

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 512.542
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-7-17>

Поступила в редакцию 25.08.2022
Received 25.08.2022

Н. Н. Воробьев

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

О МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТКИ БЭРОВСКИХ σ -ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Символом σ обозначают некоторое разбиение множества всех простых чисел. В работе В. Г. Сафонова, И. Н. Сафоновой, А. Н. Скибы (Commun. Algebra. 2020. Vol. 48, № 9. P. 4002–4012) определена *обобщенная формационная σ -функция* как отображение $f: \sigma \cup \{\emptyset\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(\emptyset) \neq \emptyset$. При помощи обобщенной формационной σ -функции определены обобщенно локальные формации – так называемые *бэровские σ -локальные формации*. Множество всех таких формаций образует решетку по включению. В настоящей работе установлены свойства алгебраичности и модулярности этой решетки.

Ключевые слова: конечная группа, формация, обобщенная формационная σ -функция, бэровская σ -локальная формация, полная решетка формаций, модулярная решетка, алгебраическая решетка

Для цитирования. Воробьев, Н. Н. О модулярности решетки бэровских σ -локальных формаций / Н. Н. Воробьев // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 7–17. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-7-17>

Nikolay N. Vorob'ev

Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus

ON THE MODULARITY OF THE LATTICE OF BAER- σ -LOCAL FORMATIONS

Abstract. Throughout this paper, all groups are finite. A group class closed under taking homomorphic images and finite subdirect products is called a *formation*. The symbol σ denotes some partition of the set of all primes. V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba (Commun. Algebra. 2020. Vol. 48, № 9. P. 4002–4012) defined a generalized formation σ -function. Any function f of the form $f: \sigma \cup \{\emptyset\} \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$, where $f(\emptyset) \neq \emptyset$, is called a *generalized formation σ -function*. Generally local formations or so-called *Baer- σ -local formations* are defined by means of generalized formation σ -functions. The set of all such formations partially ordered by set inclusion is a lattice. In this paper it is proved that the lattice of all Baer- σ -local formations is algebraic and modular.

Keywords: finite group, formation, generalized formation σ -function, Baer- σ -local formation, complete lattice of formations, modular lattice, algebraic lattice

For citation. Vorob'ev N. N. On the modularity of the lattice of Baer- σ -local formations. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 7–17 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-7-17>

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Мы будем использовать стандартную терминологию, принятую в [1–7].

Следуя Л. А. Шеметкову [1], символом σ будем обозначать некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Если n – натуральное число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех его простых делителей; $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$; $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G \text{ об-}$
 $\text{ладает главным фактором } H/K \text{ таким, что } \sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$, $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma^+(G)$.

Группа G называется: σ -*примарной* [7], если G является σ_i -группой для некоторого i ; σ -*разрешимой* [7], если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор группы G является σ -примарным. Главный фактор H/K группы G называется: σ -*центральным* в группе G , если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ -примарным; σ_i -*фактором*, если H/K является σ_i -группой. Группа G называется *обобщенной* $\{\sigma_i\}$ -*нильпотентной*, если каждый главный σ_i -фактор группы G является σ -центральным. Символ $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ обозначает произведение всех нормальных обобщенных $\{\sigma_i\}$ -нильпотентных подгрупп группы G , символ $O_{\sigma_i}(G)$ – произведение всех нормальных σ_i -подгрупп группы G и символ $R_{\sigma}(G)$ – произведение всех нормальных σ -разрешимых подгрупп группы G .

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Напомним определение бэровской σ -локальной формации, введенное в [7] в ходе разработки методов изучения σ -свойств групп [8–11].

Всякая функция f вида

$$f: \sigma \cup \{\emptyset\} \rightarrow \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\emptyset) \neq \emptyset$, называется *обобщенной формационной σ -функцией* (см. [7]), и полагают

$$BLF_{\sigma}(f) = \left(G \mid G/R_{\sigma}(G) \in f(\emptyset) \text{ и } G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma^+(G) \right).$$

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(f)$ для некоторой обобщенной формационной σ -функции f , то \mathfrak{F} называют *бэровской σ -локальной формацией с обобщенным σ -локальным заданием f* (см. [7]).

Относительно включения \subseteq множество всех бэровских σ -локальных формаций c^{σ} образует полную решетку (см. лемму 5).

Напомним, что решетка L называется *модулярной* [12], если для любых $x, y, z \in L$ имеет место импликация

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z),$$

называемая *модулярным законом*.

В 1986 г. А. Н. Скибой [13] установлено, что решетка всех (локальных) формаций модулярна. Этот результат получил развитие во многих направлениях исследований. Одно из них посвящено поиску модулярных и дистрибутивных решеток классов. В частности, были найдены серии модулярных и дистрибутивных решеток формаций групп (см. [3, 4, 6, 13–29]). В настоящей работе установлено, что решетка всех бэровских σ -локальных формаций модулярна.

Другим естественным направлением исследований стал поиск алгебраических решеток классов. Элемент c полной решетки L называется *компактным* [12], если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leq \sup_L X$ вытекает существование конечного подмножества $X_0 \subseteq X$ такого, что $c \leq \sup_L X_0$. Полная решетка называется *алгебраической*, если каждый ее элемент представим как точная верхняя грань некоторого множества компактных элементов.

Отметим, что вопрос об алгебраичности решетки всех насыщенных формаций конечных групп был впервые поставлен Б. И. Плоткиным в 1984 г. на XVIII Всесоюзной алгебраической конференции (г. Москва) во время обсуждения совместного доклада Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы «Алгебра классов конечных групп». Такая задача была решена А. Н. Скибой в монографии [3]. В дальнейшем были найдены другие бесконечные серии алгебраических решеток формаций и описаны их компактные элементы (см., напр., [21, 24, 30–35]). В настоящей работе доказана алгебраичность решетки всех бэровских σ -локальных формаций.

Предварительные сведения. Для любых двух классов групп \mathfrak{M} и \mathfrak{H} будем писать

$$\mathfrak{M} \vee^{\sigma} \mathfrak{H} = c^{\sigma} \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Если t и h – обобщенные формационные σ -функции, то $t \vee h$ – такая обобщенная формационная σ -функция, что

$$(m \vee h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \vee h(\sigma_i)$$

для всех i . Символом $m \cap h$ обозначают такую обобщенную формационную σ -функцию, что

$$(m \cap h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \cap h(\sigma_i)$$

для всех i .

Лемма 1 [7, предложение 2.7]. Пусть f и h – обобщенные формационные σ -функции такие, что $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f) = BLF_\sigma(h)$, и пусть $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$. Тогда:

1) если $\sigma_i \in \Pi$, то

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F};$$

2) $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(F)$, где F – обобщенная формационная σ -функция такая, что $F(\emptyset) = \mathfrak{F}$ и

$$F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Обобщенная формационная σ -функция f называется *внутренней* [7], если $f(a) \subseteq BLF_\sigma(f)$ для всех $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$.

Лемма 2 [36, лемма 3]. Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ и $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$ для всех $j \in J$, то $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, где $f(\emptyset) = \bigcap_{j \in J} f_j(\emptyset)$ и $f(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j \in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j)$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$. Кроме того, если f_j – внутреннее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F}_j для всех $j \in J$, то f также является внутренним обобщенным σ -локальным заданием формации \mathfrak{F} .

Пусть $\{f_j | j \in J\}$ – набор всех обобщенных σ -локальных заданий формации \mathfrak{F} . В силу леммы 2 $f = \bigcap_{j \in J} f_j$ – обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} , называемое *наименьшим* (см. [5, 6]), такое, что $f(a) = \bigcap_{j \in J} f_j(a)$ для всех $a \in \sigma_i \cup \{\emptyset\}$ по всем i .

Лемма 3 [36, теорема]. Пусть \mathfrak{X} – некоторая непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c^\sigma \text{form}(\mathfrak{X}) = BLF_\sigma(f)$, где f – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} , и пусть $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{X})$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$;

2) $f(\emptyset) = \text{form}(G/R_\sigma(G) | G \in \mathfrak{X})$;

3) $f(\sigma_i) = \text{form}(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) | G \in \mathfrak{X}) = \text{form}(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) | G \in \mathfrak{F})$

для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$;

4) если h – произвольное обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} , то для всех $\sigma_i \in \Pi$ имеет место $f(\sigma_i) = \text{form}(G | G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}, O_{\sigma_i}(G) = 1)$ и $f(\emptyset) = \text{form}(G | G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_\sigma(G) = 1)$.

Из леммы 3 вытекает

Лемма 4 [36, следствие 1]. Пусть f_i – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F}_i , $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

Лемма 5 [7, предложение 1.2]. Пусть $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$ и $\Pi = \text{Supp}(f)$. Тогда:

1) $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$;

2) $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{G}_\sigma f(\emptyset)$ и $G \in \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(G)$;

3) $\mathfrak{F} = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{G}_\sigma f(\emptyset), & \text{если } \Pi \neq \emptyset; \\ \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{G}_\sigma f(\emptyset), & \text{если } \Pi = \emptyset; \end{cases}$

4) \mathfrak{F} – непустая формация.

Мы используем \mathfrak{G}_{Π^+} для обозначения класса всех групп G таких, что $\sigma^+(G) \subseteq \Pi \subseteq \sigma$. Класс всех обобщенных $\{\sigma_i\}$ -нильпотентных групп обозначают через $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$, а класс всех σ -разрешимых групп – через \mathfrak{G}_σ . Если f – обобщенная формационная σ -функция, то символ $\text{Supp}(f)$ обозначает суппорт функции f , т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Лемма 6 [7, предложение 2.2]. *Класс всех σ_i -нильпотентных групп \mathfrak{G}_{σ_i} и класс всех обобщенных $\{\sigma_i\}$ -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$ являются формациями Фиттинга.*

З а м е ч а н и е. Класс \mathfrak{G}_{Π^+} является бэровской σ -локальной формацией.

Действительно, пусть f – обобщенная формационная σ -функция такая, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } a = \sigma_i \in \Pi; \\ \emptyset, & \text{если } a = \sigma_i \in \Pi'; \\ \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } a = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда, согласно утверждению 3) леммы 5,

$$BLF_{\sigma}(f) = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \right) \cap \mathfrak{S}_{\sigma} \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } \text{Supp}(f) \neq \emptyset; \\ \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_{\sigma} \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } \text{Supp}(f) = \emptyset. \end{cases}$$

Так как по лемме 6 $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$, \mathfrak{S}_{σ} и \mathfrak{G}_{Π^+} – формации, то

$$\mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \right) \cap \mathfrak{S}_{\sigma} \mathfrak{G}_{\Pi^+} = \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} \right) \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_{\sigma} \mathfrak{G}_{\Pi^+} = \mathfrak{G}_{\Pi^+}$$

при $\text{Supp}(f) \neq \emptyset$ и

$$\mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_{\sigma} \mathfrak{G}_{\Pi^+} = \mathfrak{G}_{\Pi^+}$$

при $\text{Supp}(f) = \emptyset$. Таким образом, \mathfrak{G}_{Π^+} является бэровской σ -локальной формацией. Утверждение доказано.

Лемма 7. *Совокупность всех бэровских σ -локальных формаций \mathcal{C}^{σ} является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп \mathfrak{G} , а для произвольного множества бэровских σ -локальных формаций $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$*

$$\wedge^{\sigma}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань и

$$\vee^{\sigma}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c^{\sigma} \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в решетке \mathcal{C}^{σ} .

Доказательство. Отметим, что совокупность всех бэровских σ -локальных формаций \mathcal{C}^{σ} частично упорядочена относительно включения \subseteq . Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – произвольное непустое множество бэровских σ -локальных формаций и f_j – внутреннее обобщенное σ -локальное задание формации $\mathfrak{F}_j, j \in J$. Пусть

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j.$$

Тогда, согласно лемме 2, $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(f)$, где f – такое обобщенное σ -локальное задание, что

$$f(\emptyset) = \bigcap_{j \in J} f_j(\emptyset), \quad f(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j \in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j)$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$; и тем самым \mathfrak{F} – бэровская σ -локальная формация, т. е. $\mathfrak{F} = \wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$. Значит,

$$\wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \in \mathcal{C}^\sigma.$$

Поэтому

$$\wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j | j \in J\}$ в \mathcal{C}^σ . Как отмечено выше,

$$\vee^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J) = c^\sigma \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) \in \mathcal{C}^\sigma.$$

Поэтому

$$\vee^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J) = c^\sigma \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j | j \in J\}$ в \mathcal{C}^σ .

Итак, совокупность всех бэровских σ -локальных формаций \mathcal{C}^σ является решеткой. Отметим также, что, согласно замечанию, класс всех групп \mathfrak{G} является бэровской σ -локальной формацией. Поэтому формация \mathfrak{G} является наибольшим элементом решетки \mathcal{C}^σ .

Таким образом, \mathcal{C}^σ – полная решетка формаций, в которой наибольший элемент – формация всех групп \mathfrak{G} . Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$, где f_j – внутреннее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F}_j , $j = 1, 2$. Тогда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^\sigma \mathfrak{F}_2 = BLF_\sigma(f),$$

где $f = f_1 \vee f_2$ – внутреннее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} .

Доказательство. Пусть h_j – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F}_j и пусть F_j – каноническое обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F}_j , $j = 1, 2$. Пусть h – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} и пусть F – каноническое обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} . Тогда по утверждению 2) леммы 1 и лемме 3 для каждого i имеет место

$$h_j(\emptyset) \subseteq f_j(\emptyset) \subseteq F_j(\emptyset) = \mathfrak{F}_j, \quad h_j(\sigma_i) \subseteq f_j(\sigma_i) \subseteq F_j(\sigma_i).$$

Кроме того, согласно утверждению 2) леммы 1 и лемме 3, имеет место

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= \text{form}(G / R_\sigma(G) | G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \text{form}((G / R_\sigma(G) | G \in \mathfrak{F}_1) \cup (G / R_\sigma(G) | G \in \mathfrak{F}_2)) = \\ &= \text{form}(\text{form}(G / R_\sigma(G) | G \in \mathfrak{F}_1) \cup \text{form}(G / R_\sigma(G) | G \in \mathfrak{F}_2)) = \text{form}(h_1(\emptyset) \cup h_2(\emptyset)) \subseteq f(\emptyset) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \text{form}(h_1(\emptyset) \cup h_2(\emptyset)) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\emptyset) = F(\emptyset) = \mathfrak{F}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\sigma_i) &= \text{form}(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) | G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \text{form}((G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) | G \in \mathfrak{F}_1) \cup (G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) | G \in \mathfrak{F}_2)) = \\ &= \text{form}(\text{form}(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) | G \in \mathfrak{F}_1) \cup \text{form}(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) | G \in \mathfrak{F}_2)) = \text{form}(h_1(\sigma_i) \cup h_2(\sigma_i)) \subseteq f(\sigma_i) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \text{form}(h_1(\sigma_i) \cup h_2(\sigma_i)) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i) = F(\sigma_i). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$h(\emptyset) \subseteq f(\emptyset) \subseteq F(\emptyset), \quad h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \subseteq F(\sigma_i)$$

для всех i . Значит, $h \leq f \leq F$. Следовательно, $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть f_j – наименьшее обобщенное σ -локальное задание бэровской σ -локальной формации \mathfrak{F}_j , где $j \in J$. Тогда $\vee(f_j | j \in J)$ – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации $\mathfrak{F} = \vee^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J)$.

Доказательство. Пусть

$$\Pi = \sigma^+ \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) = \bigcup_{j \in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j) = \sigma^+(\mathfrak{F}),$$

$f = \vee(f_j | j \in J)$ и h – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} . Покажем, что $f = h$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma \setminus \Pi$ для некоторого i . Тогда по лемме 3 для любого $j \in J$ имеет место $h(\sigma_i) = \emptyset$ и $f_j(\sigma_i) = \emptyset$. Значит, $f(\sigma_i) = \emptyset$.

Пусть $\sigma_i \in \Pi$. Тогда найдется такое $j \in J$, что $f_j(\sigma_i) \neq \emptyset$. Значит, согласно лемме 3, имеет место

$$\begin{aligned} h(\sigma_i) &= \text{form} \left(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) = \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} \text{form} (G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j) \right) = \\ &= \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} f_j(\sigma_i) \right) = (\vee(f_j | j \in J))(\sigma_i) = f(\sigma_i). \end{aligned}$$

Кроме того, согласно лемме 3, имеем

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= \text{form} \left(G / R_\sigma(G) \mid G \in \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) = \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} \text{form} (G / R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j) \right) = \\ &= \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} f_j(\emptyset) \right) = (\vee(f_j | j \in J))(\emptyset) = f(\emptyset). \end{aligned}$$

Следовательно, $f = h$. Таким образом, $h = \vee(f_j | j \in J)$ – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации $\mathfrak{F} = \vee^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J)$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10 [37, лемма 4.1]. Если решетка формаций Θ является алгебраической, то ее компактными элементами являются в точности однопорожжденные формации из Θ .

Основной результат.

Теорема. Решетка всех бэровских σ -локальных формаций C^σ является полной, алгебраической, модулярной, в которой для произвольного множества бэровских σ -локальных формаций $\{\mathfrak{F}_j | j \in J\}$

$$\wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань и

$$\vee^\sigma(\mathfrak{F}_j | j \in J) = c^\sigma \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j | j \in J\}$ в решетке C^σ .

Доказательство. Согласно лемме 7, остается показать, что решетка C^σ модулярна и алгебраична. Докажем сначала, что решетка C^σ модулярна. Пусть $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$ – бэровская σ -локаль-

ная формация; $j = 1, 2, 3$, где $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$ и f_j – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F}_j . Покажем, что

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee^\sigma (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3). \quad (*)$$

Заметим, что обобщенные σ -локальные задания f_1, f_2, f_3 являются внутренними и по лемме 4 $f_2(\emptyset) \subseteq f_1(\emptyset), f_2(\sigma_i) \subseteq f_1(\sigma_i)$ для всех i . Следовательно, по лемме 8 обобщенное σ -локальное задание $f_2 \vee f_3$ является внутренним и

$$\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma \mathfrak{F}_3 = BLF_\sigma(f_2 \vee f_3).$$

Значит, по лемме 2

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma \mathfrak{F}_3) = BLF_\sigma(f_1 \cap (f_2 \vee f_3)).$$

Аналогично, применяя лемму 2 и лемму 8, можно показать, что

$$\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) = BLF_\sigma(f_2 \vee (f_1 \cap f_3)).$$

Поскольку, согласно [13], решетка всех формаций модулярна, то для любого i

$$f_1(\emptyset) \cap (f_2(\emptyset) \vee f_3(\emptyset)) = f_2(\emptyset) \vee (f_1(\emptyset) \cap f_3(\emptyset)),$$

$$f_1(\sigma_i) \cap (f_2(\sigma_i) \vee f_3(\sigma_i)) = f_2(\sigma_i) \vee (f_1(\sigma_i) \cap f_3(\sigma_i)).$$

Следовательно,

$$f_1 \cap (f_2 \vee f_3) = f_2 \vee (f_1 \cap f_3).$$

Таким образом, справедливо равенство (*). Итак, решетка всех бэровских σ -локальных формаций C^σ модулярна.

Докажем теперь, что решетка C^σ алгебраична. Покажем прежде, что любая бэровская σ -локальная формация \mathfrak{F} является решеточным объединением (в решетке C^σ) своих однопорозжденных бэровских σ -локальных подформаций $\mathfrak{F}_j = c^\sigma \text{form}(G_j)$, где $j \in J$.

Пусть $\mathfrak{H} = c^\sigma \text{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in c^\sigma \text{form}(G) \subseteq \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \subseteq c^\sigma \text{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Обратно. Так как $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$, то $\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Докажем, что каждая однопорозжденная бэровская σ -локальная формация $\mathfrak{F} = c^\sigma \text{form}(G)$ является компактным элементом в решетке C^σ . Пусть

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = \vee^\sigma (\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c^\sigma \text{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$$

для некоторого множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq C^\sigma$.

Пусть f_j – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F}_j для всех j , f – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{F} и m – наименьшее обобщенное σ -локальное задание формации \mathfrak{M} . Пусть $\sigma_i \in \sigma^+(G)$. Тогда по лемме 3

$$f(a) = \begin{cases} \text{form}(G / R_\sigma(G)), & \text{если } a = \emptyset, \\ \text{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)), & \text{если } a = \sigma_i. \end{cases}$$

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 4 имеем $f \leq m$. По лемме 9 имеет место $m = \vee(f_j \mid j \in J)$, поэтому

$$f(\emptyset) \subseteq m(\emptyset) = (\vee(f_j \mid j \in J))(\emptyset) = \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} f_j(\emptyset) \right),$$

$$f(\sigma_i) \subseteq m(\sigma_i) = (\vee(f_j \mid j \in J))(\sigma_i) = \text{form} \left(\bigcup_{j \in J} f_j(\sigma_i) \right).$$

Так как, согласно [4, теорема 4], решетка всех формаций алгебраична и формации $f(\emptyset)$ и $f(\sigma_i)$ однопорожжденные, то найдутся такие индексы $j_1, \dots, j_i; k_1, \dots, k_r \in J$, что

$$G / R_\sigma(G) \in f(\emptyset) \subseteq f_{j_1}(\emptyset) \vee \dots \vee f_{j_i}(\emptyset);$$

$$G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \subseteq f_{k_1}(\sigma_i) \vee \dots \vee f_{k_r}(\sigma_i).$$

Поскольку множество $\sigma^+(G)$ конечно, то из последнего вытекает, что

$$G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\sigma \dots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{j_i} \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_1} \vee^\sigma \dots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_r}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\sigma \dots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{j_i} \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_1} \vee^\sigma \dots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_r}.$$

Итак, решетка всех бэровских σ -локальных формаций C^σ является алгебраической. Ввиду леммы 10 компактными элементами решетки C^σ являются в точности однопорожжденные бэровские σ -локальные формации из C^σ . Теорема доказана.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, из теоремы получаем

С л е д с т в и е (см. [4, теорема 4]). *Решетка всех бэровских локальных формаций C является полной, алгебраической, модулярной, в которой для произвольного множества бэровских локальных формаций $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$*

$$\wedge(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань и

$$\vee^c(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \text{cform} \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в решетке C .

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (№ 20210495).

Acknowledgements. The author's research was supported by the State Program of Scientific Research “Konvergent-siya-2025” (no. 20210495).

Список использованных источников

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 272 с.
2. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 256 с.
3. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
4. Скиба, А. Н. Кратно \mathcal{L} -композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797. <https://doi.org/10.1007/BF02591784>
5. Чжан Чи. О \sum_i^σ -замкнутых классах конечных групп / Чжан Чи, А. Н. Скиба // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6>

6. Zhang Chi. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Zhang Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // *Commun. Algebra*. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968. <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875>
7. Safonov, V. G. On Baer- σ -local formations of finite groups / V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba // *Commun. Algebra*. – 2020. – Vol. 48, № 9. – P. 4002–4012. <https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1753760>
8. Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // *J. Algebra*. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
9. Safonov, V. G. On one generalization of σ -local and Baer-local formations / V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2019. – № 4 (41). – С. 65–69.
10. Skiba, A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A. N. Skiba // *J. Algebra*. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.009>
11. Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // *J. Algebra*. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.12.013>
12. *Общая алгебра: в 2 т.* / В. А. Артамонов [и др.]; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – Т. 2. – 480 с.
13. Скиба, А. Н. О локальных формациях длины 5 / А. Н. Скиба // *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомел. семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. М. И. Салука*. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 135–149.
14. Скиба, А. Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // *Мат. тр.* – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
15. Воробьев, Н. Н. *Алгебра классов конечных групп: монография* / Н. Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
16. Ballester-Bolinchés, A. On lattices of p -local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinchés, L. A. Shemetkov // *Math. Nachr.* – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65. <https://doi.org/10.1002/mana.3211860103>
17. Safonov, V. G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V. G. Safonov // *Algebra Colloq.* – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128. <https://doi.org/10.1142/S1005386708000126>
18. Safonov, V. G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V. G. Safonov // *Commun. Algebra*. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502. <https://doi.org/10.1080/00927870701509354>
19. Шабалина, И. П. О решетке τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций конечных групп / И. П. Шабалина // *Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. – 2003. – № 1. – С. 28–30.
20. Щербина, В. В. О подрешетках решетки частично totally насыщенных формаций конечных групп / В. В. Щербина, В. Г. Сафонов // *Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика*. – 2019. – Т. 51, № 1. – С. 64–87. <https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87>
21. Щербина, В. В. О некоторых свойствах решетки частично totally насыщенных формаций конечных групп / В. В. Щербина, В. Г. Сафонов // *Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика*. – 2019. – Т. 51, № 2. – С. 227–244. <https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244>
22. Shemetkov, L. A. On lattices of formations of finite groups / L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, N. N. Vorob'ev // *Algebra Colloq.* – 2010. – Vol. 17, № 4. – P. 557–564. <https://doi.org/10.1142/S1005386710000532>
23. Shemetkov, L. A. On laws of lattices of partially saturated formations / L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, N. N. Vorob'ev // *Asian-Eur. J. Math.* – 2009. – Vol. 02, № 01. – P. 155–169. <https://doi.org/10.1142/S1793557109000133>
24. Tsarev, A. A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A. A. Tsarev // *Ric. Mat.* – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698. <https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3>
25. Tsarev, A. A. Lattices of composition formations of finite groups and laws / A. A. Tsarev, N. N. Vorob'ev // *J. Algebra Appl.* – 2018. – Vol. 17, № 05. – P. 1850084-1–1850084-17. <https://doi.org/10.1142/S0219498818500846>
26. Tsarev, A. A. On a question of the theory of partially composition formations / A. A. Tsarev, N. N. Vorob'ev // *Algebra Colloq.* – 2014. – Vol. 21, № 3. – P. 437–447. <https://doi.org/10.1142/S1005386714000388>
27. Воробьев, Н. Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба, А. А. Царев // *Сиб. мат. журн.* – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024. <https://doi.org/10.1134/S0037446611050059>
28. Воробьев, Н. Н. О модулярности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / Н. Н. Воробьев, А. А. Царев // *Укр. мат. журн.* – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463. <https://doi.org/10.1007/s11253-010-0368-9>
29. Жизневский, П. А. О модулярности и индуктивности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций конечных групп / П. А. Жизневский // *Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.
30. Tsarev, A. A. Algebraic lattices of partially saturated formations of finite groups / A. A. Tsarev // *Afr. Mat.* – 2020. – Vol. 31, № 3–4. – P. 701–707. <https://doi.org/10.1007/s13370-019-00753-5>
31. Сафонов, В. Г. Об алгебраичности решетки τ -замкнутых totally насыщенных формаций / В. Г. Сафонов // *Алгебра и логика*. – 2006. – Т. 45, № 5. – С. 620–626. <https://doi.org/10.1007/s10469-006-0032-5>
32. Шабалина, И. П. Алгебраичность решетки τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций / И. П. Шабалина // *Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры* – 18. – 2002. – № 5 (14). – С. 59–67.
33. Щербина, В. В. Алгебраичность решетки τ -замкнутых totally ω -насыщенных формаций конечных групп / В. В. Щербина // *Уфим. мат. журн.* – 2020. – Vol. 12, № 1. – С. 83–91. <https://doi.org/10.13108/2020-12-1-82>
34. Tsarev, A. A. Algebraic lattices of solvably saturated formations and their applications / A. A. Tsarev, A. V. Kukharev // *Bol. Soc. Mat. Mex.* – 2020. – Vol. 26, № 3. – P. 1003–1014. <https://doi.org/10.1007/s40590-020-00290-3>

35. Щербина, В. В. О двух задачах теории частично totally композиционных формаций конечных групп / В. В. Щербина // Приклад. математика & физика. – 2020. – Т. 52, № 1. – С. 18–32. <https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32>
36. Воробьев, Н. Н. О наименьшем задании бэровской формации / Н. Н. Воробьев, А. В. Чечуев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 3 (116). – С. 15–18.
37. Skiba, A. N. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups / A. N. Skiba, N. N. Vorob'ev // Southeast Asian Bull. Math. – 2013. – Vol. 37, № 5. – P. 771–780.

References

- Shemetkov L. A. *Formations of Finite Groups*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 272 p. (in Russian).
- Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of Algebraic Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 256 p. (in Russian).
- Skiba A. N. *Algebra of Formations*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 1997. 240 p. (in Russian).
- Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply \mathcal{L} -composite formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, no. 6, pp. 898–913. <https://doi.org/10.1007/BF02591784>
- Zhang Chi, Skiba A. N. On $\sum_i \sigma$ -closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2018, vol. 70, no. 12, pp. 1966–1977. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6>
- Zhang Chi, Safonov V. G., Skiba A. N. On n -multiply σ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875>
- Safonov V. G., Safonova, I. N., Skiba A. N. On Baer- σ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2020, vol. 48, no. 9, pp. 4002–4012. <https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1753760>
- Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
- Safonov V. G., Safonova, I. N., Skiba A. N. On one generalization of σ -local and Baer-local formations. *Problemy fiziki matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2019, no. 4 (41), pp. 65–69.
- Skiba A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups. *Journal of Algebra*, 2018, vol. 495, pp. 114–129. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.009>
- Skiba A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *Journal of Algebra*, 2020, vol. 550, pp. 69–85. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.12.013>
- Artamonov V. A., Salii V. N., Skorniyakov L. A., Shevrin L. N., Shul'geifer E. G. *General Algebra. Vol. 2*. Moscow, Nauka Publ., 1991. 480 p. (in Russian).
- Skiba A. N. On local formations of length 5. *Arifmeticheskoe i podgruppovoe stroenie konechnykh grupp: trudy Gomel'skogo seminar [Arithmetical and Subgroup Construction of Finite Groups. Works of Gomel Seminar]*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1986, pp. 135–149 (in Russian).
- Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 112–141.
- Vorob'ev N. N. *Algebra of Classes of Finite Groups*. Vitebsk, Vitebsk University Press, 2012. 322 p. (in Russian).
- Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A. On lattices of p -local formations of finite groups. *Mathematische Nachrichten*, 1997, vol. 186, pp. 57–65. <https://doi.org/10.1002/mana.3211860103>
- Safonov V. G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups. *Algebra Colloquium*, 2008, vol. 15, no. 1, pp. 119–128. <https://doi.org/10.1142/S1005386708000126>
- Safonov V. G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2007, vol. 35, no. 11, pp. 3495–3502. <https://doi.org/10.1080/00927870701509354>
- Shabalina I. P. On the lattice of τ -closed n -multiply ω -local formations of finite groups. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2003, no. 1, pp. 28–30 (in Russian).
- Shcherbina V. V., Safonov V. G. On sublattices of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. *Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics Physics*, 2019, vol. 51, no. 1, pp. 66–89. <https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-1-66-89>
- Shcherbina V. V., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics Physics*, 2019, vol. 51, no. 2, pp. 227–244 (in Russian). <https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244>
- Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. On lattices of formations of finite groups. *Algebra Colloquium*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 557–564. <https://doi.org/10.1142/S1005386710000532>
- Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. On laws of lattices of partially saturated formations. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2009, vol. 02, no. 01, pp. 155–169. <https://doi.org/10.1142/S1793557109000133>
- Tsarev A. A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups. *Ricerche di Matematica*, 2019, vol. 68, no. 2, pp. 693–698. <https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3>
- Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. Lattices of composition formations of finite groups and laws. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2018, vol. 17, no. 05, pp. 1850084-1–1850084-17. <https://doi.org/10.1142/S0219498818500846>
- Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. On a question of the theory of partially composition formations. *Algebra Colloquium*, 2014, vol. 21, no. 3, pp. 437–447. <https://doi.org/10.1142/S1005386714000388>
- Vorob'ev N. N., Skiba A. N., Tsarev A. A. Laws of the lattices of partially composition formations. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 5, pp. 802–812. <https://doi.org/10.1134/S0037446611050059>

28. Vorob'ev N. N., Tsarev A. A. On the modularity of the lattice of τ -closed n -multiply ω -composite formations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2010, vol. 62, no. 4, pp. 518–529. <https://doi.org/10.1007/s11253-010-0368-9>
29. Zhiznevsky P. A. On modularity and inductance of the lattice of all τ -closed n -multiply ω -composition formations of finite groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny = Proceedings of the Francisk Scorina Gomel State University*, 2010, no. 1 (58), pp. 185–191 (in Russian).
30. Tsarev A. A. Algebraic lattices of partially saturated formations of finite groups. *Afrika Matematika*, 2020, vol. 31, no. 3–4, pp. 701–707. <https://doi.org/10.1007/s13370-019-00753-5>
31. Safonov V. G. The property of being algebraic for the lattice of all τ -closed totally saturated formations. *Algebra and Logic*, 2006, vol. 45, no. 5, pp. 353–356. <https://doi.org/10.1007/s10469-006-0032-5>
32. Shabalina I. P. Algebraic lattices of τ -closed n -multiply ω -local formations. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny. Voprosy algebrы – 18 = Proceedings of the Francisk Scorina Gomel State University. Algebra Questions – 18*, 2002, no. 5 (14), pp. 59–67 (in Russian).
33. Shcherbina V. V. Algebraicity of lattice of τ -closed totally ω -saturated formations of finite groups. *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 82–90. <https://doi.org/10.13108/2020-12-1-82>
34. Tsarev A. A., Kukharev A. V. Algebraic lattices of solvably saturated formations and their applications. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 1003–1014. <https://doi.org/10.1007/s40590-020-00290-3>
35. Shcherbina V. V. On two problems of the theory of partially totally composition formations of finite groups. *Applied Mathematics & Physics*, 2020, vol. 52, no. 1, pp. 18–32 (in Russian). <https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32>
36. Vorob'ev N. N., Chachuyeu A. V. On the smallest definition of a Baer formation. *Vestnik Vitebskaya dzyarzhavnaya universiteta = Vestnik of Vitebsk State University*, 2022, no. 3 (116), pp. 15–18 (in Russian).
37. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. On the lattices of saturated and solvably saturated formations of finite groups. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2013, vol. 37, no. 5, pp. 771–780.

Інфармацыя аб аўторе

Воробьев Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики, Витебский государственный университет имени П. М. Машерова (Московский пр., 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: vornic2001@mail.ru

Information about the author

Nikolay N. Vorob'ev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor at the Department of Mathematics, Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moscow Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: vornic2001@mail.ru