

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.63

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-370-380>

Поступила в редакцию 07.09.2022

Received 07.09.2022

Хоанг Тхи Киеу Ань^{1,2}

¹Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

²Университет природных ресурсов и окружающей среды,

г. Хошмина, Хошимин, Вьетнам

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Для многомерного гиперболо-параболического уравнения с постоянными коэффициентами изучены устойчивые компактные разностные схемы с весами четвертого порядка аппроксимации. Получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сильных сеточных нормах. Приведенные тестовые численные расчеты согласуются с теоретическими выводами.

Ключевые слова: компактная разностная схема, многомерное гиперболо-параболическое уравнение, априорные оценки, устойчивость, сходимость

Для цитирования. Хоанг Тхи Киеу Ань. Компактные разностные схемы для многомерного гиперболо-параболического уравнения / Хоанг Тхи Киеу Ань // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 370–380. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-370-380>

Hoang Thi Kieu Anh^{1,2}

¹Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

²Ho Chi Minh City University of Natural Resources and Environment, Ho Chi Minh City, Vietnam

COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR THE MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

Abstract. In this paper, we consider the stable compact difference schemes of $4 + 4$ approximation order for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation with constant coefficients. A priori estimates for the stability and convergence of the difference solution in strong mesh norms are obtained. The theoretical results are confirmed by test numerical calculations.

Keywords: compact difference schemes, multidimensional hyperbolic-parabolic equation, priori estimates, stability, convergence

For citation. Hoang Thi Kieu Anh. Compact difference schemes for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation. *Vestsi Natsyianal' nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 370–380 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-370-380>

Введение. Уравнения гиперболо-параболического типа используются для описания многих физических процессов, таких как зависимость напряженности электрического и магнитного полей от свойств среды [1], распространение тепловых [2] и ультразвуковых (в некоторых разбавленных газах) волн, а также теплового импульса в неметаллических чистых кристаллах [3], других процессов в термодинамике, кристаллических телах и пористых средах [4–6].

Для численного решения дифференциальных уравнений с частными производными такого типа можно использовать разностные или конечно-элементные аппроксимации [5], метод коллокаций с применением базисных функций на основе кубических B -сплайнов [7]. В настоящее время наибольший интерес представляет построение разностных схем повышенного порядка точности без увеличения числа узлов в шаблонах [8–11], которые также известны как компактные разностные схемы [10, 12]. В [13] для двумерной обобщенной математической модели Каттанео, включающей уравнения гиперболо-параболического типа, изучены компактные разностные

схемы с порядком аппроксимации $\Psi = O(\tau^{3-\alpha} + |h|^4)$, $\alpha \in (1, 2)$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Схемы порядка точности $(4 + 2)$ (четвертый порядок по пространственной переменной и второй по временной) для двумерного однородного уравнения Каттанео рассмотрены в [4]. Для одномерного гипербола-параболического уравнения с постоянными коэффициентами компактные разностные схемы с весами $(4 + 2)$ и $(4 + 4)$ порядков аппроксимации изучены в [11]. Схемы с весами $(4 + 2)$ порядков точности для уравнения с переменным коэффициентом квазилинейного и многомерного уравнений такого типа также построены в [11].

Настоящая работа посвящена построению и изучению компактных разностных схем $(4 + 4)$ порядков точности для многомерного гипербола-параболического уравнения с постоянными коэффициентами. Для исследования устойчивости разностной схемы применяется теория трехслойных операторно-разностных схем А. А. Самарского [5]. В результате получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных нормах $L_2(\omega_h)$, $W_2^1(\omega_h)$, $C(\bar{\omega}_h)$ или $L_\infty(\omega_h)$. Кроме того, приводятся результаты тестовых расчетов, подтверждающих повышенный порядок точности разностных схем на стандартных шаблонах.

Постановка задачи и разностная схема. Пусть $\bar{G} = \{x = (x_1, \dots, x_p), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$ является p -мерным прямоугольным параллелепипедом с границей Γ , т. е. $\bar{G} = G \cup \Gamma$. В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u + f(x, t), \quad x \in G, \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T]. \tag{3}$$

Здесь $L_\alpha u = k_\alpha (\partial^2 u / \partial x_\alpha^2)$, коэффициенты $\rho_1 > 0$, $\rho_2 \geq 0$, $k_\alpha > 0$ являются константами, $\alpha = \overline{1, p}$.

В параллелепипеде \bar{G} построим разностную $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p), i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\} = \omega_h \cup \gamma_h$ и равномерную $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_0}, \tau N_0 = T\}$ сетки. Сетка $\bar{\omega}_h$ равномерна по каждой из пространственных переменных, γ_h – множество ее узлов, которые принадлежат границе Γ .

Пусть заданы вещественное конечномерное евклидово пространство $H = H_h$ и скалярное произведение, норму в котором обозначим через (\cdot) и $\|\cdot\|$ соответственно. Кроме того, пусть в пространстве H задан самосопряженный положительно определенный оператор $A = A_h$. Через H_A обозначим евклидово пространство, состоящее из элементов пространства H и снабженное скалярным произведением $(y, v)_A = (Ay, v)$ и нормой $\|y\|_A = \sqrt{(y, y)_A}$. Далее используем следующие безындексные обозначения теории разностных схем [14, гл. VI, § 3]:

$$y = y^n = y(t_n), \quad \hat{y} = y^{n+1} = y(t_{n+1}), \quad \check{y} = y^{n-1} = y(t_{n-1}), \quad y(t_n) \in H,$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_o = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}, \quad y_{\bar{n}} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}.$$

На сетке узлов $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ исходную задачу (1)–(3) аппроксимирует разностная схема

$$\begin{aligned} & \left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) y_{\bar{n}} + \sum_{\alpha=1}^p \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12 k_\alpha} \Lambda_\alpha y_{\bar{n}} + \rho_2 y_o + \rho_2 \sum_{\alpha=1}^p \left(\frac{h_\alpha^2}{12 k_\alpha} - \frac{\tau^2}{12 \rho_1} \right) \Lambda_\alpha y_o = \\ & = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y^{(\sigma, \sigma)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p \frac{h_\alpha^2}{12 k_\alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega, \end{aligned} \tag{4}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \quad (5)$$

$$y(x, t + \tau) = \mu_1(x, t + \tau), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha y &= k_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad v^{(\sigma, \sigma)} = \sigma \hat{v} + (1 - 2\sigma)v + \sigma \overset{\vee}{v} = v + \sigma \tau^2 v_{\bar{t}}, \\ \sigma &= \frac{1}{12}, \quad \varphi = f + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} \Lambda_\alpha f + \frac{\tau^2}{12} f_{\bar{t}} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\tau^2}{12} f_{o_t}, \\ u_1(x) &= (1 - \rho_2 c_\tau) \bar{u}_0(x) + c_\tau \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u_0(x) + \\ &+ \left(\frac{\tau^2}{6\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1^2} \frac{\tau^3}{12} \right) \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha \bar{u}_0(x) + \frac{\tau^3}{24\rho_1^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_\alpha L_\beta u_0(x) + \\ &+ c_\tau f(x, 0) + \left(\frac{\tau^2}{6\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1^2} \frac{\tau^3}{24} \right) \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) + \frac{\tau^3}{24} \left(\frac{1}{\rho_1^2} \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha f + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)(x, 0), \\ c_\tau &= \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\tau^2}{6} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \frac{\tau^3}{24} \right). \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации. Нетрудно показать, что разностная схема (4)–(6) имеет четвертый порядок точности $O(|h|^4 + \tau^4)$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_p^2}$. Рассмотрим невязку разностного уравнения (4):

$$\begin{aligned} \Psi &= - \left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1} \right) u_{\bar{t}} - \sum_{\alpha=1}^p \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12k_\alpha} \Lambda_\alpha u_{\bar{t}} - \rho_2 u_{o_t} - \rho_2 \sum_{\alpha=1}^p \left(\frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} - \frac{\tau^2}{12\rho_1} \right) \Lambda_\alpha u_{o_t} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha u^{(\sigma, \sigma)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p \frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta u + \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как

$$\sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} L_\alpha \left(\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} - f - \sum_{\alpha \neq \beta=1}^p L_\beta u \right) + O(|h|^4),$$

то запишем невязку (7) в виде

$$\Psi = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(-\rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u + f(x, t) \right) + O(|h|^4 + \tau^4).$$

Из (1) вытекает, что

$$\|\Psi\| \leq M_1 (|h|^4 + \tau^4), \quad M_1 = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Для погрешности аппроксимации второго начального условия (5) имеет место оценка

$$\|\overset{\circ}{\Psi}\| = \|u_1 - u_t^0\| \leq M_2 \tau^4, \quad M_2 = \text{const} > 0. \quad (9)$$

Устойчивость по начальным данным и правой части. Для упрощения дальнейших исследований ограничимся рассмотрением двумерного случая $p = 2$. Как подчеркивалось в [15–17], рассмотрим для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$ задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} & \left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) \bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12k_\alpha} \Lambda_\alpha \bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} + \rho_2 \bar{y}_o + \rho_2 \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} - \frac{\tau^2}{12\rho_1} \right) \Lambda_\alpha \bar{y}_o = \\ & = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_\alpha \bar{y}^{(\sigma, \sigma)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^2 \frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \bar{y} + \bar{\varphi}, \quad (x, t) \in \omega, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\bar{y}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \bar{y}_t(x, 0) = \bar{u}_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{11}$$

$$\bar{y}(x, t + \tau) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{12}$$

в которой \tilde{y} – возмущенное решение, полученное по разностной схеме (4)–(6) при $p = 2$ с возмущенными начальными условиями \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 и возмущенной правой частью \tilde{f} , $\bar{u}_0 = \tilde{u}_0 - u_0$, $\bar{u}_1 = \tilde{u}_1 - u_1$, $\bar{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi$.

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$(u, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1 h_2 u_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2},$$

$$(u, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_1 h_2 u_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2},$$

$$A_\alpha \bar{y} = -\Lambda_\alpha \bar{y}, \quad (A_\alpha \bar{y}, \bar{y}) = k_\alpha \|\bar{y}_{\bar{x}_\alpha}\|^2,$$

$$\|\bar{y}_{\bar{x}_\alpha}\| = (\bar{y}_{\bar{x}_\alpha}, \bar{y}_{\bar{x}_\alpha})^{1/2} = \left(\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_1 h_2 \bar{y}_{\bar{x}_\alpha, i_1 i_2}^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$A = \sum_{\alpha=1}^2 A_\alpha - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^2 \frac{h_\alpha^2}{12k_\alpha} A_\alpha A_\beta, \quad B = \rho_2 E + \frac{\rho_2}{\rho_1} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\tau^2}{12} - \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12k_\alpha} \right) A_\alpha,$$

$$D = \left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) E + \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\tau^2}{12} - \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12k_\alpha} \right) A_\alpha.$$

Схему (10)–(12) можно записать в канонической форме:

$$D \bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} + B \bar{y}_o + A \bar{y} = \varphi, \quad \bar{y}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{y}_t(0) = \bar{u}_1. \tag{13}$$

Для получения априорных оценок разностного решения схемы (13) воспользуемся следующими утверждениями.

Лемма 1 [5, с. 115]. Пусть $A = A^* > 0$, $D = D^* > 0$ – постоянные операторы. Тогда при условиях

$$B \geq \varepsilon E, \quad D > \frac{\tau^2}{4} A, \quad \varepsilon > 0 \text{ – констант,} \tag{14}$$

для задачи (13) верна априорная оценка

$$\|Y^{n+1}\|_{\mathcal{A}}^2 \leq \|Y^1\|_{\mathcal{A}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{s=1}^n \tau \|\bar{\varphi}(t_s)\|^2, \tag{15}$$

где

$$Y^n = \left\{ \frac{1}{2} \left(\bar{y} + \overset{\vee}{\bar{y}} \right), \bar{y} - \overset{\vee}{\bar{y}} \right\}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau^2} \left(D - \frac{\tau^2}{4} A \right) \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда разностная схема (13) устойчива по начальным данным и правой части, а для ее решения имеет место оценка

$$\| \bar{y}^{n+1} \|_{\mathcal{A}} \leq \sqrt{2} \left(\| \bar{y}(0) \|_{\mathcal{A}} + \| \bar{y}_t(0) \|_D + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[\sum_{s=1}^n \tau \| \bar{\varphi}(t_s) \|^2 \right]^{1/2} \right). \quad (16)$$

Доказательство. Записывая норму

$$\| Y^{n+1} \|_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{4} \| \hat{y} + \bar{y} \|_A^2 + \| \hat{y}_t \|_{D - \frac{\tau^2}{4} A}^2$$

в виде

$$\| Y^{n+1} \|_{\mathcal{A}}^2 = \| \hat{y}_t \|_D^2 + (A\hat{y}, \bar{y}) \quad (17)$$

и применяя преобразования

$$\bar{y} = \hat{y} - \tau \hat{y}_t, \quad \hat{y} = \bar{y} + \tau \hat{y}_t,$$

и неравенство Коши – Буняковского с ε_0 (неравенство [14, с. 101])

$$|(u, v)| \leq \| u \| \cdot \| v \| \leq \varepsilon_0 \| u \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_0} \| v \|^2, \quad \varepsilon_0 = 1/2,$$

с учетом второго условия (14) следуют оценки

$$\| Y^{n+1} \|_{\mathcal{A}}^2 \geq \frac{1}{2} \| \hat{y} \|_A^2 + \frac{1}{2} \| \hat{y}_t \|_D^2, \quad (18)$$

$$\| Y^{n+1} \|_{\mathcal{A}}^2 \leq \left(\| \bar{y} \|_A + \| \hat{y}_t \|_D \right)^2. \quad (19)$$

В силу неравенств (18), (19) оценку (15) можно записать в виде (16). Лемма доказана.

Обозначим

$$\delta = \frac{16}{3} \left(\frac{k_1}{l_1^2} + \frac{k_2}{l_2^2} \right), \quad \gamma_\alpha = \frac{\sqrt{k_\alpha} \tau}{\sqrt{\rho_1} h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Так как имеют место выражения

$$(A_\alpha y, y) = k_\alpha \| y_{\bar{x}_\alpha} \|^2, \quad \| y_{\bar{x}_\alpha} \|^2 < \frac{4}{h_\alpha^2} \| y \|^2, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\| y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|^2 < \frac{4}{h_1^2} \| y_{x_2} \|^2,$$

$$\| y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|^2 < \frac{4}{h_2^2} \| y_{x_1} \|^2,$$

то самосопряженные операторы A , B и D положительны:

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= k_1 \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + k_2 \|y_{\bar{x}_2}\|^2 - \frac{h_1^2}{12} k_2 \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2 - \\ &- \frac{h_2^2}{12} k_1 \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2 > \frac{2}{3} (k_1 \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + k_2 \|y_{\bar{x}_2}\|^2) \geq \delta \|y\|^2, \\ (By, y) &= \rho_2 \left[\|y\|^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\tau^2}{12\rho_1} k_\alpha \|y_{\bar{x}_\alpha}\|^2 - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h_\alpha^2}{12} \|y_{\bar{x}_\alpha}\|^2 \right] > \\ &> \rho_2 \left[\frac{\|y\|^2}{3} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\tau^2}{12\rho_1} k_\alpha \|y_{\bar{x}_\alpha}\|^2 \right] > \frac{\rho_2}{3} \|y\|^2, \\ (Dy, y) &= \left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) \|y\|^2 + \frac{\tau^2}{12} \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha \|y_{\bar{x}_\alpha}\|^2 - \rho_1 \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h_\alpha^2}{12} \|y_{\bar{x}_\alpha}\|^2 > \frac{\rho_1}{3} \|y\|^2. \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнено условие

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \leq \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Тогда разностная схема (13) устойчива по начальным данным и правой части, а для ее решения имеет место оценка

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_A \leq \sqrt{2} \left(\|\bar{u}_0\|_A + \|\bar{u}_1\|_D + \sqrt{\frac{3}{2\rho_2}} \left[\sum_{s=1}^n \tau \|\bar{\varphi}(t_s)\|^2 \right]^{1/2} \right) \quad \forall n = \overline{0, N_0 - 1}. \tag{21}$$

Доказательство. Для исследования устойчивости схемы (13) применим лемму 2. Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(\left(D - \frac{\tau^2}{4} A \right) y, y \right) &= \left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) \|y\|^2 - \frac{\tau^2}{6} (k_1 \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + k_2 \|y_{\bar{x}_2}\|^2) - \\ &- \rho_1 \left(\frac{h_1^2}{12} \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + \frac{h_2^2}{12} \|y_{\bar{x}_2}\|^2 \right) + \frac{\tau^2}{4} \left(\frac{h_1^2}{12} k_2 + \frac{h_2^2}{12} k_1 \right) \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2 > \\ &> \left[\frac{\rho_1}{3} + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} - \frac{2}{3} \left(\frac{k_1}{h_1^2} + \frac{k_2}{h_2^2} \right) \tau^2 \right] \|y\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \left(\frac{h_1^2}{12} k_2 + \frac{h_2^2}{12} k_1 \right) \|y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $D - (\tau^2 / 4)A > 0$, если $\frac{\rho_1}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{k_1}{h_1^2} + \frac{k_2}{h_2^2} \right) \tau^2 \geq 0$ или $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \leq \frac{1}{2}$.

Итак, условия леммы 2 выполнены и, следовательно, имеет место оценка (16), в которой $\varepsilon = \rho_2 / 3$. Теорема доказана.

Теорема о сходимости. Пусть $z = y - u$ – погрешность метода, где u – решение задачи (1)–(3). Подставляя $z + u$ вместо y в (4)–(6), получаем для z следующую задачу:

$$\begin{aligned} \left(\rho_1 + \frac{\rho_2^2 \tau^2}{\rho_1 12} \right) z_{\bar{t}} + \sum_{\alpha=1}^p \frac{\rho_1 h_\alpha^2}{12 k_\alpha} \Lambda_\alpha z_{\bar{t}} + \rho_2 z_o + \rho_2 \sum_{\alpha=1}^p \left(\frac{h_\alpha^2}{12 k_\alpha} - \frac{\tau^2}{12 \rho_1} \right) \Lambda_\alpha z_o = \\ = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha z^{(\sigma, \sigma)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p \frac{h_\alpha^2}{12 k_\alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta z + \psi, \quad (x, t) \in \omega, \end{aligned} \tag{22}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_t(x, 0) = \overset{o}{\Psi}, \quad x \in \omega_h, \quad (23)$$

$$z(x, t + \tau) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau. \quad (24)$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие (20). Тогда решение разностной задачи (10)–(12) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1)–(3) и имеют место оценки

$$\max_{t_n \in \omega_\tau} \|y^n - u^n\|_A \leq M_3(|h|^4 + \tau^4), \quad M_3 = \text{const} > 0,$$

$$\max_{t_n \in \omega_\tau} \|y^n - u^n\|_C \leq M_4 \left| \ln |h|^{-1} \right|^{1/2} (|h|^4 + \tau^4), \quad M_4 = \text{const} > 0,$$

где $n = \overline{0, N_0}$.

Доказательство. Так как задачи (22)–(24) при $p = 2$ и (10)–(12) идентичны, то для оценки погрешности метода применим теорему 1. Тогда с учетом оценок (8), (9) и (21) следует оценка

$$\|z\|_A \leq \sqrt{2} \left(\|\overset{o}{\Psi}\|_D + \sqrt{\frac{3}{2\rho_2} \left[\sum_{s=1}^n \tau \|\Psi(t_s)\|^2 \right]^{1/2}} \right) \leq M_3(|h|^4 + \tau^4).$$

В силу теоремы вложения [18, гл. II, § 2; 19, гл. II, § 2] имеем

$$\|z\|_C \leq c_0 \left| \ln |h|^{-1} \right|^{1/2} \|z\|_A, \quad c_0 = \text{const} > 0,$$

что приводит к требуемой оценке в сеточной норме $C(\bar{\omega}_h)$. Теорема доказана.

Тестовые расчеты. В этом разделе приводятся результаты численных расчетов при решении начально-краевой задачи (1)–(3) в двумерном случае $p = 2$. Начальные и краевые условия, а также правая часть уравнения определяются из точного решения

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{e^{t/2 - x_1 - x_2} + e^{t/2 + x_1 + x_2}}{2}.$$

Параметры задачи выбираются следующими: $\rho_1 = 1, k_1 = k_2 = 1, l_1 = T = 1, l_2 = 2$.

На рис. 1 численное решение и погрешность метода получены при $\rho_2 = 3, h_1 = 0,0125, h_2 = 0,0625$ и $\tau = 0,00625$.

Порядок скорости сходимости по пространственной (p^h) и временной (p^τ) переменным определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} p^h &= \log_2 \frac{\|z\|}{\|z_{1/2}\|}, \\ p^\tau &= \log_2 \frac{\|z\|}{\|z_{1/2}\|}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $z_{1/2} = y_{h_1/2, h_2/2, \tau/2} - u_{h_1/2, h_2/2, \tau/2}$.

В случае, когда точное решение невозможно найти, для нахождения порядка сходимости вместо (25) используем другие формулы, представленные в работе [17]. В табл. 1, 2 приведены значения порядка скорости сходимости приближенного решения к точному при выполнении условия устойчивости (20).

Из результатов расчетов видно, что построенная схема имеет четвертый порядок аппроксимации. Кроме того, на рис. 2 по фигурам погрешности метода в норме L_∞ хорошо видна скорость сходимости приближенного решения к точному после изменений сеточных шагов.

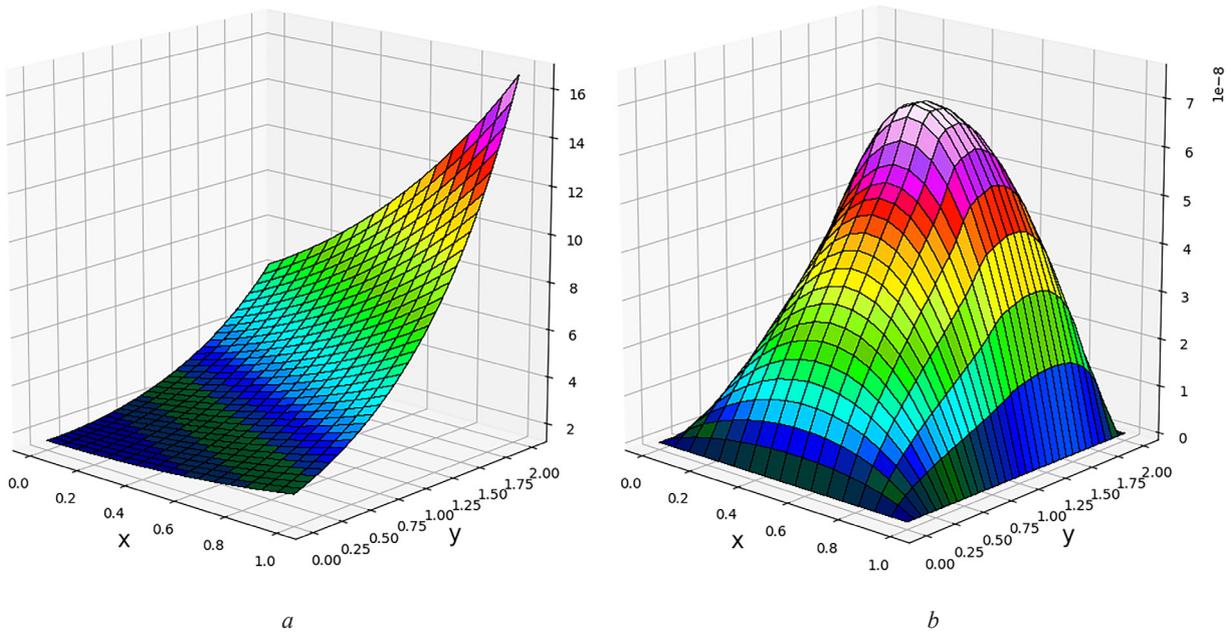


Рис. 1. Численное решение (a) и погрешность (b) при $t_n = T$ с шагами $h_1 = 1/40, h_2 = 1/16, \tau = T/80$

Fig. 1. The numerical solution (a) and the L_∞ -error (b) at $t_n = T$ with steps $h_1 = 1/40, h_2 = 1/16, \tau = T/80$

Таблица 1. Порядок сходимости по пространству и времени при $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1/2$

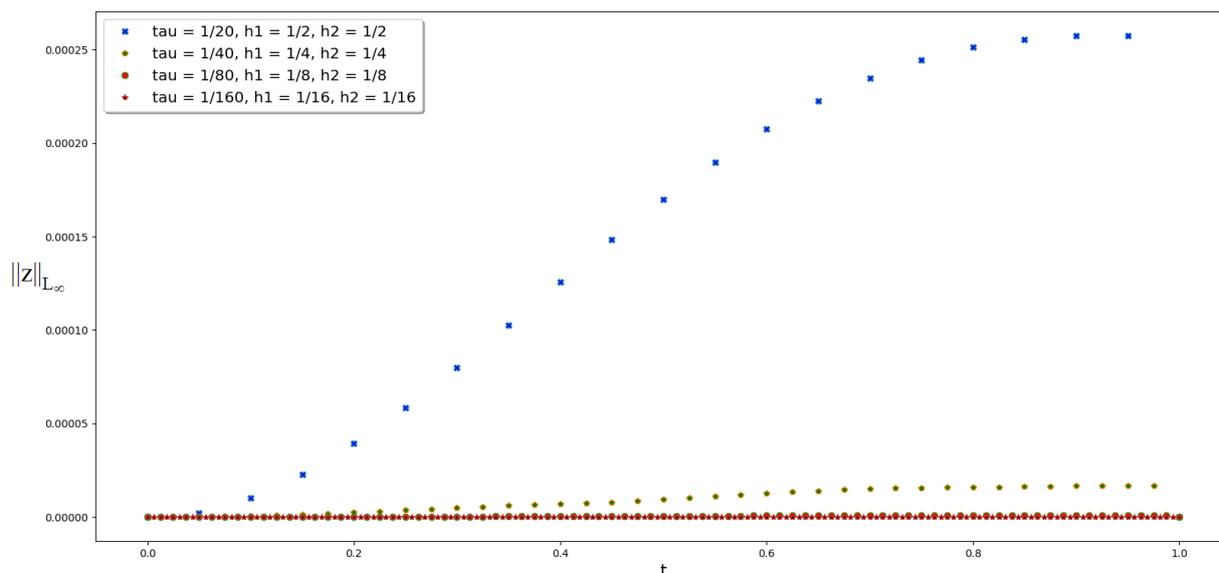
Table 1. The order of convergence in space and time at $(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1/2)$

ρ_2	$h_1 = 0,1$	$h_2 = 0,5$	$\tau = 0,069338$	$\ z\ _{L_\infty}$	p_{L_∞}	$\ z\ _{L_2}$	p_{L_2}
0	h_1	h_2	τ	1,77E-04	—	1,38E-04	—
0	$h_1/2$	$h_2/2$	$\tau/2$	1,17E-05	3,92439	8,23E-06	4,0672
0	$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	$\tau/2^2$	7,67E-07	3,92899	4,46E-07	4,20463
0	$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	$\tau/2^3$	5,18E-08	3,88799	2,29E-08	4,28257
3	h_1	h_2	τ	1,20E-04	—	8,95E-05	—
3	$h_1/2$	$h_2/2$	$\tau/2$	7,37E-06	4,02602	5,69E-06	3,97434
3	$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	$\tau/2^2$	4,61E-07	3,99992	3,54E-07	4,00718
3	$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	$\tau/2^3$	3,26E-08	3,82297	2,17E-08	4,0297

Таблица 2. Порядок сходимости по пространству и времени при $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 < 1/2$

Table 2. The order of convergence in space and time at $(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 < 1/2)$

ρ_2	$h_1 = 0,5$	$h_2 = 0,5$	$\tau = 0,005$	$\ z\ _{L_\infty}$	p_{L_∞}	$\ z\ _{L_2}$	p_{L_2}
0	h_1	h_2	τ	1,82E-04	—	1,45E-04	—
0	$h_1/2$	$h_2/2$	$\tau/2$	1,26E-05	3,8522	9,18E-06	3,9801
0	$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	$\tau/2^2$	7,96E-07	3,98778	5,75E-07	3,99656
0	$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	$\tau/2^3$	4,95E-08	4,0064	3,57E-08	4,0087
3	h_1	h_2	τ	1,28E-04	—	9,42E-05	—
3	$h_1/2$	$h_2/2$	$\tau/2$	8,03E-06	3,99835	6,01E-06	3,96948
3	$h_1/2^2$	$h_2/2^2$	$\tau/2^2$	5,07E-07	3,98721	3,77E-07	3,99535
3	$h_1/2^3$	$h_2/2^3$	$\tau/2^3$	3,16E-08	4,00466	2,34E-08	4,00876

Рис. 2. Погрешность метода при разных сеточных шагах при $\rho_2 = 3$ Fig. 2. The method error at different grid steps ($\rho_2 = 3$)

Таким образом, проведенные тестовые расчеты согласуются с нашими теоретическими выводами.

Благодарности. Автор выражает благодарность члену-корреспонденту НАН Беларуси, доктору физико-математических наук, профессору П. П. Матусу за внимание к работе и полезные советы, полученные при ее подготовке.

Acknowledgements. The author expresses her sincere gratitude to Professor, Doctor of Physics and Mathematics P. P. Matus (Correspondent Member of the National Academy of Sciences of Belarus) for help, advice, and recommendations received during the preparation of this work.

Список использованных источников

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. Straughan, B. Heat Waves / B. Straughan. – New York: Springer, 2011. – 318 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0493-4>
3. Zhukovsky, K. V. Analytical solutions for heat diffusion beyond Fourier law / K. V. Zhukovsky, H. M. Srivastava // Appl. Math. Comput. – 2017. – Vol. 293. – P. 423–437. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.08.038>
4. Yating Huang. The compact finite difference method of two-dimensional Cattaneo model / Yating Huang, Zhe Yin // J. Funct. Spaces. – 2020. – Vol. 1. – P. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2020/6301757>
5. Самарский, А. А. Разностные схемы с операторными множителями // А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус. – Минск, 1998. – 442 с.
6. Золина, Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа / Л. А. Золина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 991–1001.
7. Mittal, R. C. Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method / R. C. Mittal, R. Bhatia // Appl. Math. Comput. – 2013. – Vol. 220. – P. 496–506. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.05.081>
8. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.
9. Валиулин, А. Н. Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний / А. Н. Валиулин, В. И. Паасонен // Численные методы механики сплошной среды. – 1970. – Т. 1, № 1. – С. 17–30.
10. Толстых, А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А. И. Толстых. – М.: Наука, 1990. – 230 с.
11. Матус, П. П. Компактные разностные схемы на трехточечном шаблоне для гипербола-параболических уравнений с постоянными коэффициентами / П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань, Д. Пылак // Дифференц. уравнения. – 2022. – Т. 58, № 9. – С. 1284–1293.

12. Паасонен, В. И. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами / В. И. Паасонен // Вычисл. технологии. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 55–66.
13. Ren, J. Efficient and stable numerical methods for the two-dimensional fractional Cattaneo equation / J. Ren, G. Gao // Numer. Algorithms. – 2015. – Vol. 69, № 4. – P. 795–818. <https://doi.org/10.1007/s11075-014-9926-9>
14. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
15. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона / П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 5. – С. 526–533. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533>
16. Матус, П. П. Компактные разностные схемы на трехточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка / П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 7. – С. 963–975. <https://doi.org/10.31857/s0374064121070098>
17. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона / П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань // Дифференц. уравнения. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 120–138. <https://doi.org/10.31857/s0374064122010125>
18. Карчевский, М. М. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики / М. М. Карчевский, А. Д. Ляшко. – Казань, 1976. – 160 с.
19. Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы для решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. – Ереван: Изд-во Акад. наук Армян. ССР, 1979. – 237 с.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*. New York, Dover Publ. Inc., 1990. 765 p.
2. Straughan B. *Heat Waves*. New York, Springer, 2011. 318 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0493-4>
3. Zhukovsky K. V., Srivastava H. M. Analytical solutions for heat diffusion beyond Fourier law. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, vol. 293, pp. 423–437. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.08.038>
4. Yating Huang, Zhe Yin. The compact finite difference method of two-dimensional Cattaneo model. *Journal of Function Spaces*, 2020, vol. 1, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2020/6301757>
5. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference Schemes with Operator Factors*. Dordrecht, Springer-science + Business media, 2002. 384 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3>
6. Zolina L. A. On a boundary value problem for a model equation of hyperbolic-parabolic type. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 63–78. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(66\)90162-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90162-5)
7. Mittal R. C., Bhatia R. Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, vol. 220, pp. 496–506. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.05.081>
8. Samarskii A. A. Schemes of higher-order of accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90104-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6)
9. Valiulin V. N., Paasonen V. I. Economical difference schemes of higher order of accuracy for the multidimensional equation of oscillations. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoi sredy* [Numerical Methods of Continuum Mechanics], 1970, vol. 1, no. 1, pp. 17–30 (in Russian).
10. Tolstykh A. I. *Compact Difference Schemes and Their Use in Problems of Aerohydrodynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 230 p. (in Russian).
11. Matus P. P., Hoang Thi Kieu Anh, D. Pylak. Compact Difference Schemes on a Three-Point Stencil for Hyperbolic-Parabolic Equations with Constant Coefficients. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 9, pp. 1277–1286. <https://doi.org/10.1134/s0012266122090129>
12. Paasonen V. I. Compact schemes for systems of second-order equations with convective terms. *Vychislitel'nye tekhnologii = Computational Technologies*, 1998, vol. 3, no. 1, pp. 55–66 (in Russian).
13. Ren J., Gao G. Efficient and stable numerical methods for the two-dimensional fractional Cattaneo equation. *Numerical Algorithms*, 2015, vol. 69, no. 4, pp. 795–818. <https://doi.org/10.1007/s11075-014-9926-9>
14. Samarskii A. A. *Theory of Difference Schemes*. New York, Marcel Dekker Inc., 2001. 761 p. <https://doi.org/10.1201/9780203908518>
15. Matus P. P., Anh H. T. K. Compact difference schemes for Klein–Gordon equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 5, pp. 526–533 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533>
16. Matus P. P., Hoang Thi Kieu Anh. Compact Difference Schemes on a Three-Point Stencil for Second-Order Hyperbolic Equations. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 934–946. <https://doi.org/10.1134/S0012266121070090>
17. Matus P. P., Hoang Thi Kieu Anh. Compact difference schemes for the multidimensional Klein–Gordon equation. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 120–138. <https://doi.org/10.1134/S0012266122010128>
18. Karchevskii M. M., Lyashko A. D. *Difference Schemes for Nonlinear Problems of Mathematical Physics*. Kazan, 1976. 158 p. (in Russian).
19. Oganesyanyan L. A., Rukhovets L. A. *Variational-Difference Methods for Solving Elliptical Equations*. Yerevan, Publishing House of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, 1979. 237 p. (in Russian).

Информация об авторе

Хоанг Тхи Киеу Ань – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь); Университет природных ресурсов и окружающей среды г. Хошимина (ул. Лэванши, 236Б, 72107, Хошимин, Вьетнам).
E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com

Information about the author

Hoang Thi Kieu Anh – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus); Ho Chi Minh University of Natural Resources and Environment (Le Van Sy Str., 236B, 72107, Ho Chi Minh city, Vietnam).
E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com