ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.537.38
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-351-357

Поступила в редакцию 18.04.2022
Received 18.04.2022

И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ОТОБРАЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ *p*-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрены свойства p-голоморфных отображений. Найдены аналог теоремы Ролля и теорема о глобальном p-диффеоморфизме для p-голоморфной функции. Получен модифицированный принцип соответствия границ для p-голоморфных отображений. Доказаны теоремы об отображении прямоугольных областей и компактных исчерпаний ограниченных областей.

Ключевые слова: дуальные числа, кольцо p-комплексных чисел, p-комплексные функции, делители нуля, p-голоморфность, p-диффеоморфизм, теорема Ролля, принцип соответствия границ, p-голоморфные отображения, исчерпания

Для цитирования. Васильев, И. Л. Отображения с помощью p-голоморфных функций / И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 351–357. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-351-357

Igor L. Vassilyev, Vladimir V. Dovgodilin

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

MAPPING USING *p*-HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Abstract. In this paper, the properties of p-holomorphic maps are considered. An analog of Rolle's theorem and a global p-diffeomorphism theorem for p-holomorphic functions are found. A modified Carathéodory's theorem (conformal mapping) for p-holomorphic mappings is obtained. We prove the theorems of the mapping of rectangular domains and the compact exhaustion of bounded domains.

Keywords: dual numbers, ring of p-complex numbers, p-complex functions, zero divisors, p-holomorphycity, p-diffeomorphism, Rolle's theorem, Carathéodory's theorem, p-holomorphic map, exhaustion

For citation. Vassilyev I. L., Dovgodilin V. V. Mapping using p-holomorphic function. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 351–357 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-351-357

Введение. В настоящее время теория p-комплексных (дуальных) чисел и функций p-комплексных переменных в математической литературе освещена недостаточно (некоторые результаты приведены в [1–6]). Дуальные числа и соответствующие функции находят применение в различных областях математики и физики, поэтому их дальнейшее изучение является актуальным. В данной работе рассмотрены некоторые свойства p-голоморфных функций в приложении к отображению областей. Доказаны аналог теоремы Ролля, теорема о глобальном p-диффеоморфизме и модифицированный принцип соответствия границ для p-голоморфных функций. Изучены отображения областей частного вида.

Естественное множество *p*-голоморфности. Пусть $\mathbb{C}_p$ – кольцо p-комплексных чисел вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jy. Топология на $\mathbb{C}_p$

порождается следующей нормой: $\| z \| = \| x + jy \| = \max\{|x|, |y|\}$. Эту норму будем называть параболической. Модулем p-комплексного числа называется $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Более подробно с p-комплексными числами можно ознакомиться в работах [1] и [4]. Пусть $G \subset \mathbb{C}_p$ – область.

Рассмотрим p-комплексную в области G функцию $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$.

Определение 1. Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется p-голоморфной в $z_0 = x_0 + jy_0 \in \mathbb{C}_p$, если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и выполнены условия

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \\ u'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим через $H_p(G)$ множество функций, p-голоморфных во всех точках множества $G \subset \mathbb{C}_p$. Из (1) вытекает, что функция $u(x,y)$ не зависит от y, поэтому в дальнейшем будем записывать ее в виде $u(x)$. Если функция $f \in H_p(G)$, то она представима в виде

$$f(z) = u(x) + j\left(yu'(x) + \phi(x)\right), \tag{2}$$

где $\phi(x)$ дифференцируема, а $u(x)$ дважды дифференцируема. При этом

$$f'(z) = u'(x) + j\left(yu''(x) + \phi'(x)\right). \tag{3}$$

Имеет место также представление

$$f(z) = f(x) + j f'(x) y. \tag{4}$$

Доказательства формул (2)–(4), а также некоторых других свойств p-голоморфных функций приведены в работе [5].

Определение 2. Множество $D(f) \subset \mathbb{C}_p$ назовем естественным множеством p-голоморфности функции f, если $f \in H_p\left(D(f)\right)$ и для любого $D' \supset D(f)$ из того, что $f \in H_p(D')$ вытекает, что $D' = D(f)$.

Из (4) следует, что если $f(x) \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, то $f(z) \in H_p(\Omega \times \mathbb{R})$. Таким образом, в общем случае $D(f)$ – объединение вертикальных полос вида $\Omega \times \mathbb{R}$.

***p*-Голоморфные диффеоморфизмы.** В классическом комплексном анализе теорема Ролля не имеет места. Для p-голоморфных функций справедлив следующий ее аналог.

Теорема 1. *Пусть $f \in H_p(G)$, где $G \subset \mathbb{C}_p$ – область, $f(z_1) = f(z_2)$, где $z_1, z_2 \in G$. Тогда $f'(z)$ обращается в делитель нуля на некотором вертикальном интервале $\gamma \subset G$.*

Доказательство. Пусть $z_1 = a_1 + jb_1$, $z_2 = a_2 + jb_2$. Из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ и (2) следует $u(a_1) = u(a_2)$. Пусть $a_1 < a_2$, тогда в силу теоремы Ролля найдется такое $\xi \in (a_1, a_2)$, что $u'(\xi) = 0$. В силу (3) $f'(\xi + jy) = j\left(yu''(\xi) + \phi'(\xi)\right)$ для любых $y \in \mathbb{R}$ таких, что $z = \xi + jy \in G$.

Если $a_1 = a_2$, то верно равенство

$$u(a_1) + j\left(b_1 u'(a_1) + \phi(a_1)\right) = u(a_1) + j\left(b_2 u'(a_1) + \phi(a_1)\right),$$

откуда вытекает $u'(a_1) = 0$. Тогда $f'(a_1 + jy) = j\left(yu''(a_1) + \phi'(a_1)\right)$ для любых $y \in \mathbb{R}$ таких, что $z = a_1 + jy \in G$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2 (о глобальном p-диффеоморфизме). *Пусть $f \in H_p(G)$, где $G \subset \mathbb{C}_p$ – область, $u'(x) \neq 0$ для любых $x \in \mathbb{R}$ таких, что $z = x + jy \in G$. Тогда f p-диффеоморфно отображает область G на область $E = f(G)$, при этом для производной обратной функции верно равенство*

$$\{f^{-1}\}'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \tag{5}$$

где $w = f(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из принципа сохранения области [5, теорема 8] следует, что $E = f(G)$ – область. Однолистность отображения $f : G \to E$ вытекает из теоремы 1, *p*-дифференцируемость обратной функции $f^{-1} : E \to G$ и формула (5) вытекает из теоремы о локальной обратимости [5, теорема 7]. Теорема доказана.

Модифицированный принцип соответствия границ. Для *p*-голоморфных функций классический принцип сответствия границ не имеет места. Например, функция $w = f(z) = z^2$ *p*-диффеоморфно отображает открытый квадрат $G = \{0 < x < 1; 0 < y < 1\}$ на область $E = f(G) = \{0 < u < 1; 0 < y < 2\sqrt{u}\}$. Однако эту функцию нельзя даже гомеоморфно продолжить на замыкание $\overline{G}$, так как весь отрезок $z = jz = jx,\ 0 \le y \le 1$ переходит в начало координат. Покажем, что при наложении дополнительных условий на функцию верно утверждение, более сильное, чем классический принцип соответствия границ.

Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, $t = \sigma + j\omega \in \Gamma$.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $f(t) = u(\sigma) + j\left(\omega u'(\sigma) + \phi(\sigma)\right)$ называется *p*-голоморфной на Γ, если для любых $t, t + \Delta t \in \Gamma$ верно равенство

$$f(t + \Delta t) - f(t) = f'(t)\Delta t + \alpha(\Delta t) \| \Delta t \|,$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta t) = 0,\ f'(z) = u'(x) + j\left(yu''(x) + \phi'(x)\right).$

Т е о р е м а 3. *Пусть $G \subset \mathbb{C}_p$ – односвязная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой ∂G, $f \in H_p(G)$, $E = f(G)$, $\operatorname{Re} f'(z) = u'(x) \ne 0$ для любых $x \in \mathbb{R}$ таких, что $z = x + jy \in G$. Если для любого $t \in \partial G$ существует $\lim\limits_{G \ni z \to t} \operatorname{Re} f'(z) \ne 0$, то f можно продолжить до p-диффеоморфизма замкнутых областей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2 вытекает, что *E* – область и *f* *p*-диффеоморфно отображает *G* на *E*. Пусть $t_0 \in \partial G$. Выберем произвольно последовательность $z_n \in G$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = t_0$. В силу компактности замыкания $\overline{G}$ из теоремы о конечных приращениях [5, теорема 4] для любых $n, p \in \mathbb{N}$ следует, что верна оценка

$$\| f(z_{n+p}) - f(z_n) \| \le \sqrt{6} \sup_{\xi \in G} \| f'(\xi) \| \| z_{n+p} - z_n \|,$$

из которой вытекает фундаментальность последовательности $f(z_n) \in E$. Это влечет за собой существование $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$. В силу произвольности выбора z_n отсюда следует, что существует $\lim\limits_{G \ni z \to t} f(z)$. Полагая $f(t) = \lim\limits_{G \ni z \to t} f(z)$ для любого $t \in \partial G$, получим непрерывное отображение $f : \overline{G} \to \overline{E}$. Очевидно, при этом $f(\partial G) = \partial E$. Повторяя эти рассуждения для *p*-голоморфной функции $f^{-1} : E \to G$, получим непрерывное отображение $f^{-1} : \overline{E} \to \overline{G}$. Таким образом, *f* можно продолжить до гомеоморфизма замкнутых областей.

Пусть $t = \sigma + j\omega$. Тогда $f(t) = u(\sigma) + j\left(\omega u'(\sigma) + \phi(\sigma)\right)$. Покажем, что продолженная функция *p*-голоморфна на ∂G. Из теоремы о существовании глобальной первообразной [6, теорема 14] для любого $z \in G$ имеем

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} f'(\tau)d\tau + f(z_0),$$

где $z_0 \in G$, а интегрирование ведется по любой кусочно-гладкой кривой, соединяющей z_0 и *z*. В условиях теоремы для любого $t \in \partial G$ существует

$$f(t) = \lim_{G \ni z \to t} \int_{z_0}^{z} f'(\tau)d\tau + f(z_0) = \int_{t_0}^{t} f'(\tau)d\tau + f(z_0),$$

при этом *f* дифференцируемо в точке *t* и

$$f'(t) = \lim_{G \ni z \to t} f'(z) = u'(\sigma) + j\left(\omega u''(\sigma) + \phi'(\sigma)\right).$$

Пусть $t, t+\Delta t \in \partial G,\ \ \Delta t = h + js$. Используя равенства $u'(\sigma + h) = u'(\sigma) + u''(\sigma)h + o(|h|)$ и $j^2 = 0$, получим

$$\begin{gathered}
f(t+\Delta t) - f(t) = u(\sigma+h) + j\big((\omega+s)u'(\sigma+h) + \phi(\sigma+h)\big) - u(\sigma) - j\big(\omega u'(\sigma) + \phi(\sigma)\big) = \\
= \big(u(\sigma+h) - u(\sigma)\big) + j\omega\big(u'(\sigma+h) - u'(\sigma)\big) + j\big(\phi(\sigma+h) - \phi(\sigma)\big) + \\
+ js\big(u'(\sigma) + u''(\sigma)h + o(|h|)\big) = u'(\sigma)(h+js) + j\omega u''(\sigma)h + j\phi'(\sigma)h + o(\|\Delta t\|) = \\
= u'(\sigma)(h+js) + j\omega u''(\sigma)(h+js) + j\phi'(\sigma)(h+js) + o(\|\Delta t\|) = \\
= \big(u'(\sigma) + j\big(\omega u''(\sigma) + \phi'(\sigma)\big)\big)(h+js) + o(\|\Delta t\|),
\end{gathered}$$

что и доказывает теорему.

Образы прямолинейных отрезков.

Теорема 4. *Пусть* $G \subset \mathbb{C}_p$ *– область, функция* $f(z) = u(x) + j\big(yu'(x) + \phi(x)\big) \in H_p(G)$, $u'(x) = 0$ *для любых* $x \in \mathbb{R}$ *таких, что* $z = x + jy \in G$, $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}_p \mid a \le x \le b; y = c\} \subset G$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C}_p \mid x = a; c \le y \le d\} \subset G$. *Тогда верны следующие утверждения:*

а) образ Γ *при отображении f – гладкая кривая* $\Gamma' = f(\Gamma) = w = u + jv$, *где* $u = u[a,b]$ *– отрезок вещественной оси,* $v = cu'(x) + \phi(x),\ \ x \in [a,b]$;

б) образ γ *при отображении f – вертикальный отрезок* $\gamma' = f(\gamma) = w = u + jv$, *где* $u = u(a)$, $v = yu'(a) + \phi(a),\ \ y \in [c,d]$.

Доказательство вытекает из представления (2).

Отображения многоугольников.

Определение 4. Простейшим назовем множество вида

$$G = \{z \in \mathbb{C}_p : a \le x \le b; h(x) \le y \le g(x)\},$$

где $h, g \in C^1[a,b]$. Простейшей областью назовем внутренность простейшего множества.

Определение 5. Простейшим прямоугольником назовем простейшее множество вида

$$G = \{z \in \mathbb{C}_p : a \le x \le b; c \le y \le d\}.$$

Его внутренность назовем простейшей прямоугольной областью.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(z) = u(x) + j\big(yu'(x) + \phi(x)\big)$ *p-голоморфна в простейшей прямоугольной области*

$$G = \{z \in \mathbb{C}_p : a < x < b; c < y < d\},$$

$\overline{G} \subset D(f),\ \ u'(x) > 0$ *для любых* $x \in \mathbb{R}$ *таких, что* $z = x + jy \in G$. *Тогда f p-диффеоморфно отображает G на простейшую область*

$$\begin{gathered}
E = f(G) = \{w = u + jv \in \mathbb{C}_p : u(a) < u < u(b); \\
cu'(x) + \phi(x) < v < du'(x) + \phi(x), a < x < b\}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Если $u'(a), u'(b) \ne 0$, *то f можно продолжить до p-диффеоморфизма замкнутых областей.*

Доказательство. Из принципа сохранения области [5, теорема 8] при условии $u'(x) > 0$ следует, что образом области G будет область $E = f(G)$, при этом $u'(a) < u'(b)$. Из теоремы 4 вытекает, что E – простейшая область вида (6). Утверждение о p-диффеоморфности f в G и о p-диффеоморфном продолжении на $\overline{G}$ следуют из теорем 2 и 3. Теорема доказана.

Замечание 1. В случае $u'(x) < 0$ область G отображается на простейшую область

$$\begin{gathered}
E = f(G) = \{w = u + jv \in \mathbb{C}_p : u(b) < u < u(a); \\
du'(x) + \phi(x) < v < cu'(x) + \phi(x), a < x < b\}.
\end{gathered}$$

Следующая теорема в некотором смысле является обратной к теореме 5.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция* $G = \{z \in \mathbb{C}_p : a < x < b; -g(x) < y < g(x)\}$ *– простейшая область и на* (a,b) *определена функция*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\int_a^x \frac{dt}{g(t)} - \int_x^b \frac{dt}{g(t)}\right).$$

Тогда функция $f(z) = f(x) + j f'(x) y$ *p-диффеоморфно отображает G на простейшую прямоугольную область*

$$E = f(G) = \left\{w = u + jv \in \mathbb{C}_p : -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{dt}{g(t)} < u < \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dt}{g(t)}, -1 < v < 1\right\}.$$

Если существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} g(z) > 0$ *и* $\lim\limits_{x \to b} g(z) > 0,$ *то f можно продолжить до p-диффеоморфизма замкнутых областей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f'(x) = \dfrac{1}{g(x)} > 0$ для всех $x \in (a,b)$, утверждение теоремы вытекает из представления $f(z) = f(x) + j f'(x) y$, теорем 2 и 3.

З а м е ч а н и е 2. Случай, когда G имеет вид

$$G = \{z \in \mathbb{C}_p : a < x < b; h(x) < y < g(x)\}$$

сводится к рассмотренному с помощью p-голоморфного отображения

$$w = u + jv = x + j\left(y - \frac{g(x) + h(x)}{2}\right).$$

При этом $a < u = x < b, \quad \dfrac{h(x) - g(x)}{2} < v < \dfrac{g(x) - h(x)}{2}.$

Проиллюстрируем теорему 6 следующим примером.

П р и м е р. Пусть $G = \{z \in \mathbb{C}_p : 1 < x < 2; -x^2 < y < x^2\}$. Положим теперь, что

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\int_1^x \frac{dt}{t^2} - \int_x^2 \frac{dt}{t^2}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$f(z) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4} + j\, y \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{z} + \frac{3}{4},$$

$$E = f(G) = \left\{-\frac{1}{4} < u < \frac{1}{4}; -1 < v < 1\right\}.$$

Заметим также, что

$$f(1) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = \frac{1}{4}, \quad A = 1 - j, \quad A' = f(A) = -\frac{1}{4} - j,$$

$$B = 2 - 4j, \quad B' = f(B) = -\frac{1}{4} - j,$$

$$C = 2 + 4j, \quad C' = f(C) = \frac{1}{4} + j, \quad D = 1 + j, \quad D' = f(D) = -\frac{1}{4} + j.$$

Т е о р е м а 7. *Не существует p-голоморфного отображения прямоугольника* $G = \{-a < x < a; -1 < y < 1\}$, *где* $a \neq 1$, *на p-круг* $E = \{\|w\| < 1\}$.

Доказательство. Пусть $w = u + jv = f(z) = u(x) + j\big(yu'(x) + \phi(x)\big)$ – указанное в условиях теоремы отображение. Тогда образами отрезков $\{-a < x < a; y = 1\}$ и $\{-a < x < a; y = 1\}$ будут соответственно отрезки $\{-1 < u < 1; v = 1\}$ и $\{-a < x < a; y = 1\}$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} 1 = v = u'(x) + \phi(x), \\ -1 = v = -u'(x) + \phi(x). \end{cases}$$

Из нее следует, что $\phi(x) \equiv 0$ и $u(x) \equiv x + c$. Точки a и $-a$ перейдут соответственно в 1 и –1. Тогда

$$\begin{cases} 1 = u(a) = a + c, \\ -1 = u(a) = a + c, \end{cases}$$

а значит, $c = 0$. Таким образом, $u(x) \equiv x$ и $f(z) = z$, что вступает в противоречие с $a \neq 1$. Теорема доказана.

Следствие. *Не всякую ограниченную односвязную область можно оторбазить на p-круг* $E = \{\|w\| < 1\}$ *с помощью p-голоморфного отображения.*

Определение 6. Элементарным назовем множество со связной внутренностью, представимое в виде объединения конечного числа простейших прямоугольников. Его внутренность – элементарная область.

Определение 7. Стандартным назовем множество со связной внутренностью, представимое в виде объединения конечного числа простейших множеств. Его внутренность – стандартная область.

Теорема 8. *Пусть функция* $f(z) = u(x) + j\big(yu'(x) + \phi(x)\big)$ *p-голоморфна элементарной области* G, $\overline{G} \subset D(f)$, $u'(x) \neq 0$ *для любых* $x \in \mathbb{R}$ *таких, что* $z = x + jy \in G$. *Тогда f p-диффеоморфно отображает G на стандартную область E = f(G). Если для любого* $t \in \partial G$ *существует* $\lim\limits_{G \ni z \to t} \operatorname{Re} f'(z) \neq 0$, *то f можно продолжить до p-диффеоморфизма замкнутых областей.*

Доказательство вытекает из теорем 2, 3, 4 и 5.

Отображения ограниченных областей.

Определение 8. Исчерпанием множества $G \subset \mathbb{C}_p$ будем называть такую последовательность множеств $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, что при любых натуральных числах $k < m$: $G_k \subset G_m$ и $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

Теорема 9. *Пусть* $G \subset \mathbb{C}_p$ *– область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой* ∂G, $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ее исчерпание элементарными областями,* $f \in H_p(G_k)$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$, $E_k = f(G_k)$. *Тогда верны следующие утверждения:*

1) $E_k \subset E_m$ *при* $k < m$;

2) $E = f(G) = f\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f(G_k) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$;

3) $f \in H_p(G)$;

4) если E_k *– область для любого* $k \in \mathbb{N}$, *то* $E = f(G)$ *– область и* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ее исчерпание стандартными областями;*

5) если $\operatorname{Re} f'(z) \neq 0$ *для любых* $z \in G_k$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *то f p-диффеоморфно отображает G на E, при этом для производной обратной функции верно равенство* $\{f^{-1}\}'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$;

6) если для любого $t \in \partial G$ *существует* $\lim\limits_{G \ni z \to t} \operatorname{Re} f'(z) \neq 0$, *то f можно продолжить до p-диффеоморфизма замкнутых областей.*

Доказательство. 1. Вытекает из того, что $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ и при $k < m$: $G_k \subset G_m$.

2. Пусть $z_0 \in G$, тогда найдется номер k_0 такой, что $z_0 \in G_k$ и для любых $k \geq k_0$ верно $f(z_0) \in f(G_k)$. С другой стороны, из $E_k \subset E_m$ следует $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

3. Пусть $z_0 \in G$, существуют окрестность $U(z_0)$ и номер k_0 такие, что $U(z_0) \subset G_k$ для любых $k \geq k_0$, а значит, функция f p-голоморфна в $U(z_0)$. В силу произвольности $z_0 \in G: f \in H_p(G)$.

4. Пусть $E_k = f(G_k)$ – область для любого $k \in \mathbb{N}$, из 2) вытекает, что $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ – открытое множество. Если $z_1, z_2 \in G$, то найдется номер k_0 такой, что $z_1, z_2 \in G_k$ для любых $k \geq k_0$, а значит, точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывным путем в G_k, тогда точки $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ можно соединить непрерывным путем в E, таким образом, E – связное множество, т. е. область. Оставшаяся часть утверждения вытекает из 1), 2) и теоремы 8.

5. Вытекает из теоремы 2.

6. Вытекает из теорем 2 и 3.

Заключение. В работе рассмотрены свойства p-голоморфных функций в приложении к отображениям областей. Доказаны аналог теоремы Ролля и теорема о глобальном p-диффеоморфизме для p-голоморфной функции, а также модифицированный принцип соответствия границ.

Список использованных источников

1. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стер. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 192 с.
2. Messelmi, F. Analysis of Dual Functions / F. Messelmi // Ann. Rev. Chaos Theory, Bifurcat. Dynam. Syst. – 2013. – Vol. 4. – P. 37–54. https://doi.org/10.13140/2.1.1006.4006
3. DenHartigh, K. Liouville theorems in the Dual and Double Planes / K. DenHartigh, R. Flim // Rose-Hulman Undergraduate Math. J. – 2011. – Vol. 12, № 2. – P. 37–60.
4. Довгодилин, В. В. Сходимость на множестве p-комплексных чисел и свойства p-комплексных степенных рядов / В. В. Довгодилин // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2020. – № 4. – С. 32–39.
5. Васильев, И. Л. О некоторых свойствах p-голоморфных и p-аналитических функций / И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 176–184. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184
6. Васильев, И. Л. Интегралы от p-комплексных функций и их свойства / И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2021. – № 2. – С. 31–36.

References

1. Yaglom I. M. *Complex Numbers in Geometry*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 192 p. (in Russian).
2. Messelmi F. Analysis of Dual Functions. *Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems*, 2013, vol. 4, pp. 37–54. https://doi.org/10.13140/2.1.1006.4006
3. DenHartigh K., Flim R. Liouville theorems in the Dual and Double Planes. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 37–60.
4. Dovgodilin V. Convergense on a set of p-complex numbers and properties of p-complex power series. *Vestsi BDPU. Seriya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [BGPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2020, no. 4, pp. 32–39 (in Russian).
5. Vassilyev I. L., Dovgodilin V. V. On some properties of p-holomorphic and p-analytic function. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 176–184 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184
6. Vasilyev I., Dovgodilin V. Integrals from p-complex funtions. *Vestsi BDPU. Seriya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [BGPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2021, no. 2, pp. 31–36 (in Russian).

Информация об авторах

Васильев Игорь Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: Vassilyevl@bsu.by

Довгодилин Владимир Владимирович – аспирант кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: footballer4@mail.ru

Information about the authors

Igor L. Vassilyev – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Vassilyevl@bsu.by

Vladimir V. Dovgodilin – Postgraduate Student of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: footballer4@mail.ru