ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-389-397

Поступила в редакцию 19.01.2022
Received 19.01.2022

В. Б. Малютин[1], Б. О. Нуржанов[2,3]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Республика Узбекистан
[3]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Республика Узбекистан

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Аннотация. Рассматривается важный для приложений класс функциональных интегралов по условной мере Винера: интегралы, которые записываются с помощью функционала действия с членами, соответствующими кинетической и потенциальной энергии. Для указанного класса интегралов разработан подход к квазиклассической аппроксимации, который основывается на разложении действия относительно классической траектории. В разложении действия используются только слагаемые с нулевой и второй степенью. Проводится численный анализ точности квазиклассической аппроксимации для функциональных интегралов, содержащих центробежный потенциал.

Ключевые слова: функциональные интегралы, квазиклассическая аппроксимация, центробежный потенциал, действие, классическая траектория

Для цитирования. Малютин, В. Б. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов, содержащих центробежный потенциал / В. Б. Малютин, Б. О. Нуржанов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 389–397. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-389-397

Victor B. Malyutin[1], Berdakh O. Nurjanov[2,3]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan
[3]Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Republic of Uzbekistan

SEMICLASSICAL APPROXIMATION OF FUNCTIONAL INTEGRALS CONTAINING THE CENTRIFUGAL POTENTIAL

Abstract. In this paper, we consider the class of functional integrals with respect to the conditional Wiener measure, which is important for applications. These integrals are written using the action functional containing terms corresponding to kinetic and potential energies. For the considered class of integrals an approach to semiclassical approximation is developed. This approach is based on the decomposition of the action with respect to the classical trajectory. In the expansion of the action, only terms with degrees zero and two are used. A numerical analysis of the accuracy of the semiclassical approximation for functional integrals containing the centrifugal potential is done.

Keywords: functional integrals, semiclassical approximation, centrifugal potential, action, classical trajectory

For citation. Malyutin V. B., Nurjanov B. O. Semiclassical approximation of functional integrals containing the centrifugal potential. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 389–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-389-397

Введение. С тех пор как использование функциональных интегралов стало широко распространяться в различных разделах современной физики, невозможно дать полный отчет обо всех его приложениях. Отметим широкое применение функциональных интегралов в квантовой механике и теории поля [1–7], в теории стохастических дифференциальных уравнений [8–12] и во многих других областях [8, 13, 14]. Среди методов приближенного вычисления функциональных интегралов можно упомянуть следующие: основанные на дискретизации пространства и времени [15–17], метод Монте-Карло [18–20], метод приближенного вычисления функциональных интегралов, основанный на использовании приближенных формул, являющихся точными на классе функциональных многочленов заданной степени [18, 21–25].

В данной работе исследуется квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов. Квазиклассическая аппроксимация, или Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ) аппроксимация, используется в квантовой механике для приближенного решения одномерного не зависящего от времени уравнения Шредингера с помощью разложения в ряд по степеням постоянной Планка $\hbar$.

Квазиклассическая аппроксимация используется для вычисления основного вклада в пропагатор для уравнения Шредингера в случае, когда система близка к классическому пределу $\hbar \to 0$ или когда мы имеем дело с туннельными явлениями [9].

В [26] рассматривался численный анализ точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов на примере ангармонического осциллятора. При описании частиц в квантовой механике применяются потенциалы, содержащие переменную в знаменателе, например, Coulomb potential $V(x)=\frac{-c}{x}$, shifted Coulomb potential $V(x)=\frac{-c_1}{x}+c_2$, Kratzer potential $V(x)=\frac{c_1}{x^2}-\frac{c_2}{x}+c_3$, Davidson potential $V(x)=c_1x^2+\frac{c_2}{x^2}$ и др. [27]. Выражение $\frac{c}{x^2}$ может быть истолковано как потенциал отталкивания, возникающий за счет центробежной силы, поэтому его обычно называют центробежным потенциалом [28]. Потенциалы указанного вида возникают также при описании функциональными интегралами физических, химических и биологических систем, моделируемых одношаговыми процессами [12, 14]. В данной работе рассматривается численный анализ точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов, содержащих только Davidson potential.

Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов. Рассмотрим функциональный интеграл по условной мере Винера на пространстве функций, заданных на отрезке $[s,t]$ и удовлетворяющих условиям $x(s) = x_s$, $x(t) = x_t$. Определим важный для приложений класс интегралов по условной мере Винера μ_{x_s,x_t}:

$$K_{t-s}(x_s,x_t)=\int \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_s^t V\left(x(\tau)\right)d\tau\right\}d\mu_{x_s,x_t}(x)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_R (n-1)\int_R \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})V(x_j)\right\}\prod_{j=1}^{n}K^0_{t_j-t_{j-1}}(x_{j-1},x_j)dx_1...dx_{n-1}, \tag{1}$$

где $s=t_0<t_1<...<t_n=t,\ x_j=x(t_j),\ K^0_{t_j-t_{j-1}}(x_{j-1},x_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_j-t_{j-1})}}\exp\left(-\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{2\hbar(t_j-t_{j-1})}\right)$ – ядро оператора $\exp\left(\frac{t}{\hbar}H_0\right)$, $H_0=\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\hbar$ – параметр, принимающий положительные вещественные значения.

Функциональный интеграл (1) можно переписать в виде

$$K_{t-s}(x_s,x_t)=\int D[x]\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_s^t\left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}(\tau)\right)^2+V\left(x(\tau)\right)\right]d\tau\right\}, \tag{2}$$

где $D[x]=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i-t_{i-1})}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n-t_{n-1})}}$.

В выражении (2) в показателе экспоненты присутствует член $V\left(x(\tau)\right)$, соответствующий потенциальной энергии, и кинетический член $\frac{1}{2}\left(\dot{x}(\tau)\right)^2$, который ранее был включен в меру интегрирования. Таким образом, в выражении (2) в показателе экспоненты стоит функционал действия; величину $\frac{1}{2}\left(\dot{x}(\tau)\right)^2+V\left(x(\tau)\right)$ можно рассматривать как лагранжиан системы $L(\dot{x},x,\tau)$, а величину $S = \int_s^t L(\dot{x}, x, \tau) d\tau$ – как действие [1]. Интеграл можно интерпретировать как суммирование по всем траекториям, соединяющим точки $x(s) = x_s$ и $x(t) = x_t$.

Наибольший вклад в сумму дает классическая траектория $x_{\text{кл}}$, для которой действие экстремально. Классическая траектория находится посредством решения уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

В нашем случае $L(\dot{x}, x, \tau) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}(\tau)\right)^2 + V\left(x(\tau)\right)$. Следовательно, траектория $x_{\text{кл}}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_{\text{кл}}(\tau) - V'\left(x_{\text{кл}}(\tau)\right) = 0. \tag{3}$$

Приближенные значения функции $x_{\text{кл}}(\tau)$, $s \le \tau \le t$, можно найти, решая уравнение (3) с помощью метода сеток для нелинейных граничных задач [29].

В квазиклассической аппроксимации используется разложение действия S относительно классической траектории $x_{\text{кл}}$:

$$S[x(\tau)] \approx S[x_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta x^2} y^2 + \frac{1}{3!}\frac{\delta^3 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta x^3} y^3 + \ldots,$$

где $y = \delta x$, $x = x_{\text{кл}} + \delta x$. После замены переменных $y = \sqrt{\hbar}\,\overline{y}$ получим

$$\frac{1}{\hbar} S[x(\tau)] \approx \frac{1}{\hbar} S[x_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta x^2}\overline{y}^2 + \sqrt{\hbar}\, O(\overline{y}^3).$$

То есть при малых $\hbar$ в разложении действия можно оставить только слагаемые с нулевой и второй степенью по $\overline{y}$, так как они содержат $\hbar^{-1}$ и $\hbar^0$, а слагаемое с $O(\overline{y}^3)$ содержит $\hbar^{\frac{1}{2}}$.

Вариацию второго порядка $\frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta x^2} y^2$ можно записать в виде

$$\frac{\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]}{\delta x^2} y^2 = \int_{t_0}^{t} y \Lambda y \, d\tau, \qquad \Lambda = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)_{x_{\text{кл}}} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\right)_{x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x}\right)_{x_{\text{кл}}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\right)_{x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt}.$$

Для рассматриваемого случая $L(\dot{x}, x, \tau) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}(\tau)\right)^2 + V\left(x(\tau)\right)$

$$\Lambda = -\frac{d^2}{dt^2} + V''.$$

Таким образом, интеграл (2) запишется в виде

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} S[x_{\text{кл}}(\tau)]\right\} \int D[y] \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_s^t y \Lambda y \, d\tau\right\}, \tag{4}$$

где интегрирование выполняется по траекториям $y = \delta x$, удовлетворяющим условиям

$$y(s) = 0, \qquad y(t) = 0, \qquad D[y] = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i - t_{i-1})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n - t_{n-1})}}.$$

Чтобы вычислить интеграл в (4), используем разложение

$$y=\sum_{j=1}^{\infty}a_j u_j,$$

где функции u_j являются собственными функциями оператора Λ с собственными значениями λ_j.

Тогда интеграл в (4) запишется в виде

$$K=\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_s^t y\Lambda y d\tau\right\}=J\int D[a]\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_j^2\right\}, \tag{5}$$

где J – якобиан перехода от переменной y к переменной a,

$$D[a]=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n-1}da_i.$$

Так как якобиан J инвариантен относительно операторов Λ [1], то

$$K\prod_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\frac{1}{2}}=K_{\text{free}}\prod_{j=1}^{\infty}\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K_{\text{free}}=J\int D[a]\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{\text{free},j}a_j^2\right\},$$

$\lambda_{\text{free},j}$ – собственные значения оператора $\Lambda_{\text{free}}=-\dfrac{d^2}{dt^2}$.

Для свободного оператора Λ_{free} можно вычислить K_{free}, а именно:

$$K_{\text{free}}=\int D[x]\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_s^t x\Lambda_{\text{free}}x d\tau\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\cdots\int\prod_{i=1}^{n-1}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i-t_{i-1})}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n-t_{n-1})}}\exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\hbar(t_i-t_{i-1})}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}}.$$

Следовательно,

$$K=K_{\text{free}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \tag{6}$$

Таким образом, из соотношений (5), (6) следует, что интеграл (4) записывается в виде

$$K_{t-s}(x_s,x_t)=\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[x_{\text{кл}}(\tau)]\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Из равенства

$$\int_s^t \dot{x}_{\text{кл}}^2(\tau)d\tau=\dot{x}_{\text{кл}}(t)x_{\text{кл}}(t)-\dot{x}_{\text{кл}}(s)x_{\text{кл}}(s)-\int_s^t V'\big(x_{\text{кл}}(\tau)\big)x_{\text{кл}}(\tau)d\tau$$

следует, что $S[x_{\text{кл}}(\tau)]$ можно записать в виде

$$S[x_{\text{кл}}(\tau)] = \int_s^t \left(V\left(x_{\text{кл}}(\tau)\right) - \frac{1}{2} V'\left(x_{\text{кл}}(\tau)\right) x_{\text{кл}}(\tau) \right) d\tau + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_{\text{кл}}(t) x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s) x_{\text{кл}}(s) \right). \tag{8}$$

Тогда приближенное значение $S[x_{\text{кл}}(\tau)]$ можно получить, заменяя в представлении (8) классическую траекторию $x_{\text{кл}}$ численным решением уравнения (3) методом сеток.

Для вычисления $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_{\text{free},j}$ и $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ оператор $\Lambda = -\frac{d^2}{dt^2} + V''$ аппроксимируем конечно-разностным оператором с матрицей $\overline{\Lambda}$ размерности $(N-1) \times (N-1)$, получающейся в результате аппроксимации второй производной в узле t_j выражением $\Delta t^{-2}(t_{j+1} - 2t_j + t_{j-1})$,

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 + \Delta t^2 V_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 + \Delta t^2 V_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + \Delta t^2 V_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 + \Delta t^2 V_{N-1} \end{pmatrix},$$

где $V_j = V''\left(x_{\text{кл}}(j\Delta t)\right),\ 1 \le j \le N-1,\ \Delta t = \frac{t-s}{N}$.

Оператор $\Lambda_{\text{free}} = -\frac{d^2}{dt^2}$ заменим матрицей размерности $(N-1) \times (N-1)$:

$$\overline{\Lambda}_{\text{free}} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j \approx \prod_{j=1}^{N-1} \lambda_j = \det \overline{\Lambda},\ \ \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_{\text{free},j} \approx \prod_{j=1}^{N-1} \lambda_{\text{free},j} = \det \overline{\Lambda}_{\text{free}}$.

Таким образом, зная приближенные значения для $S[x_{\text{кл}}(\tau)]$, $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_{\text{free},j}$ и $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j$, из равенства (7) получаем приближенное значение функционального интеграла (1).

Численные результаты. В данном разделе рассмотрим численный анализ точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов на примере интегралов, содержащих Davidson potential $V(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}$. В этом случае функциональный интеграл имеет вид

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \int \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_s^t V\left(x(\tau)\right) d\tau \right\} d\mu_{x_s, x_t}(x),$$

где $V(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}$ при $x > 0$, $V(x) = +\infty$ при $x < 0$.

Лагранжиан имеет вид $L(\dot{x}, x, \tau) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}(\tau)\right)^2 + V\left(x(\tau)\right)$. Из (3) следует, что уравнение для классической траектории записывается в виде

$$\ddot{x}_{\text{кл}}(\tau) - 2c_1 x_{\text{кл}}(\tau) + \frac{2c_2}{x_{\text{кл}}^3(\tau)} = 0.$$

Из (8) следует, что

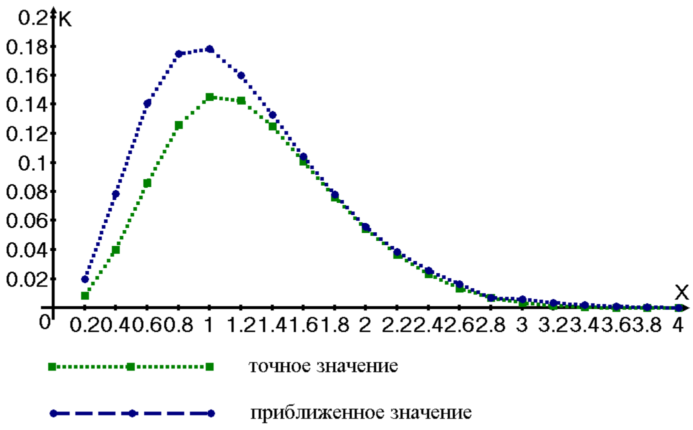

Рис. 1. Приближенные и точные значения $K_{t-s}(x,x)$ при $\hbar = 1$, $0 < x \le 4$

Fig. 1. The approximate and exact values of $K_{t-s}(x,x)$ at $\hbar = 1$, $0 < x \le 4$

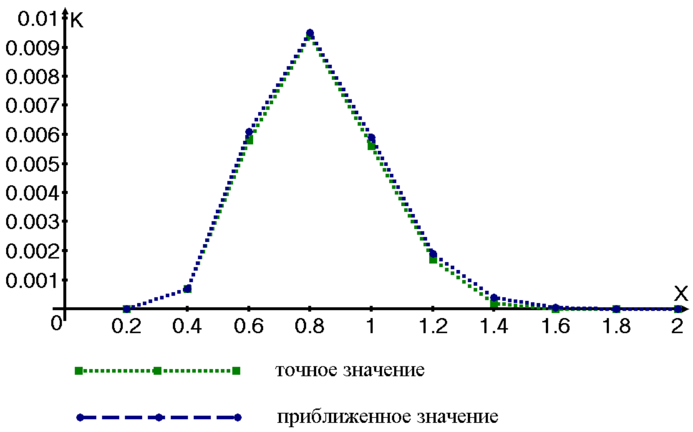

Рис. 2. Приближенные и точные значения $K_{t-s}(x,x)$ при $\hbar = \frac{1}{8}$, $0 < x \le 2$

Fig. 2. The approximate and exact values of $K_{t-s}(x,x)$ at $\hbar = \frac{1}{8}$, $0 < x \le 2$

$$S[x_{\text{кл}}(\tau)] = \int_s^t \frac{2c_2}{x_{\text{кл}}^2(\tau)} d\tau + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_{\text{кл}}(t)x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s)x_{\text{кл}}(s)\right).$$

При вычислении $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ воспользуемся тем, что $\Lambda = -\frac{d^2}{dt^2} + V'' = -\frac{d^2}{dt^2} + 2c_1 + \frac{6c_2}{x_{\text{кл}}^4(t)}$.

Вычислив приближенные значения для $S[x_{\text{кл}}(\tau)]$, $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_{\text{free},j}$ и $\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j$, из равенства (7) получаем приближенное значение функционального интеграла $K_{t-s}(x_s, x_t)$.

При $s = 0$, $t = 1$, $x_s = x_t = x$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{32}$ (для $c_2 = \frac{5}{32}$ можно воспользоваться ранее вычисленными точными значениями интеграла), $\hbar = 1$, $0 < x \le 4$ на рис. 1 приведены приближенные и точные значения $K_{t-s}(x,x)$.

При $s = 0$, $t = 1$, $x_s = x_t = x$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{32}$, $\hbar = \frac{1}{8}$, $0 < x \le 2$ на рис. 2 приведены приближенные и точные значения $K_{t-s}(x,x)$.

Точные значения для функционального интеграла получены с помощью замены переменных $x = \sqrt{\hbar} y$ и формулы [30–32]

$$K(y_s, y_t) = \int \exp\left\{-\int_s^t \left(\frac{c_3}{y^2(\tau)} + c_2 y^2(\tau)\right) d\tau\right\} d\mu_{y_s, y_t}(y) =$$

$$= \frac{\gamma\sqrt{y_s y_t}}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(t-s)\right)} \exp\left\{-\frac{\gamma}{4}\left(y_s^2 + y_t^2\right)\mathrm{cth}\left(\frac{\gamma}{2}(t-s)\right)\right\} I_\mu\left(\frac{\gamma y_s y_t}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(t-s)\right)}\right),$$

где $\gamma = \sqrt{8c_2}$, $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1+8c_3}$, I_μ – модифицированная функция Бесселя порядка μ.

Заключение. Таким образом, разработан подход к квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов и на основе вычислительных экспериментов проведен анализ точности квазиклассической аппроксимации. Для численного анализа использовано сравнение приближенных значений, полученных с помощью квазиклассической аппроксимации, с точными значениями. Из численных результатов, приведенных на рис. 1 и 2 и в работе [26], следует, что с помощью квазиклассической аппроксимации получаются хорошие приближенные значения для функциональных интегралов с различными функционалами. При уменьшении $\hbar$ точность аппроксимации увеличивается, однако квазиклассическая аппроксимация хорошо приближает функциональный интеграл не только при малых значениях $\hbar$.

Список использованных источников

1. Feynman, R. P. Quantum Mechanics and Path Integrals / R. P. Feynman, A. R. Hibbs. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 365 p.

2. Glimm, J. Quantum Physics. A Functional Integral Point of View / J. Glimm, A. Jaffe. – New York: Springer-Verlag, 1981. – 417 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0121-9

3. Simon, B. Functional Integration and Quantum Physics / B. Simon. – New York: Academic Press, 1979. – 295 p. https://doi.org/10.1016/s0079-8169(08)x6061-1

4. Roepstorff, G. Path Integral Approach to Quantum Physics: An Introduction / G. Roepstorff. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1994. – 387 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57886-1

5. Боголюбов, Н. Н. Введение в теорию квантованных полей / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – М.: Наука, 1984. – 600 с.

6. Васильев, А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике / А. Н. Васильев. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 295 с.

7. Попов, В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике / В. Н. Попов. – М.: Атомиздат, 1976. – 256 с.

8. Kleinert, H. Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics Polymer Physics, and Financial Markets / H. Kleinert. – Singapore: World Scientific Publishing, 2004. – 1504 p. https://doi.org/10.1142/9789812562197_fmatter

9. Langouche, F. Functional Integration and Semiclassical Expansions / F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui. – Dordrecht: Springer, 1982. – 315 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5

10. Wio, H. S. Path Integration to Stochastic Process: An Introduction / H. S. Wio. – World Scientific Publishing Company, 2013. https://doi.org/10.1142/8695

11. Risken, H. The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications / H. Risken. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1984. – 454 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-96807-5

12. Применение функциональных интегралов к стохастическим уравнениям / Э. А. Айрян [и др.] // Мат. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 11. – С. 113–125.

13. Мазманишвили, А. С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / А. С. Мазманишвили. – Киев: Наук. думка, 1987. – 224 с.

14. Hnatic, M. Field theoretic technique for irreversible reaction processes / M. Hnatic, J. Honkonen, T. Lucivjansky // Phys. Part. Nucl. – 2013. – Vol. 44, № 2. – P. 316–348. https://doi.org/10.1134/s1063779613020160

15. Кройц, М. Кварки, глюоны и решетки / М. Кройц. – М.: Мир, 1987. – 189 с.

16. Creutz, M. A statistical approach to quantum mechanics / M. Creutz, B. Freedman // Ann. Phys. – 1981. – Vol. 132, № 2. – P. 427–462. https://doi.org/10.1016/0003-4916(81)90074-9

17. Shuryak, E. V. Testing Monte Carlo methods for path integrals in some quantum mechanical problems / E. V. Shuryak, O. V. Zhirov // Nucl. Phys. B. – 1984. – Vol. 242, № 2. – P. 393–406. https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90401-2

18. Янович, Л. А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1976. – 382 с.

19. Решение краевых задач методом Монте-Карло / Б. С. Елепов [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1980. – 174 с.

20. Сабельфельд, К. К. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов методом Монте-Карло / К. К. Сабельфельд // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 29–43.

21. Егоров, А. Д. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1985. – 309 с.

22. Egorov, A. D. Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Pablishers, 1993. – 400 p. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6

23. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.

24. Ковальчик, И. М. Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения / И. М. Ковальчик, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1989. – 221 с.

25. Жидков, Е. П. Метод приближенного континуального интегрирования в задачах математической физики / Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов // Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ). – 1996. – Т. 27, вып. 1. – С. 173–242.

26. Малютин, В. Б. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов / В. Б. Малютин, Б. О. Нуржанов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 166–174. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174

27. Setare, M. R. Solution of the Dirac equation for the Davidson potential / M. R. Setare, S. Haidari // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol. 48, № 11. – P. 3249–3256. https://doi.org/10.1007/s10773-009-0128-5

28. Бом, Д. Квантовая теория: пер. с англ. / Д. Бом. – М.: Наука, 1965. – 727 с.

29. Березин, И. С. Методы вычислений: в 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Физматлит, 1959. – Т. 2. – 620 с.

30. Schulmann, L. S. Techniques and Applications of Path Integration / L. S. Schulmann. – New York: John Wiley & Sons, 1981.

31. Grosche, C. Classification of solvable Feynman path integrals / C. Grosche, F. Steiner // Proceedings of the IV International Conference on Path Integrals from meV to MeV, Tutzing, Germany, 1992 / eds.: H. Grabert [et al.]. – Singapore: World Scientific, 1993. – P. 276–288.

32. Bennati, E. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results / E. Bennati, M. Rosa-Clot, S. Taddei // Int. J. Theor. Appl. Finan. – 1999. – Vol. 02, № 04. – P. 381–407. https://doi.org/10.1142/s0219024999000200

References

1. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, McGraw-Hill, 1965. 365 p.

2. Glimm J., Jaffe A. *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. New York, Springer-Verlag, 1981. 417 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0121-9

3. Simon B. *Functional Integration and Quantum Physics*. New York, Academic Press, 1979. 295 p. https://doi.org/10.1016/s0079-8169(08)x6061-1

4. Roepstorff G. *Path Integral Approach to Quantum Physics: An Introduction*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1994. 387 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57886-1

5. Bogolyubov N. N., Shirkov D. V. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 600 p. (in Russian).

6. Vasiliev A. N. *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistics*. Leningrad, Leningrad University Press, 1976. 295 p. (in Russian).

7. Popov V. N. *Path Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*. Moscow, Atomizdat Publ., 1976. 256 p. (in Russian).

8. Kleinert H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics Polymer Physics, and Financial Markets*. Singapore, World Scientific Publishing, 2004. 1504 p. https://doi.org/10.1142/9789812562197_fmatter

9. Langouche F., Roekaerts D., Tirapegui E. *Functional Integration and Semiclassical Expansions*. Dordrecht, Springer, 1982. 315 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5

10. Wio H. S. *Path Integration to Stochastic Process: An Introduction*. World Scientific Publishing Company, 2013. https://doi.org/10.1142/8695

11. Risken H. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1984. 454 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-96807-5

12. Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastianov L. A. Application of functional integrals to stochastic equations. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2016, vol. 28, no. 11, pp. 113–125 (in Russian).

13. Mazmanishvili A. S. *Continual Integration as a Method for Solving Physical Problems*. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1987. 224 p. (in Russian).

14. Hnatic M., Honkonen J., Lucivjansky T. Field theoretic technique for irreversible reaction processes. *Physics of Particles and Nuclei*, 2013, vol. 44, no. 2, pp. 316–348. https://doi.org/10.1134/s1063779613020160

15. Creutz M. *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge University Press, 1983. 169 p.

16. Creutz M., Freedman B. A statistical approach to quantum mechanics. *Annals of Physics*, 1981, vol. 132, no. 2, pp. 427–462. https://doi.org/10.1016/0003-4916(81)90074-9

17. Shuryak E. V., Zhirov O. V. Testing Monte Carlo methods for path integrals in some quantum mechanical. *Nuclear Physics B*, 1984, vol. 242, no. 2, pp. 393–406. https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90401-2

18. Yanovich L. A. *Approximate Evaluation of Continual Integrals with respect to Gaussian Measures*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1976. 382 p. (in Russian).

19. Elepov B. S., Kronberg A. A., Mikhailov G. A., Sabelfeld K. K. *Solution of Boundary Value Problems by Monte-Carlo Method*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 174 p. (in Russian).

20. Sabelfeld K. K. *Approximate evaluation of Wiener continual integrals by Monte-Carlo method. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 27–43. https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90064-8

21. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Approximate Methods of Evaluation of Continual Integrals*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1985. 309 p. (in Russian).

22. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Pablishers, 1993. 400 p. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6

23. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction to Theory and Applications of Functional Integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian).

24. Kovalchik I. M., Yanovich L. A. *Generalized Wiener Integral and Some of its Applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1989. 221 p. (in Russian).

25. Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. Method of approximate functional integration in the problems of mathematical physics. *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei (PEPAN)*, 1996, vol. 27, no. 1, pp. 173–242 (in Russian).

26. Malyutin V. B., Nurjanov B. O. Semiclassical approximation of functional integrals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 166–174. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174

27. Setare M. R., Haidari S. Solution of the Dirac equation for the Davidson potential. *International Journal of Theoretical Physics,* 2009, vol. 48, no. 11, pp. 3249–3256. https://doi.org/10.1007/s10773-009-0128-5

28. Bohm D. *Quantum Theory*. New York, Prentice-Hall, 1951. 646 p.

29. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Calculation Methods. Vol. 2*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959. 620 p. (in Russian).

30. Schulmann L. S. *Techniques and Applications of Path Integration*. New York, John Wiley & Sons, 1981.

31. Grosche C., Steiner F. Classification of solvable Feynman path integrals. Grabert H., Inomata A., Schulman L. S., Weiss U. (eds.). *Proceedings of the IV International Conference on Path Integrals from meV to MeV*, *Tutzing, Germany 1992*. Singapore, World Scientific, 1993, pp. 276–288.

32. Bennati E., Rosa-Clot M., Taddei S. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1999, vol. 02, no. 04, pp. 381–407. https://doi.org/10.1142/s0219024999000200

Информация об авторах

Малютин Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Нуржанов Бердах Орынбаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (ул. Университетская, 9, 100174, Ташкент, Республика Узбекистан); Каракалпакский государственный университет имени Бердаха (ул. Ч. Абдирова, 1, 230112, Нукус, Республика Узбекистан). E-mail: nurjanov@list.ru

Information about the authors

Victor B. Malyutin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Berdakh O. Nurjanov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (9, University Str., 100174, Tashkent, Republic of Uzbekistan); Karakalpak State University named after Berdakh (1, Ch. Abdirov Str., 230112, Nukus, Republic of Uzbekistan). E-mail: nurjanov@list.ru