

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЛОСКОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 28.02.2014)

Пусть V – конечное множество точек на евклидовой плоскости в *общем положении*, т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой; среди проходящих через них прямых нет параллельных и никакие три из этих прямых не пересекаются в точке, не принадлежащей множеству V . Тогда *геометрический граф* с множеством вершин V есть пара $G = (V, E)$, где каждое ребро из множества E представляет собой некоторый прямолинейный отрезок с концами из множества точек V . Два ребра геометрического графа *пересекаются*, если они имеют общую внутреннюю (для обоих) точку пересечения. Если два ребра e и f геометрического графа G пересекаются (не пересекаются), то кратко этот факт будем обозначать через $e \cap f \neq \emptyset$ ($e \cap f = \emptyset$). *Плоское* (или *непересекающееся*) *остовное дерево* – это дерево графа G без самопересечений своих ребер, которое содержит все вершины множества V .

Для геометрического графа $G = (V, E)$ и подмножества вершин $U \subseteq V$ обозначим через $G[U]$ подграф G , *индуцированный множеством* U , т. е. геометрический граф с множеством вершин U , ребрами которого являются все те ребра графа G , концы которых принадлежат множеству вершин U . Произвольное непересекающееся остовное дерево геометрического подграфа H часто будем обозначать через T_H . Для любых двух точек v и w евклидовой плоскости через $[vw]$ обозначим луч с началом v и направлением, заданным вектором \overrightarrow{vw} .

Как хорошо известно, одна из важных проблем топологической теории графов, а именно, проблема распознавания существования непересекающегося подграфа H с заданным графовым свойством P , даже в геометрическом графе является в общем случае трудноразрешимой для основных графовых свойств [1]. Поэтому возникает задача: исследовать условия, достаточные для существования непересекающегося подграфа с графовым свойством P в заданном геометрическом графе G .

В данной статье продолжают исследования, связанные с нахождением в геометрическом графе $G = (V, E)$ локальных достаточных условий существования в нем непересекающегося остовного дерева. Эта проблема была инспирирована работой [2], в которой были выдвинуты несколько гипотез о существовании такого дерева в геометрическом графе G . В частности, там была сформулирована следующая гипотеза.

Г и п о т е з а. Пусть $t \geq 2$ – произвольное целое число и G – геометрический граф, по крайней мере, с t вершинами. Тогда, если $G[U]$ имеет плоское остовное дерево для любого множества U из t вершин, то и граф G имеет плоское остовное дерево.

В работе [3] мы частично подтвердили эту гипотезу в частном случае, когда $t = 6$. Далее докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. Пусть $t \geq 6$ – произвольное целое число. Тогда почти все геометрические графы $G = (V, E)$ порядка $n \geq t$ (кроме, может быть, $(t-2)(t-3)/2$ графов) обладают следующим свойством: если для любого подмножества $U \subset V$ из t вершин индуцированный граф $G[U]$ содержит плоское остовное дерево, то и сам граф G содержит плоское остовное дерево.

Доказательство. Покажем сначала, что если порядок G графа имеет вид:

$$n = (m - 1) \cdot k + (m - 2) \cdot l + 1, \text{ где } k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то геометрический граф G удовлетворяет указанному свойству. Действительно, рассмотрим две произвольные экстремальные точки v_1, v_2 множества V , последовательно выбранные на границе $\text{Ch}(V)$ выпуклой оболочки $\text{conv}(V)$ множества V при обходе ее против часовой стрелки. Будем вращать луч $[v_1 v_2)$ против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , пока он не пройдет через такую вершину u_1 , что в секторе $v_2 v_1 u_1$ лежат m вершин, включая вершины v_2, v_1, u_1 . Вращая луч $[v_1 v_2)$ дальше против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , найдем такую вершину u_2 , что в секторе $u_1 v_1 u_2$ лежат m вершин, включая вершины u_2, v_1 и не включая вершины u_1 . Продолжаем вращать луч $[v_1 v_2)$ дальше, пока не найдем во множестве V такую вершину u_k , что в секторе $u_{k-1} v_1 u_k$ лежат m вершин, включая вершины u_k, v_1 и не включая вершины u_{k-1} .

Заметим, что если $l = 0$, то u_k является экстремальной точкой, предшествующей вершине v_1 при обходе границы $\text{Ch}(V)$ против часовой стрелки.

Если же $l > 0$, то продолжаем вращать луч $[v_1 v_2)$ против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , пока он не пройдет через такую вершину w_1 , что в секторе $w_1 v_1 u_k$ лежат m вершин, включая три вершины w_1, v_1 и u_k . Вращая луч $[v_1 v_2)$ дальше против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , найдем такую вершину w_2 , что в секторе $w_2 v_1 w_1$ лежат m вершин, включая три вершины w_2, v_1 и w_1 . Продолжаем вращать луч $[v_1 v_2)$, пока не найдем такую вершину w_l , что в секторе $w_{l-1} v_1 w_l$ лежат m вершин, включая три вершины w_{l-1}, v_1 и w_l . При этом из вида порядка графа G вершина w_l является последней просмотренной вершиной множества V , причем экстремальной точкой, предшествующей вершине v_1 при обходе границы $\text{Ch}(V)$ против часовой стрелки.

В силу построения вершин u_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и w_j ($j = 1, 2, \dots, l$) и условия теоремы в каждом секторе $u_{i-1} v_1 u_i$ и $w_{j-1} v_1 w_j$ существует плоское остовное дерево T_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и T_j ($j = 1, 2, \dots, l$). Объединение всех этих деревьев

$$H = \left(\bigcup_{i=1}^k T_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^l T_j \right)$$

является плоским остовным подграфом графа G . Удаляя из графа H лишние ребра, получим плоское остовное дерево в геометрическом графе G .

Чтобы оценить число геометрических графов, имеющих указанный выше порядок, нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 1. Для любого целого числа $m \geq 1$ следующие множества совпадают:

$$\{m \cdot k + (m - 1) \cdot l + 1 \mid k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+\} = \{(m - 1) \cdot s + t \mid \text{где } s \in \mathbb{N}, 2 \leq t \leq s + 1\}. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость включения \subset : имеем

$$m \cdot k + (m - 1) \cdot l + 1 = (m - 1) \cdot (k + l) + (k + 1).$$

Положим $s = (k + l) \geq 1$, тогда $k = s - l$ и, следовательно, $2 \leq k + 1 = s + 1 - l \leq s + 1$.

Справедливость обратного включения \supset покажем индукцией по s . Пусть $s = 1$, тогда $t = 2$, следовательно, $(m - 1) \cdot 1 + 2 = m + 1$, т. е. при $k = 1, l = 0$ число $(m - 1) \cdot 1 + 2$ лежит в левом множестве равенства (1).

Предположим теперь, что включение \supset справедливо для всех $s \leq S$. Покажем, что оно верно для $S + 1$.

Если $t \leq S + 1$, то $(m - 1) \cdot (S + 1) + t = (m - 1) \cdot S + t + (m - 1)$, но по индуктивному предположению сумма первых двух слагаемых равна $m \cdot k + (m - 1) \cdot l + 1$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, всю сумму можно представить в виде: $m \cdot k + (m - 1) \cdot (l + 1) + 1$, т. е. число $(m - 1) \cdot (S + 1) + t$ лежит в левом множестве равенства (1).

Если $t = S + 2$, то $(m - 1) \cdot (S + 1) + (S + 2) = m \cdot (S + 1) + 1$, т. е. при $k = S + 1, l = 0$ число $(m - 1) \cdot (S + 1) + (S + 2)$ лежит в левом множестве равенства (1).

Лемма 1 доказана.

Таким образом, в силу леммы 1 показано, что для графа G порядка n из множества

$$N = \{(m-2)s + t \mid \text{где } s \in \mathbb{N}, 2 \leq t \leq s + 1\}$$

справедливо утверждение теоремы 1.

Покажем теперь, что любое целое число $n \geq (m-2)^2 + 2$ принадлежит множеству N . Действительно, разделим n на $(m-2)$ с остатком:

$$n = (m-2)p + q, \text{ где } 0 \leq q \leq m-3.$$

Заметим, что $p \geq (m-2)$, так как иначе $n \leq (m-2) \cdot (m-3) + (m-3) < (m-2)^2 + 2$, противоречие. Если $p = (m-2)$, то остаток q удовлетворяет неравенствам

$$2 \leq q \leq m-3 < p+1,$$

т. е. $n \in N$.

Если $p > (m-2)$, то при q , удовлетворяющем неравенствам $2 \leq q \leq m-3 < p+1$, также $n \in N$. Поэтому пусть $p > (m-2)$, и $q = 0$ или 1 . В этом случае имеем:

$$n = (m-2)p + q = (m-2)(p-1) + (m-2+q),$$

т. е. полагая $s = p-1 > m-3 > 1$ и замечая, что $m-2+q \leq m-1 < s+1$, получаем, что $n \in N$.

Таким образом, любое целое число $n \geq (m-2)^2 + 2$ действительно лежит во множестве N .

Подсчитаем теперь число таких натуральных чисел $n < (m-2)^2 + 2$, которые не принадлежат множеству N .

Прежде всего, такие n будут иметь вид

$$n = (m-2) \cdot p + q,$$

где $1 < p < m-2$ и $q = 0$ или 1 .

Действительно, если $p \leq m-3$, тогда n можно представить в виде

$$n = (m-2) \cdot p + q = (m-2) \cdot (p-1) + (m-2+q),$$

но $m-2+q \geq m-2 > m-3 \geq (p-1)+1$, т. е. $n \notin N$.

Множеству N не принадлежит также целое число n вида $n = (m-2) \cdot p + q$, где $p = m-2$ и $q = 1$. Действительно, в этом случае n имеет вид

$$n = (m-2) \cdot (m-2) + 1 = (m-2) \cdot (m-3) + (m-1),$$

но $m-1 > (m-3)+1$, т. е. снова $n \notin N$.

Следующая серия таких натуральных чисел $n < (m-2)^2 + 2$, которые не принадлежат множеству N , получается, когда в разложении $n = (m-2) \cdot p + q$, частное p удовлетворяет неравенствам $1 \leq p \leq m-5$, а остаток q — неравенствам $p+2 \leq q \leq m-3$. Действительно, уже при $q = m-2$ имеем случай, когда частное равно $p+1$, а остаток $q = 0$: $n = (m-2) \cdot p + (m-2) = (m-2) \cdot (p+1)$. Нетрудно подсчитать, что число таких натуральных n равно:

$$1 + 2 + \dots + (m-5) = \frac{(m-4)(m-5)}{2}.$$

Окончательно подсчитывая число всех натуральных чисел $n < (m-2)^2 + 2$, которые не принадлежат множеству N , получаем:

$$2 \cdot (m-2) + 1 + \frac{(m-4)(m-5)}{2} = \frac{(m-2)(m-3)}{2}.$$

Теорема 1 доказана.

В частности, при $m = 6$ из теоремы 1 получаем шесть значений n , а именно, $n = 7, 8, 9, 12, 13, 17$, для которых нельзя непосредственно применить эту теорему. Тем не менее далее покажем, что для $m = 6$ справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Если для любого подмножества $U \subset V$ из 6 вершин геометрического графа $G = (V, E)$ порядка $n \geq 6$ индуцированный граф $G[U]$ содержит плоское остовное дерево, то и сам граф G содержит плоское остовное дерево.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу результата из [3] наше утверждение достаточно доказать для случая, когда $|\text{Ch}(V)| = 3$. Обозначим $\text{Ch}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Заметим сначала, что с помощью следующего утверждения из [4] случаи $n = 12, 13, 17$ можно свести к случаю $n = 7$.

Л е м м а 2 (о разбиении). Пусть S – множество точек в общем положении на евклидовой плоскости, v_1, v_2, \dots, v_l – вершины границы выпуклой оболочки $\text{Ch}(S)$ и t точек множества S лежат внутри выпуклой оболочки $\text{conv}(S)$. Пусть задано некоторое разбиение числа $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$, где все n_i неотрицательные целые числа. Тогда выпуклая оболочка $\text{conv}(S)$ может быть разбита на l выпуклых многоугольников P_1, P_2, \dots, P_l , таких, что каждый многоугольник P_i ($i = 1, 2, \dots, l$) содержит сторону $v_i v_{i+1}$ в качестве своего ребра и ровно n_i внутренних точек множества S . (Некоторые внутренние точки могут лежать на границах многоугольников P_1, P_2, \dots, P_l , и для этих точек мы сами устанавливаем их принадлежность к соответствующему многоугольнику.)

Действительно, в силу данной леммы, примененной для случая при $n = 17$ и $l = 3$, можно разбить внутренность треугольника $\Delta v_1 v_2 v_3$ с помощью некоторой внутренней точки u на три треугольника $P_1 = \Delta v_1 v_2 u$, $P_2 = \Delta v_2 v_3 u$, $P_3 = \Delta v_1 v_3 u$ таким образом, чтобы в каждом треугольнике P_1, P_2, P_3 лежали 4, 5, 5 вершин соответственно. В силу предположения о справедливости утверждения теоремы 2 для $n = 6$ и 7 у индуцированных графов на вершинах, лежащих в каждом треугольнике, вместе с соответствующими вершинами из границы $\text{Ch}(V)$, существуют плоские остовные деревья T_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда их объединение является плоским остовным графом, из которого легко выделить плоское остовное дерево всего графа G .

Аналогично при $n = 13$ разбиваем внутренность треугольника $\Delta v_1 v_2 v_3$ на треугольники P_1, P_2, P_3 таким образом, чтобы в каждом треугольнике P_1, P_2, P_3 лежали 5, 5, 0 вершин соответственно, а при $n = 12$ – 5, 4, 0 вершин соответственно. В силу предположения о справедливости утверждения теоремы 2 для $n = 6$ и 7 у индуцированных графов на вершинах, лежащих в треугольниках P_1 и P_2 , вместе с соответствующими вершинами из границы $\text{Ch}(V)$, существуют плоские остовные деревья T_i ($i = 1, 2$). Тогда их объединение является плоским остовным деревом всего графа G .

Таким образом, осталось доказать утверждение теоремы 2 для $n = 7, 8$ и 9. Рассмотрим случай $n = 7$.

О п р е д е л е н и е 1. Ребро, лежащее на границе $\text{Ch}(V)$, назовем *граничным ребром*. Для любой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$ ($i = 1, 2, 3$) и $w \in \text{Ch}(V \setminus v_i)$ ребро $e = v_i w$ назовем *крайним*.

Заметим, что граничные и крайние ребра не пересекают никаких ребер графа G . Поэтому далее будем считать, что граф G не содержит граничных и крайних ребер, так как иначе можно построить плоское остовное дерево в исходном графе G , добавив это ребро $v_i w$ к плоскому остовному дереву $T_{V \setminus v_i}$, лежащему в индуцированном графе $G[(V \setminus v_i)]$.

Обозначим через $\text{Ch}_2(V) = \text{Ch}(V \setminus \{v_1, v_2, v_3\})$, т. е. 2-й слой множества вершин V . Пусть сначала $|\text{Ch}_2(V)| = 3$, скажем, $\text{Ch}_2(V) = \{v_4, v_5, v_6\}$. Тогда вершина v_7 лежит внутри $\Delta v_4 v_5 v_6$.

Поскольку граф G не содержит граничных и крайних ребер, то среди вершин $\text{Ch}(V)$ не может быть более одной вершины v_i , для которой $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 4$, поскольку иначе нетрудно видеть, что в индуцированном графе $G[(V \setminus v_i)]$ нельзя найти плоское остовное дерево.

Пусть существует только одна вершина $\text{Ch}(V)$, скажем v_3 , для которой $|\text{Ch}(V \setminus v_3)| = 4$. Обозначим $\text{Ch}(V \setminus v_3) = \{v_1, v_2, v_6, v_4\}$ (рис. 1, а). Тогда в плоском остовном дереве T индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ должны лежать ребра $v_1 v_5, v_2 v_5, v_3 v_5$, а значит, и ребра $v_4 v_5$ и $v_6 v_5$. Поскольку в графе G нет граничных и крайних ребер, то для любой внутренней вершины u треугольника $\Delta v_4 v_5 v_6$, в плоском остовном дереве графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_6, v_4, u\}]$ лежит ребро $v_3 u$. Все такие ребра (при $n = 7, 8$ и 9) вместе с деревом T образуют плоское остовное дерево графа G .

Пусть теперь для любой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$ ($i = 1, 2, 3$) $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 3$. Обозначим вершины $\text{Ch}(V \setminus v_i) = \{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ ($i = 1, 2, 3$) (рис. 1, б).

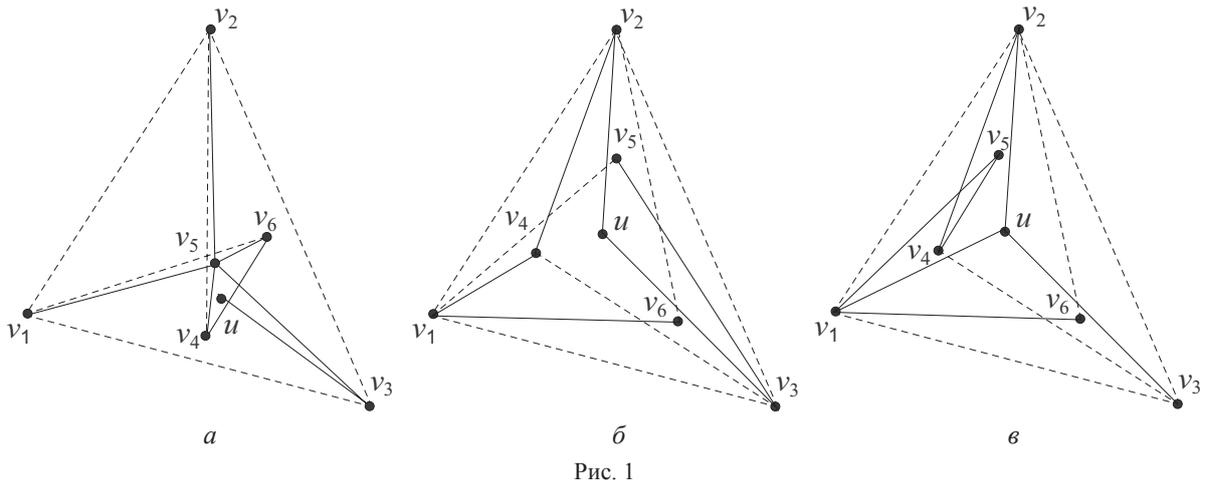


Рис. 1

О п р е д е л е н и е 2. Для произвольной внутренней вершины u и треугольника $\Delta v_4 v_5 v_6$ ребра uv_4, uv_5, uv_6 назовем *внутренними*.

Поскольку в графе G нет граничных и крайних ребер, то в плоском остовном дереве T индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ лежат либо три ребра $v_1 v_5, v_2 v_6$ и $v_3 v_4$, либо три ребра $v_1 v_6, v_2 v_4$ и $v_3 v_5$, а также, по крайней мере, два ребра $\Delta v_4 v_5 v_6$. Так как эти случаи симметричны, без ограничения общности можно рассмотреть первый случай. Поэтому если в графе G существует хотя бы одно внутреннее ребро, то оно вместе с деревом T . Поэтому в дальнейшем будем считать, что граф G вместе с граничными и крайними ребрами не содержит внутренних ребер.

а) Если $uv_1 \cap v_3 v_4 \neq \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 \neq \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 \neq \emptyset$ (см. рис. 1, б), то в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u\}]$ должны лежать ребра $v_1 u$ и $v_2 v_4$. Аналогично в плоском остовном дереве T_2 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, u\}]$ должны лежать ребра $v_2 u$ и $v_3 v_5$, а в плоском остовном дереве T_3 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, u\}]$ – ребра $v_3 u$ и $v_1 v_6$. Все эти ребра образуют плоское остовное дерево графа индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, u\}]$.

б) Если $uv_1 \cap v_3 v_4 \neq \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 = \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 \neq \emptyset$ (рис. 1, в), то в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, u\}]$ должны лежать ребра $v_2 u$ и $v_3 u$. А поскольку граф G не содержит внутренних ребер, то ребра $v_1 v_5, v_1 v_6$ и $v_1 u \in T_1$. Осталось показать, что ребро $v_4 v_5 \in G$. Действительно, если бы $v_4 v_5 \notin G$, то в индуцированном графе $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u\}]$ не существовало бы плоское остовное дерево T_2 . Поскольку тогда бы дереву T_2 принадлежало либо ребро $v_4 v_2$, а значит, и несвязная с ним цепь из ребер $v_1 u, uv_3$ и $v_3 v_5$, либо ребро $v_1 v_5$, а значит, и несвязная с ним цепь из ребер $v_4 v_3, v_3 u$ и uv_2 .

в) Случай $uv_1 \cap v_3 v_4 \neq \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 = \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 = \emptyset$ симметричен случаю б).

г) Случай $uv_1 \cap v_3 v_4 = \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 = \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 = \emptyset$ сводится к случаю а), если вместо тройки ребер $v_1 v_5, v_2 v_6$ и $v_3 v_4$ рассматривать тройку ребер $v_1 v_6, v_2 v_4$ и $v_3 v_5$.

Пусть теперь $|\text{Ch}_2(V)| = 4$, т. е. $\text{Ch}_2(V) = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Можно считать, что не существует такой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$, что $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 5$, поскольку иначе существует крайнее ребро.

Пусть для любой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$ $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 3$. Обозначим внутренние вершины, как раньше: $\text{Ch}(V \setminus v_i) = \{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ ($i = 1, 2, 3$) (рис. 2, а).

Снова без ограничения общности можно считать, что в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ лежат три ребра $v_1 v_5, v_2 v_6$ и $v_3 v_4$, а также, по крайней мере, два ребра $\Delta v_4 v_5 v_6$. В плоском остовном дереве T_2 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра $v_1 v_7$ и $v_3 v_7$ (см. рис. 2, а), а значит, можно построить плоское остовное дерево графа G .

Покажем, что в графе G нет больше одной вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$, такой, что $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 4$. Действительно, предположим противное, и пусть $v_i \in \text{Ch}(V)$ $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 4$ ($i = 2, 3$) (рис. 2, б). Тогда в плоском остовном дереве T индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра $v_1 v_6$ и $v_3 v_4$, а значит, вершина v_2 становится изолированной в T , противоречие.

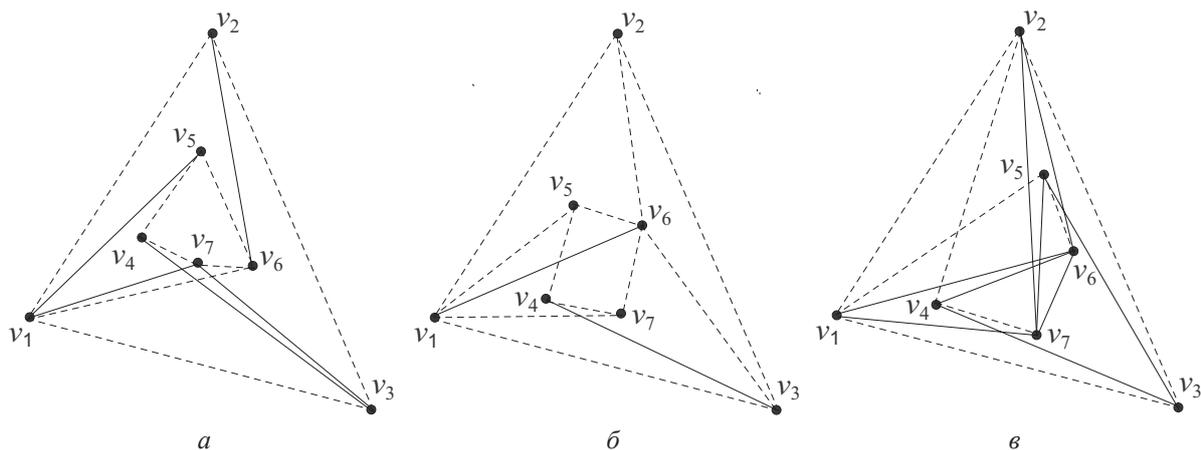


Рис. 2

Осталось рассмотреть случай, когда существует единственная вершина, скажем v_3 , такая, что $|\text{Ch}(I \setminus v_3)| = 4$ (рис. 2, в). Пусть $|\text{Ch}(I \setminus v_3)| = \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$. Заметим, что $v_6 \notin \text{Ch}(I \setminus v_2)$ и $v_6 \notin \text{Ch}(I \setminus v_1)$. Тогда в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра v_3v_4, v_1v_6, v_2v_6 и, по крайней мере, два ребра $\Delta v_4v_6v_7$, а в плоском остовном дереве T_2 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра v_3v_5, v_2v_7, v_1v_7 и, по крайней мере, два ребра $\Delta v_5v_6v_7$. Следовательно, можно считать, что два ребра треугольника $\Delta v_4v_6v_7$, лежащие в дереве T_1 , — это v_4v_6, v_6v_7 , а два ребра треугольника $\Delta v_5v_6v_7$, лежащие в дереве T_2 , — это v_5v_7, v_6v_7 (иначе легко построить плоское остовное дерево T графа G).

Рассмотрим теперь плоское остовное дерево T_3 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$. В нем должно лежать ребро v_3v_5 (иначе вершина v_1 была бы изолированной). Значит, можно считать, что ребро $v_1v_5 \notin T_3$, так как ребро v_1v_5 вместе с деревом T_1 образует плоское остовное дерево T графа G . Следовательно, $v_1v_6 \in T_3$, откуда $v_2v_6 \in T_3$, и значит, ребро $v_5v_6 \in T_3$, которое вместе с деревом T_1 образует плоское остовное дерево T графа G .

Случаи $n = 8$ и 9 рассматриваются аналогично. Теорема 2 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (договор № Ф12РА-006).

Литература

1. Kratochvil J., Lubiw A., Nešetřil J. // SIAM J. Disc. Math. 1991. Vol. 4, N 2. P. 223–244.
2. Rivera-Campo E. // Proceedings of the Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry. Tokyo, Japan. December 1998, LNCS. 2000. Vol. 1763. P. 274–277.
3. Бенедиктович В. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 117–122.
4. Benediktovich V. I. // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2006. Vol. 24. P. 31–38.

V. I. BENEDIKTOVITCH

LOCAL FEATURE FOR THE EXISTENCE OF PLANE SPANNING TREE IN A GEOMETRIC GRAPH

Summary

In this article the local features for the existence of plane spanning trees in a geometric graph have been obtained. Thereby Rivera–Campo’s conjecture has been confirmed for almost all geometric graphs.