УДК 517.514

В. С. МУХА

МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ: РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 10.04.2014)

Введение. В настоящее время достаточно хорошо разработана теория множественного (векторно-скалярного) регрессионного анализа, когда регрессия является скалярной функцией векторного аргумента [1, 2]. Теория многомерного (например, векторно-векторного) регрессионного анализа выглядит беднее. В работе [3] дана постановка задачи регрессионного анализа в условиях многомерно-матричных переменных и полиномиальной регрессии, получена система уравнений для отыскания оценок параметров многомерно-матричной эмпирической регрессии, найдены выражения оценок параметров линейной и квадратичной регрессии. Вместе с тем остаются не изученными распределения и свойства оценок параметров многомерно-матричной регрессии, что ограничивает возможности ее практического применения. В данной статье делается попытка устранить указанный пробел для линейной многомерно-матричной регрессии. Применяются обозначения работ [4, 5]. Обозначения (0,0)-свернутого умножения матриц и (0,0)-свернутой степени матрицы в случаях, не приводящих к усложнению восприятия, опускаются.

1. Оценки параметров полиномиальной многомерно-матричной регрессии. Рассмотрим некоторый объект в виде черного ящика с q-мерно-матричной входной переменной $x=(x_j)$, $j=(j_1, j_2,..., j_q)$, p-мерно-матричной выходной переменной $\eta=(\eta_i)$, $i=(i_1,i_2,...,i_p)$, индексы которых пробегают следующие множества значений: $j_1=\overline{1,m_1},...,\ j_q=\overline{1,m_q},\ i_1=\overline{1,n_1},...,\ i_p=\overline{1,n_p}$. Предположим, что выходная переменная η имеет стохастическую зависимость от входной переменной x, так что существует неизвестная нам условная плотность вероятности $f(\eta\,|\,x)$. Функцию регрессии η на x обозначим $y=\varphi(x)$ и предположим, что плотность вероятности $f(\eta\,|\,x)$ можно представить в виде

$$\eta=\varphi(x)+\xi,$$

где $\xi=(\xi_i)$, $i=(i_1,i_2,...,i_p)$, – p-мерная случайная матрица с нулевым математическим ожиданием. Пусть для некоторых значений $x_1=(x_{j,1})$, $x_2=(x_{j,2}),...,\ x_n=(x_{j,n})$ входной переменной x получены значения $y_{o,1}=(y_{o,i,1})$, $y_{o,2}=(y_{o,i,2}),...,\ y_{o,n}=(y_{o,i,n})$ выходной переменной η в виде

$$y_{o,\mu}=\varphi(x_\mu)+z_\mu,\ \mu=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где $z_\mu=(z_{i,\mu})$ – значения случайной матрицы $\xi=(\xi_i)$, которые назовем ошибками измерений, и требуется по измерениям $(x_1, y_{o,1}),(x_2, y_{o,2}),...,(x_n, y_{o,n})$ получить математическую модель объекта в виде эмпирической функции регрессии $\hat{y}=\hat{\varphi}(x)$.

Предположим, что гипотетическая функция регрессии $y = \varphi(x)$ представляет собой полином степени m переменной x,

$$y = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)} x^k) = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(x^k C_{(kq,p)}),\ m = 0,1,2,..., \tag{2}$$

где $C_{(p,kq)}$ – $(p+kq)$-мерные матрицы коэффициентов,

$$C_{(p,kq)} = (c_{i,j_1,...,j_k}) = (c_{i,\vec{j}_k}),\ i = (i_1, i_2, ..., i_p),\ \vec{j}_k = (j_1, j_2, ..., j_k),$$

симметричные относительно q-мультииндексов $j_1, j_2, ..., j_k$ и удовлетворяющие условиям

$$C_{(p,kq)} = (C_{(kq,p)})^{H_{p+kq,kq}},\ C_{(kq,p)} = (C_{(p,kq)})^{B_{p+kq,kq}}.$$

Здесь $H_{p+kq,kq}$ и $B_{p+kq,kq}$ – подстановки транспонирования типа «назад» и «вперед» соответственно [4]. Подстановка (2) в (1) дает нам математическую модель измерений в виде

$$y_{o,\mu} = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)} x_\mu^k) + z_\mu = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(x_\mu^k C_{(kq,p)}) + z_\mu,\ \mu = \overline{1,n},\ m = 0,1,2,... \tag{3}$$

В предположениях модели измерений (3) требуется по измерениям $(x_1, y_{o,1})$, $(x_2, y_{o,2})$,… $(x_n, y_{o,n})$ получить оценки $\hat{C}_{(p,0)}$, $\hat{C}_{(p,q)}$,..., $\hat{C}_{(p,mq)}$ неизвестных параметров $C_{(p,0)}$, $C_{(p,q)}$,..., $C_{(p,mq)}$ методом наименьших квадратов:

$$f = \sum_{\mu=1}^{n} {}^{0,p}(z_\mu z_\mu) \to \min_{C_{(p,0)}, C_{(p,q)},...,C_{(p,mq)}},$$

где

$$z_\mu = (z_{i,\mu}) = y_{o,\mu} - \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)} x_\mu^k) = y_{o,\mu} - \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(x_\mu^k C_{(kq,p)});$$

$$\mu = \overline{1,n},\ i = (i_1, i_2, ..., i_p).$$

Оценки параметров $C_{(p,0)}$, $C_{(p,q)}$,..., $C_{(p,mq)}$ определяются как решение следующей системы уравнений [3]:

$$\sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)} s_{x^{k+\lambda}}) = s_{yx^\lambda},\ \lambda = \overline{0,m}, \tag{4}$$

где

$$s_{yx^\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} y_{o,\mu} x_\mu^\lambda,\ \lambda = \overline{0,m};$$

$$s_{x^{k+\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^k x_\mu^\lambda = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^{k+\lambda},\ s_{x^\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^\lambda,\ \lambda = \overline{0,m}.$$

Данную задачу целесообразно модифицировать по сравнению с работой [3]. Для этого будем решать систему уравнений (4) методом исключения Гаусса. При этом оценка $\hat{C}_{(p,0q)}$ определяется на последнем шаге обратного хода метода Гаусса, т. е. из первого уравнения системы (4), и имеет вид

$$\hat{C}_{(p,0q)} = s_y - \sum_{k=1}^{m} {}^{0,kq}(\hat{C}_{(p,kq)} s_{x^k}). \tag{5}$$

Представляя эмпирическую функцию регрессии в виде

$$\hat{y} = \hat{\varphi}(x) = \hat{C}_{(p,0q)} + \sum_{k=1}^{m} {}^{0,kq}(\hat{C}_{(p,kq)} x^k) = \sum_{k=1}^{m} {}^{0,kq}(x^k \hat{C}_{(kq,p)}) + \hat{C}_{(0q,p)},\ m = 0,1,2,...,$$

и подставляя сюда выражение (5) для $\hat{C}_{(p,0q)}$, получим для эмпирической функции регрессии выражение

$$\hat{y} = \hat{C}_{(p,0q)} + \sum_{k=1}^{m} {}^{0,kq}(\hat{C}_{(p,kq)}(x^k - s_{x^k})) = \sum_{k=1}^{m} {}^{0,kq}((x^k - s_{x^k})\hat{C}_{(kq,p)}) + \hat{C}_{(0q,p)},$$

где $\hat{C}_{(p,0q)}$ отличается от (5) и имеет вид

$$\hat{C}_{(p,0q)} = s_y = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} y_{o,\mu}. \tag{6}$$

В связи с этим мы можем изначально вместо гипотетической функции регрессии (2) выбрать функцию вида

$$y = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)}\tilde{x}^k) = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(\tilde{x}^k C_{(kq,p)}),$$

где $\tilde{x}^k = x^k - s_{x^k}$, и вместо модели измерений (3) рассматривать модель

$$y_{o,\mu} = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)}\tilde{x}_\mu^k) + z_\mu = \sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(\tilde{x}_\mu^k C_{(kq,p)}) + z_\mu,\ \mu = \overline{0,n},\ m = 0,1,2,\dots. \tag{7}$$

Оценки параметров модели (7) будут определяться системой уравнений

$$\sum_{k=0}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)} s_{\tilde{x}^{k+\lambda}}) = s_{y\tilde{x}^\lambda},\ \lambda = \overline{0,m}; \tag{8}$$

где

$$s_{y\tilde{x}^\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} y_{o,\mu}\tilde{x}_\mu^\lambda = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} y_{o,\mu}(x_\mu^\lambda - s_{x^\lambda}) = s_{yx^\lambda} - s_y s_{x^\lambda},\ \lambda = \overline{0,m},$$

$$s_{\tilde{x}^{k+\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} \tilde{x}_\mu^k \tilde{x}_\mu^\lambda = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(x_\mu^k - s_{x^k})(x_\mu^\lambda - s_{x^\lambda}) = s_{x^{k+\lambda}} - s_{x^k}s_{x^\lambda},\ k,\lambda = \overline{0,m}.$$

Анализ последнего выражения показывает, что матрицы $s_{\tilde{x}^{k+\lambda}}$ удовлетворяют условию

$$s_{\tilde{x}^{k+\lambda}} = \begin{cases} 1, & k = 0,\ \lambda = 0; \\ 0, & k = 0,\ \lambda \neq 0; \\ 0 & k \neq 0,\ \lambda = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Это значит, что первое уравнение системы уравнений (8) имеет вид $C_{(p,0q)} = s_y$ и дает оценку (6), а первый столбец остальных уравнений равен нулю. В таком случае оценки параметров $C_{(p,kq)}$ модели измерений (7) при $k > 0$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} {}^{0,kq}(C_{(p,kq)} s_{\tilde{x}^{k+\lambda}}) = s_{y\tilde{x}^\lambda},\ \lambda = \overline{1,m}. \tag{10}$$

В данной работе мы будем исходить из модели измерений (7) и системы уравнений (10) для ее параметров с учетом оценки (6).

2. Линейная многомерно-матричная регрессия. Оценки параметров, их распределения и свойства. Ограничимся в модели измерений (7) двумя слагаемыми, т. е. будем рассматривать модель измерений вида

$$y_{o,\mu} = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) + z_\mu = C_{(0q,p)} + {}^{0,q}(\tilde{x}_\mu C_{(q,p)}) + z_\mu\,,\ \mu = \overline{1,n}, \tag{11}$$

где $\tilde{x}_\mu = x_\mu - s_x$, $C_{(p,0q)} = C_{(0q,p)}$, $C_{(q,p)} = (C_{(p,q)})^{B_{p+q,q}}$. Гипотетическая функция регрессии в модели измерений (11) имеет вид

$$y = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) = C_{(0q,p)} + {}^{0,q}(\tilde{x}_\mu C_{(q,p)})\,. \tag{12}$$

Система уравнений (10) для модели измерений (11) состоит из одного уравнения

$${}^{0,q}(C_{(p,q,)}s_{\tilde{x}^2}) = s_{y\tilde{x}}\,,$$

из которого следует оценка $\hat{C}_{(p,q)}$ параметра $C_{(p,q)}$:

$$\hat{C}_{(p,q)} = {}^{0,q}(s_{y\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1})\,; \tag{13}$$

где

$$s_{y\tilde{x}} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} y_{o,\mu}\tilde{x}_\mu\,,\ s_{\tilde{x}}2 = s_{\tilde{x}^{1+1}} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\tilde{x}_\mu^2, \tag{14}$$

и $(s_{\tilde{x}^2})^{-1}$ – матрица, $(0,q)$-обратная к матрице $s_{\tilde{x}^2}$. Оценка параметра $C_{(p,0q)}$ имеет вид (6).

Относительно оценок параметров линейной модели (11) справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если матрицы ошибок измерений* z_μ *в модели измерений* (11) *имеют математическое ожидание* $E(z_\mu) = 0$, *дисперсионную матрицу* $D(z_\mu) = D(\xi) = \sigma^2 E(0,p)$, *где* $E(0,p)$ – $(0,p)$*-единичная* $(n_1 \times \cdots \times n_p \times n_1 \times \cdots \times n_p)$*-матрица, и независимы по* μ, *то математические ожидания оценок* $\hat{C}_{(p,q)}$ *и* $\hat{C}_{(p,0q)}$ *определяются выражениями*

$$E(\hat{C}_{(p,q)}) = C_{(p,q)}; \tag{15}$$

$$E(\hat{C}_{(p,0q)}) = C_{(p,0q)}\,, \tag{16}$$

а их ковариационные и дисперсионные матрицы – выражениями

$$\operatorname{cov}(\hat{C}_{(q,p)}, \hat{C}_{(p,q)}) = \frac{\sigma^2}{n} D^{(2)},\ \ D^{(2)} = (d^{(2)}_{j,i,i',j'}) = \begin{cases} (s_{\tilde{x}}2)^{-1}, & i = i'; \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases} \tag{17}$$

$$D(\hat{C}_{(p,q)}) = \frac{\sigma^2}{n} D^{(1)},\ \ D^{(1)} = (d^{(1)}_{i,j,i',j'}) = (D^{(2)})^{(H_{p+q,q}, E_{p+q})}; \tag{18}$$

$$D(\hat{C}_{(p,0q)}) = \operatorname{cov}(\hat{C}_{(p,0q)}, \hat{C}_{(p,0q)}) = D^{(0)} = (d^{(0)}_{i,i'}) = \frac{\sigma^2}{n} E(0,p); \tag{19}$$

$$\operatorname{cov}(\hat{C}_{(0q,p)}, \hat{C}_{(p,q)}) = 0\,; \tag{20}$$

$$i = (i_1, i_2, \ldots, i_p)\,,\ i' = (i'_1, i'_2, \ldots, i'_p)\,,\ j = (j_1, j_2, \ldots, j_q)\,,\ j' = (j'_1, j'_2, \ldots, j'_q)\,.$$

Если, кроме того, ошибки измерений z_μ *нормально распределены, то оценки* $\hat{C}_{(p,q)}$, $\hat{C}_{(p,0q)}$ *также нормально распределены с математическими ожиданиями* (15), (16) *и дисперсионными матрицами* (18), (19) *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с доказательства равенства (15). Подставляя (14) в (13), получим

$$\widehat{C}_{(p,q)} = {}^{0,q}(s_{y\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}) = {}^{0,q}\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(y_{o,\mu}\tilde{x}_{\mu})(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right). \tag{21}$$

Подставляя теперь $y_{o,\mu}$ (11) в (21), будем иметь

$$\widehat{C}_{(p,q)} = {}^{0,q}\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}{}^{0,0}\left(\left(C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_{\mu}) + z_{\mu}\right)\tilde{x}_{\mu}\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) =$$

$$= {}^{0,q}\left({}^{0,0}(C_{(p,0q)}s_{\tilde{x}})(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) + {}^{0,q}\left(C_{(p,q)}\,{}^{0,q}\left(s_{\tilde{x}^2}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right)\right) + {}^{0,q}\left(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right),$$

где

$$s_{z\tilde{x}} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(z_{\mu}\tilde{x}_{\mu}).$$

Учитывая, что, в соответствии с (9), $s_{\tilde{x}} = 0$, получим

$$\widehat{C}_{(p,q)} = C_{(p,q)} + {}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}). \tag{22}$$

Взяв математическое ожидание от левой и правой частей данного равенства, будем иметь $E(\widehat{C}_{(p,q)}) = C_{(p,q)}$ в силу того, что $E(z_{\mu}) = 0$, $E(s_{z\tilde{x}}) = 0$. Равенство (15) доказано.

На основании выражений (22) и (15) получим выражение центрированной оценки:

$$\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)} = \widehat{C}_{(p,q)} - E(\widehat{C}_{(p,q)}) = {}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}). \tag{23}$$

Для доказательства равенства (16) рассмотрим оценку $\widehat{C}_{(p,0q)}$ (6), подставив в нее $y_{o,\mu}$ из (11). Получим

$$\widehat{C}_{(p,0q)} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}y_{o,\mu} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_{\mu}) + z_{\mu}) = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}s_{\tilde{x}}) + s_{z},$$

где $s_z = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} z_{\mu}$. В силу условия (9) и того, что $E(s_z) = 0$, будем иметь

$$\widehat{C}_{(p,0q)} = C_{(p,0q)} + s_z,\ E(\widehat{C}_{(p,0q)}) = C_{(p,0q)}.$$

Равенство (16) доказано.

Из последних двух равенств следует выражение центрированной оценки:

$$\mathring{\widehat{C}}_{(p,0q)} = \widehat{C}_{(p,0q)} - E(\widehat{C}_{(p,0q)}) = s_z. \tag{24}$$

Для ковариационной матрицы оценки $\widehat{C}_{(p,q)}$ с учетом выражения (23) получим:

$$\operatorname{cov}(\widehat{C}_{(q,p)}, \widehat{C}_{(p,q)}) = E({}^{0,0}(\mathring{\widehat{C}}_{(q,p)}\,\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)})) = E({}^{0,0}({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}s_{\tilde{x}z})\,{}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}))) =$$

$$= {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\,{}^{0,q}(E({}^{0,0}(s_{\tilde{x}z}s_{z\tilde{x}}))(s_{\tilde{x}^2})^{-1})). \tag{25}$$

Найдем $E({}^{0,0}(s_{\tilde{x}z}s_{z\tilde{x}}))$.

$$E\left({}^{0,0}(s_{\tilde{x}z}s_{z\tilde{x}})\right) = E\left({}^{0,0}\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\tilde{x}_{\mu}z_{\mu}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}z_{l}\tilde{x}_{l}\right)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}{}^{0,0}\left(\tilde{x}_{\mu}\,{}^{0,0}\left(E\left({}^{0,0}(z_{\mu}z_{l})\right)\tilde{x}_{l}\right)\right).$$

В силу независимости z_μ по μ имеем $E({}^{0,0}(z_\mu z_l)) = 0$ при $\mu \neq l$ и $E({}^{0,0}(z_l z_l)) = D(\xi)$. Тогда

$$E({}^{0,0}(s_{\tilde{x}z} s_{z\tilde{x}})) = \frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n} {}^{0,0}(\tilde{x}_\mu {}^{0,0}(D(\xi)\tilde{x}_\mu)) = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n} {}^{0,0}(\tilde{x}_\mu {}^{0,0}(E(0,p)\tilde{x}_\mu)) = \frac{\sigma^2}{n} D^*,$$

где D^* – $(q+2p+q)$-мерная диагональная относительно внутренних p-мультииндексов матрица с диагональными элементами $s_{\tilde{x}^2}$. Подставляя это выражение в (25), получим

$$\operatorname{cov}(\widehat{C}_{(q,p)}, \widehat{C}_{(p,q)}) = \frac{\sigma^2}{n} {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\, {}^{0,q}(D^*(s_{\tilde{x}^2})^{-1})) = \frac{\sigma^2}{n} D^{(2)},$$

где $D^{(2)}$ – $(q+2p+q)$-мерная диагональная относительно внутренних p-мультииндексов матрица с диагональными элементами $(s_{\tilde{x}^2})^{-1}$. Утверждение (17) доказано.

Далее, поскольку $C_{(q,p)} = (C_{(p,q)})^{B_{p+q,q}}$, $(C_{(q,p)})^{H_{p+q,q}} = C_{(p,q)}$, то

$$D(\widehat{C}_{(p,q)}) = E(\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)}\, \mathring{\widehat{C}}_{(p,q)}) = E\left((\mathring{\widehat{C}}_{(q,p)}\, \mathring{\widehat{C}}_{(p,q)})^{(H_{p+q,q}, E_{p+q})}\right) = \frac{\sigma^2}{n}(D^{(2)})^{(H_{p+q,q}, E_{p+q})},$$

т. е. выполняется утверждение (18).

Для доказательства утверждения (19) воспользуемся выражением (24):

$$E(\mathring{\widehat{C}}_{(0q,p)}\, \mathring{\widehat{C}}_{(p,0q)}) = E(s_z s_z) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} z_l\right) = E\left(\frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(z_\mu z_l)\right) = \frac{1}{n}D(\xi) = \frac{\sigma^2}{n}E(0,p).$$

Утверждение (20) доказывается на основе равенств (23), (24):

$$\operatorname{cov}(\widehat{C}_{(0q,p)}, \widehat{C}_{(p,q)}) = E(\mathring{\widehat{C}}_{(0q,p)}\, \mathring{\widehat{C}}_{(p,q)}) = E(s_z\, {}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1})) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu\, {}^{0,q}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} z_l \tilde{x}_l\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right)\right) =$$

$$= E\left({}^{0,q}\left(\left(\frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} z_\mu z_l \tilde{x}_l\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right)\right) = {}^{0,q}\left(\left(\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{l=1}^{n} E(0,p)\tilde{x}_l\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) = {}^{0,q}\left(\left(\frac{\sigma^2}{n}E(0,p)s_{\tilde{x}}\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) = 0$$

в силу условия (9).

Нормальность распределений оценок $\widehat{C}_{(p,q)}$, $\widehat{C}_{(p,0q)}$ следует из того, что они являются линейными функциями нормально распределенных случайных матриц $s_{z\tilde{x}}$ и z_μ. Теорема 1 доказана.

В задачах регрессионного анализа дисперсия ошибок измерений σ^2 чаще всего неизвестна, и по результатам измерений требуется получить ее оценку $\widehat{\sigma}^2$. Обратимся к вопросам получения этой оценки и анализа ее свойств.

В качестве оценки $\widehat{D}_\xi$ дисперсионной матрицы $D_\xi = D(\xi)$ естественно использовать выражение

$$\widehat{D}_\xi = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} {}^{0,0}(y_{o,\mu} - \widehat{y}_\mu)^2, \tag{26}$$

где $y_{o,\mu} = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) + z_\mu$, $\widehat{y}_\mu = \widehat{C}_{(p,0q)} + {}^{0,q}(\widehat{C}_{(p,q)}\tilde{x}_\mu)$. Поскольку $D(\xi) = \sigma^2 E(0,p)$, $trD(\xi) = \sigma^2 trE(0,p)$, $trE(0,p) = \prod_{i=1}^{p} n_i$, то оценкой параметра σ^2 может служить статистика

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n \cdot trE(0,p)} tr\left(\sum_{\mu=1}^{n} (y_{o,\mu} - \widehat{y}_\mu)^2 \right). \tag{27}$$

Т е о р е м а 2. *В условиях теоремы* 1 *(кроме условия нормальности ошибок измерений) оценка* $\widehat{\sigma}^2$ (27) *параметра* σ^2 *является асимптотически несмещенной, а оценка*

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{n\widehat{\sigma}^2}{n-1-tr(E(0,q)} = \frac{1}{trE(0,p)(n-1-trE(0,q))} tr\left(\sum_{\mu=1}^{n} {}^{0,0} (y_{o,\mu} - \widehat{y}_\mu)^2 \right) \tag{28}$$

– несмещенной. Если, кроме того, ошибки измерений z_μ *распределены по нормальному закону, то статистика*

$$v = \frac{n\, trE(0,p)\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{n\, trE(0,p)(n-1-trE(0,q))\widehat{\sigma}_1^2}{\sigma^2} \tag{29}$$

имеет распределение хи-квадрат с $trE(0,p)(n-1-trE(0,q))$ *степенями свободы, где* $trE(0,p) = \prod_{i=1}^{p} n_i$, $trE(0,q) = \prod_{j=1}^{q} m_j$. *Оценки* $\widehat{\sigma}^2$ *из* (27), $\widehat{C}_{(p,0q)}$ *из* (6) *и* $\widehat{C}_{(p,q)}$ *из* (13) *попарно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычитая и прибавляя в скобках в (26) $E(y_{o,\mu}) = C_{(p,0q)} +^{0,q} (C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu)$, получим

$$\widehat{D}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} {}^{0,0}((y_{o,\mu} - E(y_{o,\mu})) - (\widehat{y}_\mu - E(y_{o,\mu})))^2 = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} {}^{0,0}(z_\mu - \mathring{\widehat{C}}_{(p,0q)} -^{0,q} (\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)}\, \tilde{x}_\mu))^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(z_\mu z_\mu) + \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(\mathring{\widehat{C}}_{(p,0q)}\, \mathring{\widehat{C}}_{(0q,p)}) + \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}({}^{0,q}(\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)}\, \tilde{x}_\mu)^{0,q}(\tilde{x}_\mu\, \mathring{\widehat{C}}_{(q,p)})) -$$

$$- \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(z_\mu\, \mathring{\widehat{C}}_{(0q,p)}) - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(z_\mu{}^{0,q}(\tilde{x}_\mu\, \mathring{\widehat{C}}_{(q,p)})) - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(\mathring{\widehat{C}}_{(p,0q)}\, z_\mu) - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}(\mathring{\widehat{C}}_{(p,0q)}\ {}^{0,q}(\tilde{x}_\mu\, \mathring{\widehat{C}}_{(q,p)})) -$$

$$- \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}({}^{0,q}(\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)}\, \tilde{x}_\mu) z_\mu) - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}({}^{0,q}(\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)}\, \tilde{x}_\mu)\mathring{\widehat{C}}_{(0q,p)}). \tag{30}$$

Так как

$$\mathring{\widehat{C}}_{(p,0q)} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} z_l; \tag{31}$$

$$\mathring{\widehat{C}}_{(p,q)} = {}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}) = {}^{0,q}\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(z_l\tilde{x}_l)(s_{\tilde{x}^2})^{-1} \right);$$

$$\mathring{\widehat{C}}_{(q,p)} = {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} s_{\tilde{x}z}) = {}^{0,q}\left((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(\tilde{x}_l z_l) \right), \tag{32}$$

то после подстановки этих выражений в (30) и учета выражения (9) получим:

$$\widehat{D}_\xi = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} z_\mu f_{\mu,l} z_\mu - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} z_\mu g_{\mu,l} z_l - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} z_\mu h_{\mu,l} z_l =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} z_\mu f_{\mu,l} z_\mu - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} z_\mu w_{\mu,l} z_l, \tag{33}$$

где

$$F = (f_{\mu,l}) = (\delta_{\mu,l}) = E(0,1);$$

$$G = (g_{\mu,l}) = \left(\left(\frac{1}{n} \right)_{\mu,l} \right) = \frac{1}{n} E(2,0);$$

$$H = (h_{\mu,l}) = \left(\frac{1}{n} {}^{0,q}\!\left(\tilde{x}_\mu {}^{0,q} \left((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_l \right) \right) \right);$$

$$W = (w_{\mu,l}) = (g_{\mu,l} + h_{\mu,l}) = G + H,$$

$E(0,1)$, $E(2,0)$ – $(0,1)$- и $(2,0)$-единичные матрицы n-го порядка соответственно, $\delta_{\mu,l}$ – символ Кронекера. Можно показать, что матрицы F, G и H идемпотентные. Нам понадобятся их ранги. Ранг идемпотентной матрицы равен ее следу [1]. Для матрицы H получим:

$$rH = trH = \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ({}^{0,q} (\tilde{x}_i {}^{0,q} ((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_i))) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {}^{0,2q} ((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_i^2) = {}^{0,2q} ((s_{\tilde{x}^2})^{-1} s_{\tilde{x}^2}).$$

Обозначив $\mathring{s}_{x^2} = S = (s_{i,j})$, $(\mathring{s}_{x^2})^{-1} = S^{-1} = (s^{i,j})$, i, j – q-мультииндексы, будем иметь

$$rH = trH = {}^{0,2q} ((s_{\tilde{x}^2})^{-1} s_{\tilde{x}^2}) = {}^{0,2q} (S^{-1} S) = \sum_{i,j} s^{i,j} s_{i,j} = \sum_i \sum_j s^{i,j} s_{j,i} = \sum_i e_{i,i},$$

где $e_{i,i}$ – диагональные элементы матрицы $E(0,q)$. В итоге получим $rH = trH = trE(0,q)$. Имеем также: $rG = trG = 1$, $rW = trW = tr(G + H) = 1 + trE(0,q)$.

Найдем теперь $tr\widehat{D}_\xi$. Используя выражение (33), получим

$$tr\widehat{D}_\xi = \sum_i \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} {}^{0,0}(z_{i,\mu} {}^{0,0}(\delta_{\mu,l} - w_{\mu,l} z_{i,l})) = \sum_i a_i, \qquad (34)$$

где

$$a_i = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} {}^{0,0}(z_{i,\mu} {}^{0,0}(\delta_{\mu,l} - w_{\mu,l} z_{i,l})), \qquad (35)$$

и p-мультииндекс $i = (i_1, i_2, ..., i_p)$ пробегает $trE(0,p)$ значений. Отдельное слагаемое a_i (35) в выражении (34) является квадратичной формой переменных $z_{i,1}$, $z_{i,2}$, ..., $z_{i,n}$ с идемпотентной матрицей $F + W$, имеющей ранг и след $r(F + W) = tr(F + W) = n - 1 - trE(0,q)$. В таком случае случайная величина na_i / σ^2 имеет распределение хи-квадрат с $n - 1 - trE(0,q)$ степенями свободы [1], а случайная величина

$$v = \frac{n\, tr\widehat{D}_\xi}{\sigma^2} = \frac{n\, trE(0,p) \widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

– распределение хи-квадрат с $trE(0,p)(n - 1 - trE(0,q))$ степенями свободы.

Поскольку математическое ожидание случайной величины v, имеющей распределение хи-квадрат, равно числу степеней свободы этого распределения, то

$$E(v) = E\left(\frac{n \widehat{\sigma}^2\, trE(0,p)}{\sigma^2} \right) = trE(0,p)(n - 1 - trE(0,q)),$$

откуда

$$E(\widehat{\sigma}^2)=\frac{\sigma^2 trE(0,p)(n-1-trE(0,q))}{n\,trE(0,p)}=\frac{\sigma^2(n-1-trE(0,q))}{n}=\sigma^2-\frac{\sigma^2(1+trE(0,q))}{n}.$$

Мы видим, что оценка $\widehat{\sigma}^2$ (27) смещенная, но асимптотически несмещенная. Оценка (28), очевидно, является несмещенной.

Докажем утверждения теоремы о независимости. Независимость оценок $\widehat{C}_{(p,0q)}$ из (6) и $\widehat{C}_{(p,q)}$ из (13) следует из их некоррелированности и нормальности (теорема 1). Далее, на основании (33), (34), (35) случайная величина

$$na_i=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}{}^{0,0}(z_{i,\mu}{}^{0,0}(\delta_{\mu,l}-g_{\mu,l}-h_{\mu,l})z_{i,l})={}^{0,1}(z_i{}^{0,1}((F-G-H)z_i))$$

является квадратичной формой переменных $z_{i,1},z_{i,2},\ldots,z_{i,n}$ с матрицей $F-G-H$, а элементы статистик $n\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,0q)}$, $n\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,q)}$, в соответствии с (31), (32), имеют вид $c_{0,i}=\sum_{\mu=1}^{n}z_{i,\mu}={}^{0,1}(B_0z_i)$, $c_{1,i}=\sum_{\mu=1}^{n}{}^{0,0}({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_\mu)z_{i,\mu})={}^{0,1}(B_1z_i)$ соответственно и являются линейными формами тех же переменных $z_{i,1},z_{i,2},\ldots,z_{i,n}$ с матрицами $B_0=(b_{0,\mu})$, $B_1=(b_{1,\mu})$, $b_{0,\mu}=1$, $b_{1,\mu}={}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_\mu)$. Для независимости линейных форм ${}^{0,1}(B_0z_i)$ и ${}^{0,1}(B_1z_i)$ от квадратичной формы ${}^{0,1}(z_i{}^{0,1}((F-G-H)z_i))$ достаточно выполнения условий [1]:

$${}^{0,1}(B_0(F-G-H))=0,\ {}^{0,1}(B_1(F-G-H))=0. \tag{36}$$

В нашем случае имеем

$${}^{0,1}(B_0F)=\left(\sum_{\mu=1}^{n}b_{0,\mu}f_{\mu,l}\right)=\left(\sum_{\mu=1}^{n}\delta_{\mu,l}\right)=1;$$

$$-{}^{0,1}(B_0G)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}b_{0,\mu}g_{\mu,l}\right)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{n}\right)=-1;$$

$$-{}^{0,1}(B_0H)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}b_{0,\mu}h_{\mu,l}\right)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}h_{\mu,l}\right)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{n}{}^{0,q}(\tilde{x}_\mu{}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_l))\right)=0,$$

так что первое из равенств (36) выполняется. Далее,

$${}^{0,1}(B_1F)=\left(\sum_{\mu=1}^{n}b_{1,\mu}f_{\mu,l}\right)=\left(\sum_{\mu=1}^{n}{}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_\mu)\delta_{\mu,l}\right)=\left({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_l)\right);$$

$$-{}^{0,1}(B_1G)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}b_{1,\mu}g_{\mu,l}\right)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}{}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_\mu)\frac{1}{n}\right)=0;$$

$$-{}^{0,1}(B_1H)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}b_{1,\mu}h_{\mu,l}\right)=-\left(\sum_{\mu=1}^{n}{}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_\mu)\frac{1}{n}{}^{0,q}(\tilde{x}_\mu{}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_l))\right)=-({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}\tilde{x}_l)).$$

Мы видим, что и второе из равенств (36) выполняется. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь некоторые статистики, связанные с полученными оценками параметров. Для этого введем более простые обозначения: $C^{(0)}=(c_i^{(0)})=C_{(p,0q)}$, $\widehat{C}^{(0)}=(\widehat{c}_i^{(0)})=\widehat{C}_{(p,0q)}$, $C^{(1)}=(c_{i,j}^{(1)})=C_{(p,q)}$, $\widehat{C}^{(1)}=(\widehat{c}_{i,j}^{(1)})=\widehat{C}_{(p,q)}$, $i=(i_1,i_2,\ldots,i_p)$, $j=(j_1,j_2,\ldots,j_q)$. На основании результатов теорем 1 и 2 можно сделать вывод, что статистики

$$u_i^{(0)} = \frac{\hat{c}_i^{(0)} - c_i^{(0)}}{\sigma\sqrt{d_{i,i}^{(0)}}}\sqrt{n}\,,\ u_{i,j}^{(1)} = \frac{\hat{c}_{i,j}^{(1)} - c_{i,j}^{(1)}}{\sigma\sqrt{d_{i,j,i,j}^{(1)}}}\sqrt{n},\ \ i = (i_1, i_2, ..., i_p)\,,\ \ j = (j_1, j_2, ..., j_q)\,, \tag{37}$$

распределены по нормальному закону $N(0,1)$, а статистики

$$t_i^{(0)} = \frac{\hat{c}_i^{(0)} - c_i^{(0)}}{\hat{\sigma}_1\sqrt{d_{i,i}^{(0)}}},\ t_{i,j}^{(1)} = \frac{\hat{c}_{i,j}^{(1)} - c_{i,j}^{(1)}}{\hat{\sigma}_1\sqrt{d_{i,j,i,j}^{(1)}}},\ \ i = (i_1, i_2, ..., i_p)\,,\ \ j = (j_1, j_2, ..., j_q)\,, \tag{38}$$

имеют распределение Стьюдента с $trE(0,p)tr(E(0,1)-1-E(0,q))$ степенями свободы.

Рассмотрим также статистики, связанные с оценкой отклика

$$\hat{y} = (\hat{y}_i) = \hat{C}_{(p,0q)} +^{0,q} (\hat{C}_{(p,q)}\tilde{x})\,,\ \ i = (i_1, i_2, ..., i_p)\,.$$

Ее математическое ожидание имеет вид

$$E(\hat{y}) = a^{(y)} = (a_i^{(y)}) = C_{(p,0q)} +^{0,q} (C_{(p,q)}\tilde{x})\,,\ \ i = (i_1, i_2, ..., i_p)\,,$$

т. е. оценка $\hat{y}$ несмещенная. Поскольку

$$\hat{y} - E(\hat{y}) = \mathring{\hat{y}} = \mathring{\hat{C}}_{(p,0q)} +^{0,q} (\mathring{\hat{C}}_{(p,q)}\,\tilde{x})\,,$$

то дисперсионная матрица оценки отклика определяется выражением

$$D(\hat{y}) = E({}^{0,0}(\mathring{\hat{y}})^2) = E({}^{0,0}((\mathring{\hat{C}}_{(0q,p)} + {}^{0,q}(\tilde{x}\,\mathring{\hat{C}}_{(q,p)}))(\mathring{\hat{C}}_{(p,0q)} + {}^{0,q}(\mathring{\hat{C}}_{(p,q)}\,\tilde{x})))).$$

С учетом некоррелированности оценок $\mathring{\hat{C}}_{(p,0q)}$ и $\mathring{\hat{C}}_{(p,q)}$ получим

$$D(\hat{y}) = E({}^{0,0}(\mathring{\hat{C}}_{(0q,p)}\,\mathring{\hat{C}}_{(p,0q)})) + E({}^{0,0}({}^{0,q}(\tilde{x}\,\mathring{\hat{C}}_{(q,p)})\,{}^{0,q}(\mathring{\hat{C}}_{(p,q)}\,\tilde{x}))),$$

а с учетом (17), (19) будем иметь

$$D(\hat{y}) = \frac{\sigma^2}{n}(E(0,p) + {}^{0,q}(\tilde{x}\,{}^{0,q}(D^{(2)}\tilde{x}))) = \frac{\sigma^2}{n}D^{(y)} = \frac{\sigma^2}{n}(d_{i,i'}^{(y)}),\ i = (i_1, i_2, ..., i_p)\,,\ i' = (i_1', i_2', ..., i_p')\,,$$

где $D^{(y)} = (d_{i,i'}^{(y)}) = E(0,p) + {}^{0,q}(\tilde{x}\,{}^{0,q}(D^{(2)}\tilde{x}))$. В силу линейной зависимости $\hat{y}$ от оценок $\mathring{\hat{C}}_{(p,0q)}$ и $\mathring{\hat{C}}_{(p,q)}$, имеющих нормальные распределения, оценка $\hat{y}$ распределена по нормальному закону со средним значением $a^{(y)} = (a_i^{(y)})$ и дисперсионной матрицей $D^{(y)} = (d_{i,i'}^{(y)})$. Нормированные статистики

$$u_i^{(y)} = \frac{\hat{y}_i - a_i^{(y)}}{\sigma\sqrt{d_{i,i}^{(y)}}}\sqrt{n}\,,\ i = (i_1, i_2, ..., i_p)\,, \tag{39}$$

распределены по нормальному закону $N(0,1)$. В силу независимости $\mathring{\hat{C}}_{(p,0q)}$ и $\mathring{\hat{C}}_{(p,q)}$ от $\hat{\sigma}^2$ статистики $\hat{y}$ и $u_i^{(y)}$ также независимы от $\hat{\sigma}^2$. Тогда статистики

$$t_i^{(y)} = \frac{\hat{y}_i - a_i^{(y)}}{\hat{\sigma}_1\sqrt{d_{i,i}^{(y)}}},\ i = (i_1, i_2, ..., i_p) \tag{40}$$

имеют распределение Стьюдента с $trE(0,p)(n-1-trE(0,q))$ степенями свободы.

Выполним дополнительно k измерений $y_{\partial,1}, y_{\partial,2}, ..., y_{\partial,k}$ в некоторой точке x. По этим измерениям можно получить независимую оценку $\widehat{\sigma}^2_{\partial,0}$ параметра σ^2, введенного в теореме 1, по формуле

$$\widehat{\sigma}^2_{\partial,0} = \frac{1}{trE(0,p)(k-1)} tr\left(\sum_{\mu=1}^{k} {}^{0,0}(y_{\partial,\mu} - \widehat{y}_\partial)^2\right),$$

где

$$\widehat{y}_\partial = \frac{1}{k}\sum_{\mu=1}^{k} y_{\partial,\mu}.$$

Можно показать, что оценка $\widehat{\sigma}^2_{\partial,0}$ является несмещенной, а статистика

$$w = \frac{(k-1)\, trE(0,p)\widehat{\sigma}^2_{\partial,0}}{\sigma^2} \tag{41}$$

имеет распределение хи-квадрат с $(k-1)trE(0,p)$ степенями свободы. В силу независимости статистик v и w статистика

$$F = \frac{\widehat{\sigma}^2_1}{\widehat{\sigma}^2_{\partial,0}} \tag{42}$$

имеет распределение Фишера с $trE(0,p)(n-1-trE(0,q))$, $trE(0,p)(k-1)$ степенями свободы.

Заключение. Полученные выше статистики (29), (37), (38)–(41) и их распределения позволяют строить доверительные интервалы и проверять гипотезы для параметров многомерно-матричной линейной эмпирической регрессии, а статистика (42) – проверять гипотезу об адекватности принятой математической модели, аналогично тому, как это делается в классическом множественном регрессионном анализе [1–3].

Следует отметить, что линейная модель регрессии данной статьи имеет иную форму представления по сравнению с классической множественной линейной регрессией. Последняя представляется посредством одного векторного параметра, в то время как линейная регрессия в данной работе представлена посредством двух многомерно-матричных параметров.

Полученные в работе результаты для случая линейной по параметрам и входной переменной x регрессии могут быть применены для нелинейной по входной переменной регрессии. Для этого многомерно-матричную переменную x следует заменить функцией $x = x(v)$ новой входной многомерно-матричной переменной v.

Литература

1. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение. М., 1968.
2. *Вучков И. Н., Бояджиева Л., Солаков Е.* Прикладной линейный регрессионный анализ. М., 1987.
3. *Муха В. С.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 45–51.
4. *Муха В. С.* Анализ многомерных данных. Минск, 2004.
5. *Соколов Н. П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев, 1972.

V. S. MUKHA

MULTIDIMENSIONAL-MATRIX LINEAR REGRESSION ANALYSIS: DISTRIBUTIONS AND PROPERTIES OF THE PARAMETERS

Summary

The distributions and properties of the estimations of the parameters of the multidimensional-matrix linear empirical regression are obtained.