

УДК 517.977

А. Е. ЛЕЩЕВ, Л. И. МИНЧЕНКО

СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 11.04.2014)

Условия регулярности играют важную роль в задачах математического программирования, поскольку гарантируют справедливость необходимых условий оптимальности Куна – Таккера. Среди условий регулярности наиболее известным и широко применяемым является условие Мангасаряна – Фромовица. В то же время, несмотря на сравнительную эффективность условия Мангасаряна – Фромовица, существуют достаточно широкие классы задач оптимизации, в которых это условие не выполняется, но можно указать другие более слабые условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий Куна – Таккера. Целью данной работы является исследование некоторых слабых условий регулярности и их взаимосвязи.

Введение. Пусть h_i , $i = 1, \dots, p$, – непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R . Рассмотрим непустое множество

$$C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0, \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

где $i = \{1, \dots, s\}$, $I_0 = \{s + 1, \dots, p\}$ или $I_0 = \emptyset$.

Такого рода множества используются для описания допустимых точек задачи нелинейного программирования. При этом большое значение играют условия регулярности (constraint qualifications), обеспечивающие качество ограничений $h_i(y) \leq 0$, $i \in I$, $h_i(y) = 0$, $i \in I_0$, в исследуемой точке и гарантирующие применимость традиционных необходимых условий оптимальности. Наиболее известным из условий регулярности является условие Мангасаряна – Фромовица (MFCQ) [1], выполнение которого в точке $y \in C$ требует, чтобы в этой точке система векторов $\nabla h_i(y)$, $i \in I_0$, была линейно независимой и существовал вектор \bar{y}^0 такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = 0, \quad i \in I_0, \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle < 0, \quad i \in I(y),$$

где $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$.

В литературе известны также условия регулярности, имеющие отличный от MFCQ характер. К ним относятся в первую очередь достаточно известное условие постоянного ранга (CRCQ) [2] и обобщающее его ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ) [3, 4].

Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ), если для любого множества индексов $K \subset I(y^0)$ система векторов $\{\nabla h_i(y), \quad i \in K \cup I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y^0 .

Известно [2, 3], что данные условия и условие MFCQ независимы друг от друга. Последнее обстоятельство позволяет поставить вопрос о существовании более слабых условий регулярности, обобщающих одновременно и MFCQ, и RCRCQ. На этом пути в работах [5, 6] получено обобщающее MFCQ и CRCQ (но не RCRCQ) условие положительной линейной зависимости (CPLD), а также ослабленное условие положительной линейной зависимости (RCPLD) [7]. Несколько ранее в работе [8] было предложено и обосновано ослабленное (обобщенное) условие регулярности Мангасаряна – Фромовица (RMFCQ), которое обобщает все упомянутые выше условия регулярности.

Позже условие регулярности, повторяющее RMFCQ, было независимо введено в работе [9] под названием CRSC (constant rank of the subspace component condition).

В точке $y \in C$ построим множество

$$\Gamma_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0, \quad i \in I(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\},$$

которое будем называть линейризованным касательным конусом к множеству C в данной точке. Следуя [8], представим множество индексов $I(y)$ в точке $y \in C$ в виде разбиения на два множества $I(y) = I^a(y) \cup I^+(y)$, где $I^a(y) \cap I^+(y) = \emptyset$ и множество $I^a(y)$ состоит из тех и только тех индексов $i \in I(y)$, для которых $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$, а $I^+(y) = I(y) \setminus I^a(y)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено ослабленное условие RMFCQ, если система векторов $\{\nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Пусть $\|y\|$ – евклидова норма вектора y , $d_C(y) = \inf_{v \in C} \|y - v\|$. При исследовании задач оптимизации важную роль играет также следующее условие, являющееся достаточно общим условием регулярности.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что множество C *R-регулярно* [3, 4] в точке $y^0 \in C$ (или в данной точке имеет место *error bound property* [10–12]), если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такие, что для всех $y \in V(y^0)$ выполнено условие $d_C(y) \leq \alpha \max\{0, h_i(y), \quad i \in I, \quad |h_i(y)|, \quad i \in I_0\}$.

В работе [3] было доказано, что выполнение условий RCRCQ и CPLD влечет за собой *R-регулярность* множества допустимых точек в исследуемой точке. В статье [9] доказано аналогичное утверждение относительно RMFCQ и *R-регулярности*. При этом и в [3], и в [9] был использован один из результатов [3], доказательство которого основано на дополнительном требовании существования непрерывных вторых производных для функций, описывающих множество C . Целью данной работы является доказательство того, что справедливость условия *R-регулярности* следует из RMFCQ без каких-либо дополнительных предположений об ограничениях.

1. Вспомогательные утверждения. Определим касательный конус к множеству C в точке $y \in C$:

$$T_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \exists \text{ число } t_0 > 0 \text{ и функция } o(t) \text{ такие,} \\ \text{что } o(t)/t \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0 \text{ и } y + t\bar{y} + o(t) \in C \quad \forall t \in [0, t_0]\}.$$

Отметим, что конусы $\Gamma_C(y)$ и $T_C(y)$ замкнуты и $T_C(y) \subset \Gamma_C(y)$.

Л е м м а 1. Пусть $y^0 \in C$. Тогда существует вектор \bar{y}^0 такой, что $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0),$
 $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle < 0, \quad i \in I^+(y^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае, если $I^+(y) = \emptyset$, утверждение леммы будет выполнено тривиально. Пусть $I^+(y) \neq \emptyset$. Пусть $i \in I^+(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. С другой стороны, $i \notin I^a(y)$, следовательно, найдется вектор $\bar{y}^i \in \Gamma_C(y)$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор

$$\bar{y}^0 = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \bar{y}^i,$$

где все $t_i > 0$. Тогда $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y)$, и для любого $k \in I^+(y)$ получим

$$\langle \nabla h_k(y), \bar{y}^0 \rangle = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \rangle = \sum_{i \in I^+(y) \setminus k} t_i \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \rangle + t_k \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^k \rangle < 0.$$

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть $y^0 \in C$. Тогда аффинная оболочка и относительная внутренность множества $\Gamma_C(y^0)$ имеют вид

$$\text{aff } \Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}, \\ \text{ri } \Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, \quad i \in I^+(y^0)\}.$$

Доказательство. В силу определения множества $I^a(y^0)$ и леммы 1 аффинная оболочка множества $\Gamma_C(y^0)$ задается условием $\text{aff}\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$.

Рассмотрим выпуклую функцию

$$g(\bar{y}) = \begin{cases} \max_{i \in I^+(y^0)} \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle, & \bar{y} \in \text{aff}\Gamma_C(y^0) \\ +\infty, & \bar{y} \notin \text{aff}\Gamma_C(y^0). \end{cases}$$

Очевидно, $\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \mid g(\bar{y}) \leq 0\}$. Поскольку в силу условия RMFCQ найдется точка \bar{y}^0 такая, что $g(\bar{y}^0) < 0$, то в силу следствия 7.6.1 [13] относительную внутренность множества $\Gamma_C(y^0)$ можно записать:

$$\begin{aligned} \text{ri}\Gamma_C(y^0) &= \text{ri}\{\bar{y} \mid g(\bar{y}) \leq 0\} = \{\bar{y} \mid g(\bar{y}) < 0\} = \\ &= \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I^a(y^0), \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, i \in I^+(y^0)\}. \end{aligned}$$

Следуя [14], будем называть ограничения с индексами $i \in I^a(y)$ существенно активными для множества $\Gamma_C(y)$.

Пусть

$$\Lambda_0(y) = \{\lambda \in R^p \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0, i \in I(y), \lambda_i = 0, i \in I \setminus I(y)\}.$$

Следующая лемма является незначительной модификацией теоремы 17.7 [14].

Лемма 2. Пусть $y \in C$. Для того чтобы $i \in I^a(y)$, достаточно существования вектора $\lambda \in \Lambda_0(y)$ такого, что $\lambda_i > 0$. Если $I^a(y) \neq \emptyset$, то данное условие является и необходимым.

Пусть $y^0 \in C, I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Введем множество

$$C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0, i \in I^\#, h_i(y) = 0, i \in I_0\}$$

и обозначим через $I^{a\#}(y^0)$ множество индексов всех существенно активных ограничений для $\Gamma_{C_\#}(y^0)$.

Лемма 3. Пусть $I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Тогда $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$.

Доказательство. Покажем, что $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Действительно, если $I^a(y^0) = \emptyset$, то данное включение выполняется. Пусть $I^a(y^0) \neq \emptyset$ и $i \in I^a(y^0)$. Тогда по лемме 2 существует вектор $\lambda \in \Lambda_0(y^0)$ такой, что $\lambda_i > 0$, при этом $\lambda_j = 0$ как для всех $j \in I \setminus I(y^0)$, так и для $j \in I(y^0) \setminus I^a(y^0)$ (иначе в силу леммы 2 эти ограничения были бы тоже существенно активными для $\Gamma_C(y^0)$, что невозможно ввиду определения множества $I^a(y^0)$). Тогда существует вектор

$$\lambda \in \Lambda_0^\#(y^0) = \{\lambda \in R^p \mid \sum_{j \in I_0 \cup I^\#} \lambda_j \nabla h_j(y) = 0, \lambda_j \geq 0, j \in I^\#\}$$

такой, что $\lambda_i > 0$. В таком случае по лемме 2 $i \in I^{a\#}(y^0)$. Таким образом, $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Обратно, поскольку $\Gamma_{C_\#}(y^0) \supset \Gamma_C(y^0)$, то все существенно активные ограничения для $\Gamma_{C_\#}(y^0)$ останутся существенно активными и для $\Gamma_C(y^0)$. Следовательно, $I^a(y^0) \supset I^{a\#}(y^0)$.

Лемма 4 [8, 9]. Если в точке $y^0 \in C$ выполнено условие RMFCQ, то

1) $T_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$;

2) условие RMFCQ выполняется и в некоторой окрестности этой точки на C ;

3) существует окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такая, что $h_i(y) = 0$ при $i \in I^a(y^0)$ для всех точек $y \in C \cap V(y^0)$.

Л е м м а 5. Пусть условие *RMFCQ* выполнено в точке $y^0 \in C$. Тогда для всех $y \in C$ из некоторой окрестности y^0 справедливо включение $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в точке $y^0 \in C$ выполнено условие *RMFCQ*. Тогда в силу леммы 4 оно выполнено и для любой точки $y \in C$ из достаточно малой окрестности точки y^0 , причем $T_C(y) = \Gamma_C(y)$. Принимая во внимание определение касательного конуса $T_C(y)$, получим $y + \bar{y} + o(t) \in C$ при достаточно малых $t > 0$ для любого $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. Отсюда по лемме 4 $h_i(y + \bar{y} + o(t)) = 0$, $h_i(y) = 0$ и, следовательно, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ при всех $i \in I^a(y^0)$. Последнее означает, что $I^a(y^0) \cap I(y) \subset I^a(y)$. Но поскольку $h_i(y) = 0$ для всех $i \in I^a(y^0)$, то $I^a(y^0) \subset I(y)$ и, следовательно, $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

Пусть $X \subset R^n$. Рассмотрим многозначное отображение $G: x \mapsto G(x)$, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ множество $G(x) \subset R^m$. Нижним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\liminf_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \forall x^k \rightarrow x^0, x^k \in X, \text{ найдется последовательность } y^k \in G(x^k) \text{ } k=1,2,\dots \text{ такая, что } y^k \rightarrow y\}.$$

Верхним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\limsup_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \text{существуют последовательность } x^k \rightarrow x^0, x^k \in X, \text{ и последовательность } y^k \in G(x^k), k=1,2,\dots, \text{ такая, что } y^k \rightarrow y\}.$$

Многозначное отображение G называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве X , если $\liminf_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \supset G(x^0)$. Многозначное отображение G называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве X , если $\limsup_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \subset G(x^0)$.

Пусть $K \subset R^m$ – выпуклый конус. Обозначим $K^* = \{\hat{y} \in R^m \mid \langle \hat{y}, \bar{y} \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{y} \in K\}$ конус, двойственный к конусу K .

Рассмотрим многозначное отображение $K(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K(y) \subset R^m$, и многозначное отображение $K^*(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K^*(y)$.

Л е м м а 6. Пусть многозначное отображение $K(\cdot)$ п.н.сн. на множестве $Y \subset C$ в точке $y^0 \in clY \subset C$. Тогда отображение $K^*(\cdot)$ п.н.св. в данной точке на данном множестве.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\hat{y} \in \limsup_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y)$. Тогда найдутся последовательности $y^k \rightarrow y^0$ такая, что $y^k \in Y$ при всех $k=1,2,\dots$, и $\hat{y}^k \rightarrow \hat{y}$ такая, что $\hat{y}^k \in K^*(y^k)$ $k=1,2,\dots$. С другой стороны, возьмем любой вектор $\bar{y} \in K(y^0)$. Из полунепрерывности снизу многозначного отображения $K(\cdot)$ в точке $y^0 \in clY$ на множестве Y следует, что для последовательности $y^k \rightarrow y^0$, $y^k \in Y$, существует последовательность $\bar{y}^k \in K(y^k)$, $k=1,2,\dots$, такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$. В таком случае $\langle \hat{y}^k, \bar{y}^k \rangle \leq 0$ при всех $k=1,2,\dots$, откуда $\langle \hat{y}, \bar{y} \rangle \leq 0$ для любого $\bar{y} \in K(y^0)$. Следовательно, $\hat{y} \in K^*(y^0)$ и $\limsup_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y) \subset K^*(y^0)$.

2. Основной результат. Пусть $v \in R^m$, $v \notin C$. Обозначим $\Pi_C(v)$ – множество точек из C , ближайших к точке v . Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования

$$f_v(y) \rightarrow \min, y \in C, \quad (1)$$

где $f_v(y) = |y - v|$.

Т е о р е м а 1. Пусть множество C удовлетворяет в точке $y^0 \in C$ условию *RMFCQ*. Тогда множество C *R*-регулярно в данной точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $y^0 \in \text{int} C$, то доказываемое утверждение верно. Пусть $y^0 \in \text{bd} C$. 1) Будем рассуждать от противного и предположим, что множество C не является *R*-регулярным в точке $y^0 \in C$. Тогда существует последовательность $v^k \rightarrow y^0$, $v^k \notin C$, такая, что $d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k), i \in I, |h_i(v^k)|, i \in I_0\}$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Пусть

$$y^k = y(v^k) \in \Pi_C(v^k), \quad \bar{v}^k = (v^k - y^k) \left| v^k - y^k \right|^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Очевидно, $y^k \rightarrow y^0$, $|\bar{v}^k| = 1$.

Ввиду конечности индексного множества I можно извлечь из последовательностей $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$ подпоследовательности, на которых множество индексов $I(y^k)$ постоянно. Поэтому, для простоты записи сохранив для этих подпоследовательностей те же обозначения $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$, можно положить

$$I(y^k) = I^\# \subset I(y^0),$$

где $I^\#$ не зависит от y^k .

Без потери общности рассуждений мы можем также предположить, что $\bar{v}^k \rightarrow \bar{v}$. Тогда

$$\left| v^k - y^k \right| > k \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k \rangle, i \in I^\#, \left| \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k \rangle \right|, i \in I_0\},$$

где $\tilde{v}^k = y^k + \tau_k(v^k - y^k)$, $0 \leq \tau_k \leq 1$. Из данного неравенства следует:

$$\frac{1}{k} > \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k \rangle, i \in I^\#, \left| \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k \rangle \right|, i \in I_0\}$$

и, следовательно,

$$\max\{0, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle, i \in I^\#, \left| \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle \right|, i \in I_0\} \leq 0.$$

Положив

$$C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0, \quad i \in I^\#, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

получаем из последнего неравенства

$$\bar{v} \in \Gamma_{C_\#}(y^0),$$

где

$$\Gamma_{C_\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0, \quad i \in I^\#, \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\}.$$

2) С другой стороны, поскольку условие *RMFCQ* в точке y^0 влечет в силу леммы 4 выполнение условия *RMFCQ* и в некоторой ее окрестности, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что *RMFCQ* выполняется и в точках y^k (2) и, следовательно, для задачи (1) при $v = v_k$ существуют множители Лагранжа $\lambda^k \in R^p$, для которых

$$\frac{v^k - y^k}{|v^k - y^k|} = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \quad \lambda_i^k \geq 0, \quad i \in I, \quad \text{и} \quad \lambda_i^k = 0 \quad \text{для} \quad i \in (I \setminus I^\#).$$

Последнее условие можно переписать в виде

$$\bar{v}^k = \sum_{i \in I_0 \cup I^\#} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \quad \lambda_i^k \geq 0, \quad i \in I^\#,$$

откуда $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C_\#}(y^k)]^*$, где, согласно определению,

$$\Gamma_{C_\#}(y^k) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle \leq 0, \quad i \in I^\#, \quad \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\}.$$

В силу леммы 5, $I^a(y^0) \subset I^\#$. Тогда по лемме 3, условия которой выполнены для выбранного множества $I^\#$, имеем $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$ и, согласно утверждению 1, получаем

$$ri \Gamma_{C\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, \quad i \in I^\# \setminus I^a(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}.$$

Возьмем произвольный вектор $\bar{y} \in ri \Gamma_{C\#}(y^0)$.

В силу условия RMFCQ для множества C в точке $y^0 \in C$ можно, не ограничивая общности, считать, что

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = l$$

для всех $k=1,2,\dots$. Следовательно, существует максимальная линейно независимая подсистема $\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ системы $\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$, которая остается максимальной линейно независимой подсистемой $\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ в системе векторов $\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$. Для простоты будем считать, что $J = \{1, \dots, l\}$.

Тогда система уравнений $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ равносильна системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in J. \quad (3)$$

Для определенности считаем, что базисный минор системы уравнений (3) расположен в верхнем левом углу соответствующей матрицы. Тогда систему (3) можно записать в виде

$$B_1(y^0)\bar{y}^1 + B_2(y^0)\bar{y}^2 = 0, \quad \text{где } \bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2), \quad \bar{y}^1 = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l), \quad \bar{y}^2 = (\bar{y}_{l+1}, \dots, \bar{y}_m),$$

$$B_1(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_l} \end{bmatrix}, \quad B_2(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{l+1}} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_{l+1}} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Отсюда $\bar{y}^1 = -B_1^{-1}(y^0)B_2(y^0)\bar{y}^2$.

Построим вектор $\bar{y}^k = (\bar{y}^{1k}, \bar{y}^{2k})$ следующим образом:

$$\bar{y}^{1k} = -B_1^{-1}(y^k)B_2(y^k)\bar{y}^2, \quad \bar{y}^{2k} = \bar{y}^2.$$

Тогда

$$\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle = 0, \quad i \in J, \quad \text{и } \bar{y}^k \rightarrow \bar{y} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, при $i \in I^\# \setminus I^a(y^0)$ справедливо $|\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle| \rightarrow 0$ и, следовательно, $|\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty, i \in I^\#$. Учитывая это и неравенства $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, \quad i \in I^\# \setminus I^a(y^0)$, получаем, что $\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle < 0, \quad i \in I^\# \setminus I^a(y^0)$. Таким образом, для любого $\bar{y} \in ri \Gamma_{C\#}(y^0)$ существует последовательность $\bar{y}^k \in \Gamma_{C\#}(y^k)$ такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$. Последнее означает, что $\liminf_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y) \supset ri \Gamma_{C\#}(y^0)$ в точке y^0 на последовательности $y^k \rightarrow y^0, Y = \{y^k, k=1,2,\dots\}$. Отсюда с учетом замкнутости множеств $\liminf_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y)$ и $\Gamma_{C\#}(y^0)$ получаем $\liminf_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y) \supset \Gamma_{C\#}(y^0)$. Следовательно, многозначное отображение $\Gamma_{C\#}(y)$ полунепрерывно снизу. В таком случае по лемме 6 конус $[\Gamma_{C\#}(y)]^*$, двойственный к $\Gamma_{C\#}(y)$, будет полунепрерывным сверху в точке y^0 на последовательности $y^k \rightarrow y^0$. С учетом этого и доказанного ранее включения $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C\#}(y^k)]^*$ и того, что $\bar{v}^k \rightarrow \bar{v}$, следует $\bar{v} \in [\Gamma_{C\#}(y^0)]^*$. Но, с другой стороны, в первой

части доказательства получено включение $\bar{v} \in \Gamma_{C\#}(y^0)$. Поскольку $|\bar{v}| \neq 0$, последнее невозможно. Полученное противоречие говорит о справедливости утверждения теоремы.

Доказанная теорема обобщает результат, полученный в работе [9] при дополнительных предположениях о существовании и непрерывности вторых производных функций, описывающих множество C .

Пример. Пусть $C = \{y \in R^2 \mid h_i(y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad h_3(y) = 0\}$, где

$$h_1(y) = \begin{cases} y_2 - y_1^2, & \text{если } y_1 \geq 0 \\ y_2 + y_1^3, & \text{если } y_1 \leq 0 \end{cases},$$

$$h_2(y) = -y_2, \quad h_3(y) = y_1.$$

Рассмотрим точку $y^0 = (0, 0)$. Очевидно, что функция $h_1(y)$ непрерывно дифференцируема в точке y^0 и ее окрестности, но не является дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке. Нетрудно видеть, что $\Gamma_C(y^0) = \{(0, 0)\}$, $I^a(y^0) = \{1, 2\}$. Далее,

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y), \quad i = 1, 2, 3\} = 2,$$

т. е. условие RMFCQ выполнено. Условие R -регулярности также выполняется в силу теоремы 1.

Отметим, что выполнение условия R -регулярности в данном примере можно получить, не привлекая теорему 1. В частности, оно вытекает из условия RCRCQ, которое имеет место в точке y^0 , и теоремы 4 [4].

Отметим, что, как это следует из теоремы ниже, условия регулярности *гарантируют качество ограничений*, дающих описание множества допустимых точек, а не свойства самого этого множества.

Т е о р е м а 2. Пусть условие регулярности RMFCQ выполнено в $y^0 \in C$. Тогда существует окрестность $V(y^0)$ такая, что множество $C \cap V(y^0)$ может быть записано с помощью ограничений, для которых в точке y^0 выполняется условие Мангасаряна – Фромовица.

Доказательство получается применением леммы 4 и теоремы о функциональной зависимости системы функций [15].

Литература

1. Mangasarian O. L., Fromovitz S. // J. Math. Analysis and Appl. 1967. Vol. 17. P. 37–47.
2. Janin R. // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110–126.
3. Minchenko L., Stakhovski S. // Optimization. 2011. Vol. 60, N 4. P. 429–440.
4. Minchenko L., Stakhovski S. // SIAM J. Optimiz. 2011. Vol. 21, N 1. P. 314–332.
5. Qi L., Wei Z. // SIAM J. Optimiz. 2000. Vol. 10. P. 963–981.
6. Andreani R., Martinez J. M., Schuverdt M. L. // J. Optimiz. Theory and Appl. 2005. Vol. 125. P. 473–485.
7. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S. // Mathematical Programming. Ser. A. 2012. Vol. 135. P. 255–273.
8. Минченко Л. И., Стаховский С. М. // Докл. БГУИР. 2010. № 8. С. 104–109.
9. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S. // SIAM J. Optimiz. 2012. Vol. 22, N 3. P. 1109–1135.
10. Minchenko L., Tarakanov A. // J. Optimiz. Theory and Appl. 2011. Vol. 148. P. 571–579.
11. Bosch P., Jourani A., Henrion R. // Applied Mathematics and Appl. 2004. Vol. 50. P. 161–181.
12. Henrion R., Jourani A., Outrata J. // SIAM J. Optimiz. 2002. Vol. 13. P. 603–618.
13. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М., 1971.
14. Гороховик В. В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
15. Зорич В. А. Математический анализ. М., 1981. Ч. 1.

A. E. LESCHOV, L. I. MINCHENKO

WEAKLY REGULAR MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

Summary

In this article nonlinear programming problems is considered under the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification. We prove that the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification implies the local error bound property without additional assumptions for constraints.