории относительности

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p} + \frac{2\pi p^2 \rho_\Sigma}{M} \left(\frac{2}{3} - e \varphi \sin \varphi + 2e^2 - \frac{2}{3} e^2 \cos 2\varphi \right); \quad (3)$$

которое будет полезным преобразовать к виду (см. [21, (3.1)])

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e_\rho \cos \left[(1 + \alpha_\rho^H) \varphi \right]}{p_\rho}, \quad (4)$$

где

$$e_\rho = e \left[1 - \frac{4\pi p^3 \rho_\Sigma}{3M} (1 + 2e \cos \varphi) \right], \quad (5)$$

$$\alpha_\rho^H = \frac{2\pi p^3}{M} \rho_\Sigma, \quad (6)$$

$$p_\rho = p \left[1 - \frac{4\pi p^3 \rho_\Sigma}{3M} (1 + 4e^2) \right]; \quad (7)$$

б) постньютоновское приближение общей теории относительности позволяет записать с точностью до вековых членов уравнение орбиты в виде (ср.: [21, (3.7)])

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \tilde{e} \cos \left[(1 + \alpha_\Sigma) \varphi \right]}{p}, \quad \alpha_\Sigma = \alpha_\rho^H - \alpha_0 + \alpha_\rho + \alpha_\sigma + \alpha_{\rho\sigma}, \quad (8)$$

где

$$\tilde{e} = e \left[1 + \frac{\pi p^2}{c^2} \left(6\gamma + \frac{5\sigma^{12}}{\sqrt{\gamma M p}} \right) \rho_\Sigma \varphi^2 \right], \quad (9)$$

$$\alpha_\rho^H = \frac{2\pi p^3}{M} \rho_\Sigma, \quad \alpha_0 = \frac{3\gamma M}{c^2 p}, \quad \alpha_\rho = \frac{2\pi \gamma p^2}{c^2} \left(10 - \frac{2p}{R} \right) \rho_\Sigma, \quad (10)$$

$$\alpha_\sigma = -\frac{5\gamma M \sigma^{12}}{2c^2 p \sqrt{\gamma M p}}, \quad \alpha_{\rho\sigma} = -\frac{17\pi\gamma p^2 \sigma^{12}}{3c^2 \sqrt{\gamma M p}} \rho_\Sigma, \quad S^{ij} = m\sigma^{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

– тензор углового момента (спина) частицы, m – ее масса.

Отметим также, что движение вращающейся частицы, как правило, не является плоским, т. е. не будет происходить в координатной плоскости $x^1 O x^2$ прямоугольной декартовой системы координат $Ox^1 x^2 x^3$ согласно уравнению (8) в ПНП ОТО, а с точностью до вековых членов будет выходить из плоскости $x^3 = 0$ по выведенному в [21, (3.6)] закону:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^3 = & \frac{3}{2c^2} \sqrt{\frac{\gamma}{M p}} \left\{ \sigma^{13} \left[\frac{1}{3} \pi p^3 e (5 \sin^4 \varphi - 2 \cos^4 \varphi) \rho_\Sigma - \frac{1}{2} M \cos \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + e \left(\frac{1}{2} M - \frac{8}{3} \pi p^3 \rho_\Sigma \right) \cos^2 \varphi - 4 \pi p^3 e \sin^2 \varphi (1 + \cos^2 \varphi) \rho_\Sigma \right] + \right. \\ & \left. + \sigma^{23} \left(\frac{1}{2} M + \frac{2}{3} \pi p^3 \rho_\Sigma \right) \sin \varphi (e \cos \varphi - 1) + \pi p^3 e \varphi \sin \varphi (\sigma^{13} \cos \varphi + \sigma^{23} \sin \varphi) \rho_\Sigma \right\} \varphi. \quad (12) \end{aligned}$$

В ньютоновском приближении общей теории относительности движение является плоским и описывается формулами (4)–(7), из которых следует, что в среде ньютоновская орбита представляет собой слегка пульсирующий измененный в размерах эллипс (4) (в силу (5), (7) для e_ρ , p_ρ), который благодаря (6) еще и поворачивается в плоскости $x^3 = 0$ (происходит смещение периастра) в сторону, противоположную направлению движения частицы по орбите (обратное смещение), так как $\rho_\Sigma > 0$ и, следовательно, согласно (6), $\alpha_\rho^H > 0$, смещение за один оборот $\varphi = 2\pi$ частицы по орбите равно $\Delta\varphi_\rho^H = -2\pi\alpha_\rho^H$. Вращение сферически симметричной частицы на ее поступательное движение не влияет в НП ОТО и тензор $S^{ij} = m\sigma^{ij}$ постоянен. Так как $\rho_\Sigma > \rho_{\text{вид}}$, то, согласно зависимостям (4)–(7), при учете гравитационного поля темной материи в законах поступательного движения происходят только количественные изменения: эксцентриситет e_ρ и параметр p_ρ уменьшаются, а смещение периастра увеличивается на конечные величины.

В постньютоновском приближении общей теории относительности траектория сферически симметричной вращающейся частицы приобретает несколько новых свойств и особенностей.

Во-первых, эксцентриситет \tilde{e} в уравнении эллипса (8), согласно зависимости (9), меняется вековым образом, причем добавки $\rho_{\text{Т.М}}$ и $\rho_{\text{Т.ЭН}}$ к $\rho_{\text{вид}}$ в ρ_Σ усиливают вековой эффект (9). Точнее, \tilde{e} быстрее стремится к 1, когда величина $q \equiv 6\gamma + 5\sigma^{12} / \sqrt{\gamma M p} \geq 0$, и стремится к нулю при $q < 0$. Случай $q < 0$ осуществляется, если

$$\sigma^{12} < -1,2\gamma\sqrt{\gamma M p}. \quad (13)$$

Условие (13) означает, что собственное вращение частицы (пробного тела) должно быть обратным, т. е. противоположным направлению обращения частицы по орбите. В Солнечной системе обратным вращением обладает среди известных планет только Венера, у которой $\sigma_V^{12} \approx -0,44 \cdot 10^{11} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Правая часть неравенства (13) имеет оценку для Венеры: $\approx -30,42 \cdot 10^{11} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Таким образом, для Венеры неравенство (13) не выполняется, и ее эксцентриситет \tilde{e}_V с ростом φ увеличивается от e до 1, как и для всех планет Солнечной системы. Будет разумным предположить, что в ряде других планетарных систем (их существование доказано экспериментально [4, 37]) могут находиться планеты с обратным вращением, для которых неравенство (13) выполняется и, следовательно, их орбиты должны эволюционировать к круговым ($e \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \infty$).

Во-вторых, проведем оценку величины α_Σ для некоторых планет Солнечной системы, приняв в соответствии с обоснованным в работе [17, табл. 7] однородное значение плотности $\rho_{\text{Т.М}} \approx 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и значение для $\rho_{\text{вид}} \approx 3 \cdot 10^{-20} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, экспериментально полученное космическими аппаратами «Пионер-10» и «Пионер-11» (см. [38, 39]). Тогда, согласно (1) и (2), находим:

$$\rho_\Sigma = \rho_{\text{вид}} + \rho_{\text{Т.М}} \approx 3 \cdot 10^{-20} + 2,8 \cdot 10^{-19} = 3,1 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (14)$$

Значение (14) для ρ_Σ подставляем в (10), (11) и получаем оценки величины α_Σ для любой планеты Солнечной системы и, следовательно, в результате простых вычислений находим оценки для смещений $2\lambda\alpha_\Sigma$ перигелиев планет Солнечной системы за один оборот по орбите (φ изменяется на 2π). Если в (8) $\alpha_\Sigma < 0$, то смещение перигелия прямое, т. е. в сторону движения планеты по орбите; если $\alpha_\Sigma > 0$, то смещение обратное. При этом пользуемся табл. 1 и 2 из работы [40]. В итоге этих вычислений для планет Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн и Нептун получаем $\alpha_\Sigma < 0$ (смещение прямое); для планет Уран, Нептун и Плутон имеем $\alpha_\Sigma > 0$ (смещение перигелиев обратное). Сравнение полученных оценок показывает, что без учета темной субстанции смещения перигелиев у всех планет, кроме Плутона, прямые, а у последнего – обратные. Учет темной субстанции приводит к изменению этой градации: планеты от Меркурия до Сатурна включительно должны иметь прямые смещения перигелиев, а Уран, Нептун и Плутон – обратные. Кроме этого еще выясняется, что учет собственных вращений планет описанную ситуацию качественно не меняет, так как α_σ и $\alpha_{\rho\sigma}$ из (11) на несколько порядков меньше α_Σ . Увеличение ρ_Σ приводит к возрастанию α_Σ и превращению ряда орбит с прямым смещением перигелия в орбиты с обратным смещением.

В-третьих, согласно (12), движение вращающейся частицы (планеты) не должно быть плоским: траектория ее движения является пространственной линией, которая с течением времени удаляется от плоскости $x^3 = 0$, периодически переходя относительно этой плоскости с одной стороны на другую, так как $\tilde{x}^3(\varphi)$ периодически меняет знак и увеличивается (формально математически $|\tilde{x}^3(\varphi)| \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow \infty$).

Описанная ситуация качественно не меняется без учета и при учете темной материи, происходят только незначительные численные изменения.

Оценки $|\tilde{x}^3(\varphi)|$ для всех планет Солнечной системы за один оборот по орбите не превышают нескольких сантиметров, но за космогонические промежутки времени, в силу своего векового характера, могут достигать значительных величин. Следует также иметь в виду, что у многих звезд существуют планетарные системы, планеты которых имеют большие собственные угловые моменты, находятся на близком расстоянии от звезды и имеют очень малый период обращения, что должно приводить к быстрому росту $|\tilde{x}^3(\varphi)|$ и причудливым траекториям их движения (см. [4, 37, 40]).

Собственное вращение тел в среде при учете темной материи. Без учета гравитационного поля темной материи законы собственного вращения частицы (планеты) внутри газопылевого шара радиусом R с постоянной плотностью и притягивающим центром массой M в постньютоновском приближении общей теории относительности выведены в [22, 41]. Так как мы рассматриваем случай, в котором предполагается $\rho_\Sigma = \text{const}$, то при учете темной материи методика всех вычислений и полученные формулы и эффекты остаются теми же, что и в [22, 41], только несколько изменяются численные оценки в силу неравенства плотностей $\rho_\Sigma > \rho_{\text{вид}}$. Действительно, перепишем в несколько ином виде формулы (25) и (28) из [41], описывающие координаты вектора \tilde{S}_k собственного углового момента импульса частицы и модуль этого вектора в ПНП ОТО (ρ заменяем на ρ_Σ и принимаем $k = \frac{1}{2}$ – условие Фока – Рябушко [42, 43]):

$$\tilde{S}_k = S_k + \frac{1}{c^2} \left\{ S_k + 3S_k \left[\frac{\gamma M}{r} + 2\pi\gamma\rho_\Sigma \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

$$|\tilde{S}| = |\bar{S}| - \frac{5\pi\gamma p^2 e}{2|\bar{S}|c^2} S_3^2 \rho_\Sigma \varphi \sin \varphi, \quad (16)$$

где $\bar{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $|\bar{S}| = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}$, $\tilde{S} = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3)$; r – ньютоновское расстояние частицы до притягивающего центра. С точностью до вековых членов, содержащих ρ_Σ и эксцентриситет e не выше первой степени, релятивистская добавка S_k к ньютоновской S_k в (15) определяется следующими выражениями (см. формулы (22)–(24) в [41]):

$$S_1 = S_5^{23} = -\frac{3}{2} \frac{\gamma M}{p} S_2 \varphi + \pi \gamma p^2 \rho_\Sigma (4eS_1 \sin \varphi - 3eS_2 \cos \varphi - 4S_2) \varphi, \quad (17)$$

$$S_2 = S_5^{31} = \frac{3}{2} \frac{\gamma M}{p} S_1 \varphi + \pi \gamma p^2 \rho_\Sigma \left(4eS_2 \sin \varphi - \frac{3}{2} eS_1 \cos \varphi - 4S_1 \right) \varphi, \quad (18)$$

$$S_3 = S_5^{12} = \frac{3}{2} \pi \gamma p^2 e \rho_\Sigma S_3 \varphi \sin \varphi. \quad (19)$$

Так как в НП ОТО движение частицы финитное (эллипс) и в ПНП ОТО вычисление величин проводится с точностью до вековых членов, то в (15) от выражения в фигурных скобках остается только S_k , т. е. вместо (15) имеем закономерность

$$\tilde{S}_k = S_k + \frac{1}{c^2} S_k, \quad (20)$$

где S_k определяется формулами (17)–(19).

Итак, получены рабочие формулы (16)–(20), с помощью которых можно исследовать поведение релятивистского (в ПНП ОТО) собственного углового момента импульса пробного тела (планеты, астероида и т. д.) в любой планетарной системе при учете влияния гравитационного поля темной материи. Для исключения этого влияния в формулах (16)–(20) следует заменить ρ_Σ на $\rho = \rho_{\text{вид}}$.

Очевидно, что в общем случае вектор $\tilde{S} = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3)$ изменяет вековым образом свои направление и величину, причем эти изменения увеличиваются при учете темной материи, так как $\rho_\Sigma > \rho_{\text{вид}}$.

Общие заключительные замечания. Можно считать, по-видимому, доказанным экспериментально, что все видимые, наблюдаемые объекты, различные материальные образования от галактик, звезд и до электромагнитных излучений, гравитационных волн «плавают» в безбрежном поле темной субстанции, свойства и состав которой человечеству почти неизвестны.

Но тем не менее, опираясь на пока скудные знания об этой субстанции (физики-теоретики и экспериментаторы считают ее новой формой материи), необходимо проводить дальнейшие исследования, руководствуясь принципом Даламбера в научном творчестве: «Шагай вперед – понимание потом придет».

Белорусской научной школой решен ряд задач по релятивистскому движению вращающихся тел в газопылевой среде при учете светового давления, магнитных полей и других факторов. По мере накопления данных о темной субстанции появится возможность сформулировать и решить множество задач в рамках проблемы движения тел и электромагнитных излучений при учете влияния гравитационных и, возможно, других полей (антигравитация) на поведение тел в космосе.

Список использованных источников

1. Строение звездных систем / под ред. П. Н. Холопова. – М.: Иностран. лит., 1962. – 628 с.
2. Zwicky, F. Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies / F. Zwicky, E. Herzog, P. Wild. – Pasadena, 1968.
3. Зельдович, Я. Б. Строение и эволюция Вселенной / Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. – М.: Наука, 1975. – 736 с.
4. Стражев, В. И. К тайнам Вселенной / В. И. Стражев. – Минск: РИВШ, 2006. – 160 с.
5. Гнедин, Ю. Н. Темная материя во Вселенной: современные состояния проблемы / Ю. Н. Гнедин, М. Ю. Пятрович // Тр. Ин-та прикладной астрономии РАН. – 2008. – № 18. – С. 137–160.
6. Khlopov, M. Y. Composite dark matter and puzzles of dark matter searches / M. Y. Khlopov, A. G. Mayorov, E. Y. Sol-datov // Int. J. Mod. Phys D. – 2010. – Vol. 19, № 8–10. – P. 1385–1395. <https://doi.org/10.1142/s0218271810017962>
7. Гальпер, А. М. Гамма-астрономия и темная материя / А. М. Гальпер // Земля и Вселенная. – 2012. – № 5. – С. 3–17.
8. Засов, А. В. О связи распределения нейтрального водорода с темной массой в галактиках / А. В. Засов, Н. А. Терехова // Письма в астрон. журн. – 2013. – Т. 39, № 5. – С. 323.
9. Асадов, В. А. Решение проблемы скрытой массы в скоплениях галактик / В. А. Асадов // Проблемы соврем. науки и образования. – 2017. – № 16 (98). – С. 10–13.
10. Розгачева, И. К. Нужна ли темная материя в галактиках? / И. К. Розгачева, А. А. Агапов // Астрон. журн. – 2018. – Т. 95, № 9. – С. 585–590.
11. Возможности детектирования субгало из темной материи телескопом гамма-400 / А. Е. Егоров [и др.] // Ядер. физика. – 2018. – Т. 81, № 3. – С. 360–365.

12. Бурого, С. Г. Опытное свидетельство о космической газообразной темной материи Вселенной / С. Г. Бурого // *Естеств. и техн. науки.* – 2019. – № 3 (129). – С. 28–32. <https://doi.org/10.25633/etn.2019.03.15>
13. Бурого, С. Г. Звезды и планеты в континууме темной материи и темной энергии / С. Г. Бурого // *Актуал. проблемы соврем. науки.* – 2020. – № 2 (111). – С. 51–57.
14. Sofue, Y. Rotation curve of the Milky Way and the dark matter density / Y. Sofue // *Galaxies.* – 2020. – Vol. 8, № 2. – P. 37. <https://doi.org/10.3390/galaxies8020037>
15. Kumar, A. Observational constraints on holographic dark energy model with matter creation / A. Kumar, C. P. Singh // *Astrophys. Space Sci.* – 2020. – Vol. 365, № 5. – P. 84. <https://doi.org/10.1007/s10509-020-03799-1>
16. Лукаш, В. Н. Темная материя: от начальных условий до образования структуры Вселенной / В. Н. Лукаш, Е. В. Михеева // *Успехи физ. наук.* – 2007. – Т. 177, № 9. – С. 1023–1028.
17. Питьев, Н. П. Ограничения на темную материю в Солнечной системе / Н. П. Питьев, Е. В. Питьева // *Письма в астроном. журн.* – 2013. – Т. 39, № 3. – С. 163–172.
18. Васенин, И. М. О средней плотности материи во Вселенной и темной энергии / И. М. Васенин, В. Л. Гойко // *Изв. высш. учеб. заведений. Физика.* – 2017. – Т. 60, № 6. – С. 32–36.
19. Рябушко, А. П. Точки р-либрации в задаче трех тел / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 330–346. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-330-346>
20. Рябушко, А. П. Релятивистские уравнения поступательного движения вращающейся частицы в среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 1997. – № 3. – С. 68–70.
21. Жур, Т. А. Релятивистское поступательное движение вращающейся частицы в среде / Т. А. Жур, И. Т. Неманова, А. П. Рябушко // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 1998. – № 1. – С. 79–83.
22. Жур, Т. А. Релятивистское вращение частицы в среде / Т. А. Жур // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 1998. – № 3. – С. 82–85.
23. Рябушко, А. П. Релятивистские уравнения поступательного движения двух вращающихся тел сравнимых масс в среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2001. – № 3. – С. 64–68.
24. Рябушко, А. П. Релятивистское поступательное движение двух вращающихся тел сравнимых масс в среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2003. – № 3. – С. 68–73.
25. Рябушко, А. П. Релятивистские уравнения вращательного движения двух вращающихся тел в среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2004. – № 1. – С. 80–83.
26. Рябушко, А. П. Релятивистские собственные вращения двух тел в гравитирующей среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2004. – № 2. – С. 61–65.
27. Рябушко, А. П. Риманово пространство-время, определяемое неоднородным газопылевым шаром с гравитирующим центром, в общей теории относительности / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2005. – № 4. – С. 77–85.
28. Рябушко, А. П. Ньютоновские и релятивистские эффекты движения тела в гравитационном поле неоднородной среды. I. Ньютоновское приближение ОТО / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2007. – № 2. – С. 86–90.
29. Рябушко, А. П. Ньютоновские и релятивистские эффекты движения тела в гравитационном поле неоднородной среды. II. Постньютоновское приближение ОТО / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2009. – № 1. – С. 70–75.
30. Рябушко, А. П. Pioneer anomaly как реликтовое ускорение пробного тела в Солнечной системе / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2009. – № 3. – С. 99–104.
31. Ryabushko, A. P. Motion of Bodies and Its Stability in the General Relativity Theory / A. P. Ryabushko, T. A. Zhur, I. T. Nemanova // *AIP Conf. Proc.* – 2010. – Vol. 1205, № 1. – P. 148–154. <https://doi.org/10.1063/1.3382322>
32. Рябушко, А. П. Метрика риманова пространства-времени, порожденного неоднородной средой с притягивающим центром / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2012. – № 1. – С. 96–100.
33. Рябушко, А. П. Движение пробного тела в римановом пространстве-времени, порожденном неоднородной средой с притягивающим центром / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. физ.-мат. наук.* – 2012. – № 2. – С. 89–92.
34. Рябушко, А. П. Гравитационное поле притягивающего центра, окруженного пылевидным облаком, в постньютоновском приближении общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // *Докл. Акад. наук БССР.* – 1983. – Т. 27, № 10. – С. 889–892.
35. Рябушко, А. П. Релятивистские эффекты движения пробных тел в газопылевом шаре с притягивающим центром / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // *Докл. Акад. наук БССР.* – 1984. – Т. 28, № 9. – С. 806–809.
36. Рябушко, А. П. Гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами в общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // *Докл. Акад. наук БССР.* – 1987. – Т. 31, № 8. – С. 519–522.
37. Засов, А. В. Общая астрофизика / А. В. Засов, К. А. Постнов. – Фрязино: Век-2, 2011. – 576 с.
38. Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11 / J. D. Anderson [et al.] // *Phys. Rev. D.* – 2002. – Vol. 65, № 8. – P. 1–50. <https://doi.org/10.1103/physrevd.65.082004>
39. Nieto, M. M. Directly measured limit on the interplanetary matter density from Pioneer 10 and 11 / M. M. Nieto, S. G. Turyshev, J. D. Anderson // *Phys. Lett. B.* – 2005. – Vol. 613, № 1–2. – P. 11–19. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.03.035>

40. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии / Э. В. Кононович, В. И. Мороз. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 544 с.
 41. Жур, Т. А. Релятивистское движение вращающихся тел в среде: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Т. А. Жур. – Минск, 1999. – 18 с.
 42. Фок, В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – М.: Физматгиз, 1961. – 564 с.
 43. Рябушко, А. П. Движение тел в общей теории относительности / А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1979. – 240 с.

References

1. Flüge S. (ed.). *Handbuch der Physik. Bd. 53 Astrophysik IV: Sternsysteme*. Berlin, Springer-Verl., 1959. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-45932-0>
2. Zwicky F., Herzog E., Wild P. *Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies*. Pasadena, 1968.
3. Zeldovich Y. B., Novikov I. D. *Structure and Evolution of the Universe*. Moscow, Nauka Publ., 1975. 736 p. (in Russian).
4. Strazhev V. I. *To the Secrets of the Universe*. Minsk: National Institute of Higher Education, 2006. 160 p.
5. Gnedin U. N., Piotrovich M. U. Dark Matter in the Universe: Current State of the Problem. *Trudy Instituta prikladnoi astronomii RAN = Transactions of the Institute of Applied Astronomy RAS*, 2008, no. 18, pp. 137–160 (in Russian).
6. Khlopov M. Y. Composite dark matter and puzzles of dark matter searches. *International Journal of Modern Physics D*, 2010, vol. 19, no. 8–10, pp. 1385–1395. <https://doi.org/10.1142/s0218271810017962>
7. Galper A. M. Gamma-astronomy and Dark Matter. *Zemlya i Vseennaya* [Earth and Universe], 2012, no. 5, pp. 3–17 (in Russian).
8. Zasov A. V., Terehova N. A. The relationship between the neutral hydrogen and dark mass in the galaxies. *Astronomy Letters*, 2013, vol. 39, no. 5, pp. 291–297. <https://doi.org/10.1134/s106377371305006x>
9. Asadov V. A. The solution of the hidden mass problem in clusters of galaxies. *Problemy sovremennoi nauki i obrazovaniya = Problems of modern Science and Education*, 2017, no. 16 (98), pp. 10–13 (in Russian).
10. Rozgacheva I. K., Agapov A. A. Is Dark Matter Needed in Galaxies? *Astronomy Reports*, 2018, vol. 62, no. 9, pp. 551–556. <https://doi.org/10.1134/s106377291809007x>
11. Egorov A. E., Galper A. M., Topchiev N. P., Leonov A. A., Suchkov S. I., Kheymits M. D., Yurkin U. T. Detectability of Dark Matter Subhalos by Means of the GAMMA-400 Telescope. *Physics of Atomic Nuclei*, 2018, vol. 81, no. 3, pp. 373–378. <https://doi.org/10.1134/s1063778818030110>
12. Burago S. G. Experimental evidence of the cosmic gaseous dark matter of the universe. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Natural and Technical Sciences*, 2019, no. 3 (129), pp. 28–32 (in Russian). <https://doi.org/10.25633/etn.2019.03.15>
13. Burago S. G. Stars and planets in the dark matter and dark energy continuum. *Aktual'nye problemy sovremennoi nauki* [Actual Problems of modern Science], 2020, no. 2 (111), pp. 51–57 (in Russian).
14. Sofue Y. Rotation curve of the Milky Way and the dark matter density. *Galaxies*, 2020, vol. 8, no. 2, pp. 37. <https://doi.org/10.3390/galaxies8020037>
15. Kumar A. Observational constraints on holographic dark energy model with matter creation. *Astrophysics and Space Science*, 2020, vol. 365, no. 5, pp. 84. <https://doi.org/10.1007/s10509-020-03799-1>
16. Lukash V. N., Mikheeva E. V. Dark matter: from initial conditions to structure formation in the universe. *Uspekhi fizicheskikh nauk = Physics–Uspekhi*, 2007, vol. 177, no. 9, pp. 1023–1028 (in Russian).
17. Pitjev N. P., Pitjeva E. V. Constraints on dark matter in the solar system. *Astronomy Letters*, 2013, vol. 39, no. 3, pp. 141–149. <https://doi.org/10.1134/s1063773713020060>
18. Vasenin I. M., Goiko V. L. On the Mean Density of Matter in the Universe and Dark Energy. *Russian Physics Journal*, 2017, vol. 60, no. 6, pp. 958–963. <https://doi.org/10.1007/s11182-017-1164-x>
19. Ryabushko A. P., Zhur T. A. ρ -Libration point in the three body problem. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 330–346 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-330-346>
20. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic equations of translational motion of rotation particle in the environment. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1997, no. 3, pp. 68–70 (in Russian).
21. Zhur T. A., Nemanova I. T., Ryabushko A. P. Relativistic translational motion of the rotating particle in the environment. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1998, no. 1, pp. 79–83 (in Russian).
22. Zhur T. A. Relativistic rotation of the particle in the environment. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1998, no. 3, pp. 82–85 (in Russian).
23. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic equations of translational motion of two rotating bodies of comparable mass in the environment. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2001, no. 3, pp. 64–68 (in Russian).
24. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic translational motion of two rotating bodies of comparable mass in the environment. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2003, no. 3, pp. 68–73 (in Russian).
25. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic equations of rotational motion of two rotating bodies in the environment. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2004, no. 1, pp. 80–83 (in Russian).

26. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic proper rotations of two bodies in the gravitational environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2004, no. 2, pp. 61–65 (in Russian).
27. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Riemannian space-time, defined by an inhomogeneous gas-dust ball with the gravitational center, in general relativity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2005, no. 4, pp. 77–85 (in Russian).
28. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Relativistic effects of the motion of the body in the gravitational field of an inhomogeneous environment. I. Newtonian approximation of the general theory of relativity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2007, no. 2, pp. 86–90 (in Russian).
29. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Relativistic effects of the motion of the body in the gravitational field of an inhomogeneous environment. II. Post-Newtonian approximation of the general theory of relativity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 1, pp. 70–75 (in Russian).
30. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Pioneer anomaly as the relict acceleration of a test body in the Solar system. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 3, pp. 99–104 (in Russian).
31. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Motion of Bodies and Its Stability in the General Relativity Theory. *AIP Conference Proceedings*, 2010. vol. 1215, no. 1, pp. 148–154. <https://doi.org/10.1063/1.3382322>
32. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Metric of the riemann space-time due to the gravitating center surrounded by a nonhomogeneous medium. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 1, pp. 96–100 (in Russian).
33. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. The motion of a test body in the riemann space-time due to the gravitating center surrounded by a nonhomogeneous medium. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 2, pp. 89–92 (in Russian).
34. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The Gravitational Field of an Attractive Center Surrounded by a Dusty Cloud in the Post-Newtonian Approximation of the General Theory of Relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1983, vol. 27, no. 10, pp. 889–892 (in Russian).
35. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. Relativistic Effects of the Motion of Test Bodies in the Gas-Dust Ball with an Attractive Center. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1984, vol. 28, no. 9, pp. 806–809 (in Russian).
36. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The gravitational field of the gas-dust ball with two attractive centers in the general theory of relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1987, vol. 31, no. 8, pp. 519–522 (in Russian).
37. Zasov A. V., Postnov K. A. *General Astrophysics*. Fryazino, Vek-2 Publ., 2011. 576 p. (in Russian).
38. Anderson J. D., Laing P. A., Lau E. I., Liu A. S., Nieto M. M., Turyshev S. G. Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11. *Physical Review D*, 2002, vol. 65, no. 8, pp. 1–50. <https://doi.org/10.1103/physrevd.65.082004>
39. Nieto M. M., Turyshev S. G., Anderson J. D. Directly measured limit on the interplanetary matter density from Pioneer 10 and 11. *Physics Letters B*, 2005, vol. 613, no. 1–2, pp. 11–19. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.03.035>
40. Kononovich E. V., Moroz V. I. *General Course of Astronomy*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 544 p. (in Russian).
41. Zhur T. A. *Relativistic Motion of Rotating Bodies in the environment*. Minsk, 1999. 18 p. (in Russian).
42. Fock V. A. *The Theory of Space, Time and Gravity*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 564 p. (in Russian).
43. Ryabushko A. P. *Motion of Bodies in the General Theory of Relativity*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1979. 240 p. (in Russian).

Информация об авторах

Рябушко Антон Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220141, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Жур Татьяна Антоновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики факультета предпринимательства и управления, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Information about the authors

Anton P. Ryabushko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Tatyana A. Zhur – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Entrepreneurship and Management, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatanazhur@mail.ru