

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 517.988.8+517.587  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-18-36>

Поступила в редакцию 25.10.2022  
 Received 25.10.2022

**Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский**

*Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь*

## О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

**Аннотация.** Разработан численно-аналитический метод построения экстремальных в чебышевской норме полиномов, заданных на квадрате комплексной плоскости. Такие полиномы являются естественным обобщением классических полиномов Чебышева первого рода. Классические условия Чебышева об альтернансе не распространяются на комплексную ситуацию, а критерий Колмогорова и критерий Иванова – Ремеза трудно проверяемы для установления свойства экстремальности конкретных полиномов в комплексном случае. С помощью разработанной авторами субдифференциальной конструкции вычислены явно экстремальные полиномы на квадратах в комплексной плоскости. Методы исследования – методы математического и функционального анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple 2021*, методы теории функций и некоторые общие результаты теории оптимизации.

**Ключевые слова:** экстремальный полином, полиномы Чебышева первого рода, банахово пространство, линейный функционал, субградиент, критерий оптимальности, численно-аналитическое решение

**Для цитирования.** Трубников, Ю. В. О численно-аналитическом методе построения экстремальных полиномов комплексного аргумента / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 18–36. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-18-36>

**Yurii V. Trubnikov, Mikhail M. Chernyavsky**

*Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus*

## ON A NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR CONSTRUCTING EXTREMAL POLYNOMIALS OF A COMPLEX ARGUMENT

**Abstract.** This article is devoted to the development of a numerical-analytical method for constructing extremes in the Chebyshev norm polynomials, given on the square of the complex plane. The studied polynomials are a generalization of the classical Chebyshev polynomials of the first kind. In the complex case there are no classical Chebyshev alternance conditions, and the Kolmogorov criterion along with the Ivanov – Remez criterion are difficult to prove for establishing the extremality property of specific polynomials. On the basis of the subdifferential construction developed by the authors of the article the extremal polynomials on the squares of the complex plane are calculated in an explicit way. The basic research methods are the methods of functional and complex mathematical analysis, as well as the *Maple 2021* computer mathematics system. Methods of function theory and some general results of optimization theory are also used.

**Keywords:** extremal polynomial, Chebyshev polynomials of the first kind, Banach space, linear functional, subgradient, optimality criterion, numerical-analytical solution

**For citation.** Trubnikov Y. V., Chernyavsky M. M. On a numerical-analytical method for constructing extremal polynomials of a complex argument. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 18–36 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-18-36>

**Введение.** Почти 170 лет прошло со времени создания П. Л. Чебышевым теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля (экстремальные полиномы). Такие полиномы находят широкие приложения в различных вопросах математического анализа и, что может быть самым важным, применяются для конструирования оптимальных итерационных процессов для уравнений с линейными ограниченными операторами в банаховых пространствах. Исследования в этом направлении теории функций продолжили известные математики: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. А. Граве, М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, В. И. Лебедев.

Основная сложность, которая возникает при переходе к комплексному случаю, – это отсутствие понятия альтернанса и теорем, являющихся прямыми аналогами теоремы Чебышева.

Напомним, что основной теоремой в теории равномерных (чебышевских) приближений, дающей необходимые и достаточные условия того, чтобы для заданной на  $[a, b]$  непрерывной функции  $f(x)$  некоторый полином  $P_n(x)$  вида  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}$  был полиномом ее наилучшего приближения степени  $n$ , является теорема Чебышева об альтернансе.

Теорема 1 (П. Л. Чебышев, 1854). Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Тогда для того, чтобы некоторый полином  $P_n^*(x)$  степени не выше  $n$  был полиномом, наименее уклоняющимся от  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы на  $[a, b]$  нашлась по крайней мере одна система из  $n + 2$  точек  $x_j$ ,  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$ , в которых разность  $f(x) - P_n^*(x) = r_n(x)$

- 1) поочередно принимает значения разных знаков;
- 2) достигает по модулю наибольшего на  $[a, b]$  значения, т. е. в точках  $x_j$  ( $1 \leq j \leq n + 2$ ) должны выполняться условия

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = \dots = (-1)^{n+1} r_n(x_{n+2}) = \pm \|r_n\|_C.$$

Систему точек  $x_j$  ( $1 \leq j \leq n + 2$ ), в которых имеют место данные равенства, называют альтернансом или же чебышевским альтернансом.

При переходе в комплексную область критерии и методы построения экстремальных полиномов принципиальным образом меняются, поскольку в этом случае аналогов теоремы Чебышева об альтернансе не существует. В комплексной ситуации основные критерии оптимального приближения восходят к описанным ниже критериям Колмогорова (1948) и Иванова – Ремеза (1952, 1953), которые, однако, не дают явного аналитического метода построения экстремальных полиномов.

Известно, что среди всех многочленов фиксированной степени со старшим коэффициентом, равным единице, заданных на отрезке  $[-1; 1]$ , наименее уклоняются от нуля многочлены Чебышева первого рода

$$T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x).$$

Например,

$$T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \quad T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x, \quad T_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}.$$

Некоторым комплексным аналогом отрезка  $[-1; 1]$  является квадрат с вершинами в точках  $1 + i$ ,  $-1 + i$ ,  $-1 - i$ ,  $1 - i$ . Естественным обобщением полиномов Чебышева первого рода является класс экстремальных полиномов комплексного аргумента, определенных на таком квадрате. Несмотря на простоту формулировки задачи, существенное продвижение в исследованиях по построению требуемых полиномов произошло только в самом конце XX – начале XXI в. Так, например, Ю. В. Трубниковым на рассматриваемом квадрате в аналитическом виде были построены экстремальные полиномы до шестой степени включительно [1]. Для этого использовался разработанный им критерий экстремальности, основанный на субдифференциальных конструкциях, который будет подробно рассмотрен в настоящей статье.

Цель статьи – на базе разработанной авторами субдифференциальной конструкции вычислить явно экстремальные полиномы на квадратах в комплексной плоскости.

Полученные результаты могут быть применены в итерационных процессах высоких порядков для решения линейных уравнений в банаховом пространстве с линейными ограниченными операторами, спектр которых локализован в некотором квадрате комплексной плоскости. Это станет темой последующих публикаций.

**Известные сведения из теории экстремальных в чебышевской метрике полиномов комплексного аргумента.** В связи с построением экстремальных полиномов в областях, лежащих в комплексной плоскости, напомним некоторые аспекты истории исследования этой задачи.

Отсутствие прямого комплексного аналога теоремы об альтернансе привело А. Н. Колмогорова в 1948 г. к необходимости сформулировать новый критерий оптимальности приближения функции комплексного аргумента обобщенными полиномами (в частном случае приближения алгебраическими многочленами соответствующий критерий был доказан еще в 1911 г. Ш. Ж. де ла Валле-Пуссенон). Важным элементом критерия является понятие  $e$ -точки.

Определение 1 [2, с. 47]. Если на замкнутом ограниченном множестве  $M$  комплексной плоскости задана непрерывная функция  $f(z)$  и задан полином  $P_n(z)$  (вообще говоря, обобщенный), то всякая точка,  $z_0 \in M$ , в которой выполняется равенство

$$|f(z_0) - P_n(z_0)| = \|f - P_n\| = \max_{z \in M} |f(z) - P_n(z)|,$$

называется  $e$ -точкой разности  $f - P_n$ .

Теорема 2 (А. Н. Колмогоров, 1948). Пусть на замкнутом ограниченном множестве  $M$  комплексной плоскости задано  $n + 1$  фиксированных непрерывных функций  $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$  и непрерывная функция  $f(z)$ , которую следует приблизить обобщенными полиномами вида

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(z). \quad (1)$$

Тогда для того, чтобы некоторый полином

$$P_n^*(z) = \sum_{k=0}^n c_k^* \varphi_k(z)$$

был полиномом наилучшего равномерного приближения (экстремальным полиномом) для функции  $f(z)$  в том смысле, что

$$\|f - P_n^*\| = \inf_{P_n} \|f - P_n\|,$$

необходимо и достаточно, чтобы на множестве  $E = E(P_n^*)$  всех  $e$ -точек из  $M$  при любом полиноме  $P_n(z)$  вида (1) выполнялось неравенство

$$\min_{z \in E} \operatorname{Re} \left\{ P_n(z) \overline{[f(z) - P_n^*(z)]} \right\} \leq 0. \quad (2)$$

В выражении (2) и далее по тексту статьи черта сверху символа означает комплексное сопряжение. Трудность использования этого критерия состоит в том, что  $e$ -точки разности  $f - P_n^*$  не известны, и в проверяемые условия входит произвольный полином  $P_n(z)$ .

Еще одним критерием, эквивалентным критерию Колмогорова, является критерий оптимальности Иванова – Ремеза.

Теорема 3 (В. К. Иванов, 1952; Е. Я. Ремез, 1953). Для того чтобы для непрерывной на  $M$  функции  $f(z)$  некоторый полином  $P_n^*(z)$  вида (1) был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество  $\{z_k\}_1^m$  ( $1 \leq m \leq 2n + 3$ ) такое, что

$$|f(z_k) - P_n^*(z_k)| = \|f - P_n^*\|, \quad (3)$$

и положительные числа  $\rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) такие, чтобы при любом полиноме  $P_n(z)$  вида (1) выполнялось равенство

$$\sum_{k=1}^m \rho_k \overline{[f(z_k) - P_n^*(z_k)]} P_n(z_k) = 0. \tag{4}$$

Подчеркнем, что в общей ситуации как применение критерия Колмогорова, так и проверка условия (4) весьма проблематичны, так как используемые при этом полиномы  $P_n(z)$  произвольны и система точек  $\{z_k\}^m$  ( $1 \leq m \leq 2n + 3$ ) не известна. С другой стороны, рассматриваемая проблема, по сути, является проблемой общей теории экстремальных задач. В данной работе для построения экстремальных полиномов в областях комплексной плоскости применяются классические критерии оптимальности, известные в теории экстремальных задач.

**О субдифференциальном критерии оптимальности.** Напомним, прежде всего, определенные субдифференциала нормы. Пусть  $(E, \|\cdot\|)$  – произвольное банахово пространство (действительное или комплексное),  $(E^*, \|\cdot\|_*)$  – пространство, сопряженное пространству  $E$ .

Определение 2 [3–6]. Функционал  $x^* \in E^*$  называется субградиентом нормы в точке  $x \in E$ , если

$$\forall h(\in E) \quad \|x + h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re}\langle x^*, h \rangle, \tag{5}$$

где  $\operatorname{Re} z$  – действительная часть комплексного числа  $z$ ;  $\langle x^*, h \rangle$  – значение функционала  $x^*$  на векторе  $h$ . Множество всех субградиентов нормы в точке  $x$  называется субдифференциалом нормы в точке  $x$  и обозначается  $\partial\|x\|$ , т. е.

$$\partial\|x\| = \{x^* \in E^* : \forall h(\in E) \quad \|x + h\| - \|x\| \geq \operatorname{Re}\langle x^*, h \rangle\}. \tag{6}$$

Отображение  $x \rightarrow \partial\|x\|$  является многозначным, т. е. каждому  $x \in E$  отвечает множество  $\partial\|x\| \subset E^*$  (непустота  $\partial\|x\|$  вытекает из теоремы Хана – Банаха).

Из определения субдифференциала вытекает, что  $\partial\|\theta\|$  совпадает с замкнутым единичным шаром сопряженного пространства, а структура  $\partial\|x\|$  при  $x \neq 0$  задается следующей леммой.

Лемма [3, с. 22]. Если  $x \neq 0$ , то

$$\partial\|x\| = \{x^* \in E^* : \|x^*\|_* = 1, \quad \operatorname{Re}\langle x^*, x \rangle = \|x\|\}. \tag{7}$$

Пусть  $G$  – конечномерное подпространство банахова пространства  $E$ . Сформулируем фактически предложение из [4, с. 89], но в удобной для дальнейшего изложения форме.

Теорема 4 [3, с. 26]. Элемент  $y \in G$  тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения точки  $x \notin G$ , когда

$$\exists \mu (\in \partial\|y - x\| \vee \in \partial\|x - y\|) \quad \forall h(\in G) \operatorname{Re}\langle \mu, h \rangle = 0, \tag{8}$$

где  $\partial\|x\|$  – субдифференциал нормы в точке  $x$ ,  $\langle \mu, h \rangle$  – значение функционала  $\mu$  на векторе  $h$ .

На основе критерия (8) можно сформулировать следующую схему построения экстремального полинома (т. е. полинома, для которого достигается  $\inf \|f - P_n\|$ ):

1) исходя из предположения о расположении корней полинома  $P_n$  (этот момент по существу является эвристическим), определенного на квадрате комплексной плоскости, найти систему точек, в которых достигается максимум модуля разности  $f(z) - P_n(z)$  ( $e$ -точки);

2) решить систему уравнений

$$\operatorname{Re}\langle \mu, \varphi_k \rangle = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad \varphi_k \in G, \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}\langle \mu, f - P_n \rangle = \|f - P_n\|, \quad \mu \in \partial\|f - P_n\|. \tag{10}$$

Если в результате решения системы уравнений (9)–(10) будет найден соответствующий функционал  $\mu$ , то этот факт в силу критерия (8) гарантирует экстремальность  $P_n$ . Если анализ системы (9)–(10) устанавливает факт отсутствия такого функционала, то, изменяя расположение корней полинома  $P_n$  (т. е. делая следующее эвристическое предположение), данную схему можно применить еще раз и т. д. Указанная схема становится эффективной, если есть возможность проследить зависимость между изменением параметров области задания приближаемой функции и движением корней экстремального полинома [7]. Она успешно применялась в работах Ю. В. Трубникова [3, 6, 7].

Отметим, что прямоугольник, симметричный относительно действительной оси, является удобной областью локализации спектра линейного ограниченного оператора. М. А. Красносельским и В. С. Козякиным в 1979 г. были построены экстремальные полиномы первой степени на прямоугольнике, симметричном относительно действительной оси, не содержащем нуля [8]. Некоторые специальные случаи (объединение круга и отрезка действительной оси) были рассмотрены А. М. Дементьевой и В. Я. Стеценко в 1984 г. Далее в 1994 г. А. П. Забрейко и П. П. Забрейко был развит метод построения экстремальных полиномов первой степени, основанный на свойствах чебышевского центра [9]. Были рассмотрены области типа сектора и круга, а также в качестве приложения развитых методов получены новые доказательства результатов М. А. Красносельского и В. С. Козякина.

Эффективность чебышевских итерационных процессов неоднократно отмечали многие известные математики [10–14]. Схема чебышевского итерационного процесса произвольного порядка подробно изложена в [11]. Необходимым элементом этой схемы является экстремальный полином комплексного аргумента с условием  $P(0) = 1$ , заданный на области локализации спектра. Если это область является отрезком действительной оси, такие полиномы получаются преобразованиями обычных полиномов Чебышева первого рода. Актуальность построения экстремальных полиномов на квадрате комплексной плоскости объясняется их дальнейшим применением для реализации итерационных процессов решения уравнений с линейными ограниченными операторами со спектром, локализованным в сложных областях комплексной плоскости. Такие приложения будут предметом наших последующих публикаций.

**Демонстрация методики применения субдифференциального критерия оптимальности на конкретном примере.** Пусть  $D$  – квадрат с вершинами в точках  $1 + i$ ,  $-1 + i$ ,  $-1 - i$ ,  $1 - i$ . Естественным обобщением полиномов Чебышева первого рода является класс экстремальных полиномов комплексного аргумента (наименее уклоняющихся от нуля), определенных на квадрате  $D$ . Ранее Ю. В. Трубниковым были построены экстремальные полиномы со второй по шестую степень включительно, заданные на рассматриваемом квадрате. Для этого применялась схема из теоремы 4. В работе [2] доказана следующая

Теорема 5 (Ю. В. Трубников, 2003). *Экстремальными на квадрате  $D$  являются следующие полиномы:*

$$P_1 = z, \quad P_2 = z^2, \quad P_3 = z^3, \quad P_4 = z^4 + \frac{3}{2}, \quad P_5 = z^5 + (9 - 5\sqrt{2})z, \quad P_6 = z^6 + \frac{7}{3}z^2.$$

Проиллюстрируем подробно, например, применение критерия теоремы 4 для доказательства экстремальности полинома  $P_5 = z^5 + (9 - 5\sqrt{2})z$ . Для него  $e$ -точками являются числа  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1 + i$ ,  $z_3 = i$ ,  $z_4 = -1 + i$ ,  $z_5 = -1$ ,  $z_6 = -1 - i$ ,  $z_7 = -i$ ,  $z_8 = 1 - i$ .

Обозначим через  $Q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) значения, сопряженные значениям  $P_5(z_k)$ :

$$Q_1 = 10 - 5\sqrt{2}, \quad Q_2 = 5 - 5\sqrt{2} - (5 - 5\sqrt{2})i, \quad Q_3 = -(10 - 5\sqrt{2})i, \quad Q_4 = -5 + 5\sqrt{2} - (5 - 5\sqrt{2})i,$$

$$Q_5 = -10 + 5\sqrt{2}, \quad Q_6 = -5 + 5\sqrt{2} + (5 - 5\sqrt{2})i, \quad Q_7 = (10 - 5\sqrt{2})i, \quad Q_8 = 5 - 5\sqrt{2} + (5 - 5\sqrt{2})i.$$

Согласно (9), составим систему

$$\operatorname{Re}\langle \mu, c \rangle = 0, \quad \operatorname{Re}\langle \mu, z \rangle = 0, \quad \operatorname{Re}\langle \mu, z^2 \rangle = 0, \quad \operatorname{Re}\langle \mu, z^3 \rangle = 0, \quad \operatorname{Re}\langle \mu, z^4 \rangle = 0, \quad \|\mu\| = 1,$$

где  $c = x + iy$  – произвольная комплексная константа. Учитывая конечномерность рассматриваемого семейства полиномов и условие  $\|\mu\| = 1$ , будем искать функционал  $\mu$  в виде  $\mu = \sum_{k=1}^8 b_k \delta_{z_k}$ , где

$\delta_{z_k}$   $\delta$ -функция точки  $z_k$ ,  $\sum_{k=1}^8 b_k = 1$ ,  $b_k \geq 0$ .

Запишем вышеприведенную систему более подробно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k &= 0, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k &= 0, \\ \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k^2 &= 0, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k^3 &= 0, \\ \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k^4 &= 0, & \sum_{k=1}^8 b_k &= 1. \end{aligned} \tag{11}$$

В системе (11) сейчас 6 уравнений и 8 неизвестных  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ). Нас устроит любое решение, удовлетворяющее выражениям (9) и (10). Доопределим систему, добавив туда следующие требования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k &= 0, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k &= 0, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k^2 &= 0, \\ \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k^3 &= 0, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k z_k^4 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Получаем переопределенную систему (11)–(12) из 11 уравнений с 8 неизвестными. Ее решением является набор

$$b_1 = b_3 = b_5 = b_7 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4},$$

что гарантирует экстремальность полинома  $P_5 = z^5 + (9 - 5\sqrt{2})z$ . Найденный функционал  $\mu$  действует следующим образом:

$$\langle \mu, g \rangle = \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^8 b_k Q_k g(z_k).$$

Покажем неединственность требуемого функционала. Действительно, если

$$h_1 = h_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad h_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad h_3 = h_4 = h_6 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}, \quad h_7 = \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad h_8 = \sqrt{2} - \frac{5}{4},$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 b_k &= 1, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^8 h_k Q_k z_k &= 0, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^8 h_k Q_k z_k^2 &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)i, \\ \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^8 h_k Q_k z_k^3 &= (6 - 4\sqrt{2})i, & \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^8 h_k Q_k z_k^4 &= \left(\frac{15}{2} - 5\sqrt{2}\right)i, \\ \frac{1}{10-5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^8 h_k Q_k z_k^5 &= 10 - 5\sqrt{2} = |P_5(z_k)| = \|P_5\| \quad (k = 1, 2, \dots, 8), \end{aligned}$$



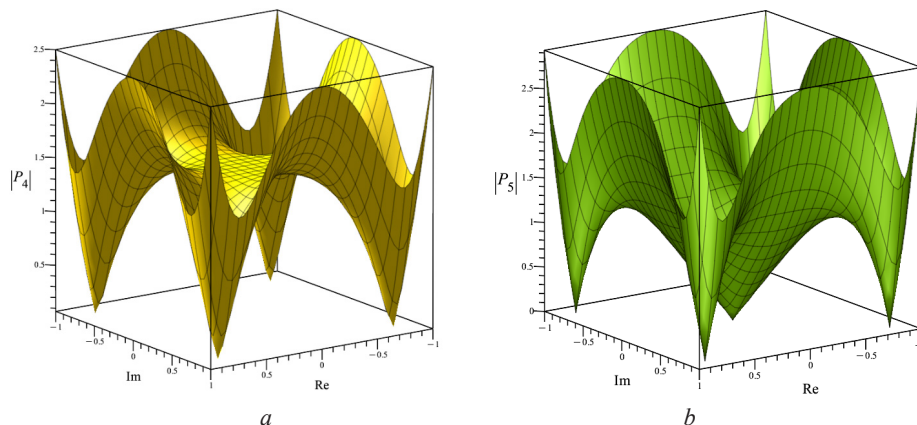


Рис. 1. Графики модулей экстремальных полиномов  $P_4$  (a) и  $P_5$  (b)

Fig. 1. Graphs of modules of extremal polynomials  $P_4$  (a) and  $P_5$  (b)

что полностью удовлетворяет условиям (9) и (10). В этом случае

$$\langle \mu, g \rangle = \frac{1}{10 - 5\sqrt{2}} \sum_{k=1}^8 h_k Q_k g(z_k).$$

Используя представленную методику, можно доказать экстремальность остальных полиномов, приведенных в теореме 5. Отметим, что в XX в. и на рубеже XXI в. практически все аналитические выкладки и представленные выше преобразования осуществлялись «вручную». С развитием возможностей систем компьютерной математики стало доступным существенное продвижение в рассматриваемом направлении исследований, а применение критерия теоремы 4 оказалось едва ли не единственным универсальным способом доказательства экстремальности полиномов комплексного аргумента с помощью систем компьютерной математики. В данной работе мы систематически применяем методы компьютерной математики.

Весьма своеобразны графики модулей исследуемых экстремальных полиномов. Например, на рис. 1 изображены графики модулей полиномов  $P_4 = z^4 + 3/2$ ,  $P_5 = z^5 + (9 - 5\sqrt{2})z$ .

**Аналитическое нахождение экстремального полинома седьмой степени.** Отметим, что аналитическое построение на квадрате  $D$  экстремальных полиномов комплексного аргумента седьмой и более высоких степеней было существенно затруднено из-за того, что количество  $e$ -точек начинает неуклонно расти с увеличением степени полинома, а точное расположение некоторого их количества становится неизвестным ( $e$ -точки начинают «блуждать» по сторонам квадрата  $D$ ). Действительно,  $e$ -точками у полиномов  $P_4, P_5, P_6$  являются вершины квадрата, а также середины его сторон. Покажем аналитически, что в случае  $P_7$  это не так. В силу симметрии, а также по аналогии с полиномами меньших степеней выражение для  $P_7$  следует искать в виде

$$P_7 = P_7(z) = z^7 + pz^3, \tag{13}$$

где  $p$  – действительный параметр.

Пусть

$$P_7 = (x + iy)^7 + p(x + iy)^3.$$

Согласно теореме о максимуме модуля аналитической функции, максимум модуля достигается на границе области, поэтому все  $e$ -точки расположены на сторонах квадрата  $D$ .

Исследуем модуль полинома  $P_7$  на экстремум. Составим выражение квадрата модуля полинома  $P_7$ , например, для верхней границы области, т. е. при  $y = 1$  (в силу симметрии достаточно рассмотреть только одну сторону квадрата):

$$|P_7|^2|_{y=1} = L(x) = (x^2 + 1)^3 (x^8 + 4x^6 + (2p + 6)x^4 + (-12p + 4)x^2 + (1 + p)^2). \quad (14)$$

Производная этого выражения равна

$$L'(x) = 2x(x^2 + 1)(7x^8 + 28x^6 + 10px^4 + 42x^4 - 44px^2 + 3p^2 + 28x^2 - 6p + 7).$$

Исследуем точку  $x = 0$ . Для этого вычислим значение второй производной в этой точке:

$$L''(0) = 6p^2 - 12p + 14.$$

Дискриминант последнего выражения отрицательный, значит,  $L''(0) > 0$ , т. е. квадрат модуля имеет в точке  $x = 0$  локальный минимум при любом значении параметра  $p$ . Это также свидетельствует об увеличении числа  $e$ -точек с 8 до 12, что объясняется раздвоением ранее находящейся в нуле  $e$ -точки, обеспечивающим локальный минимум, а также симметричностью  $e$ -точек относительно осей координат.

В начале 2022 г. авторами настоящей статьи численными методами при помощи системы компьютерной математики *Maple 2021* была решена задача о нахождении явного вида полинома  $P_7$  [15], а также доказана экстремальность на квадрате  $D$  полинома

$$P_7 = z^7 + \left(1 + \frac{\sqrt{11}}{2}\right)z^3. \quad (15)$$

С точки зрения методологии математики данный результат представляет определенный интерес, поскольку с помощью численных методов удалось получить точное выражение в радикалах. Далее представлено аналитическое построение данного полинома методами схемы (9), (10).

По аналогии с полиномами меньших степеней ищем  $P_7$  в виде (13). Исследуем выражение (14) квадрата модуля полинома  $P_7$  на верхней стороне квадрата при  $y = 1$ . Обозначим через  $d$  величину наибольшего уклонения от нуля квадрата модуля  $|P_7|^2$ , т. е. значение  $|P_7|^2$  в  $e$ -точках на границе квадрата равно  $d$ .

Поскольку в выражение (14) переменная  $x$  входит только в четных степенях, то достаточно рассмотреть интервал  $x \in (0;1)$ . Так как в  $e$ -точке  $x_1$  (при  $y = 1$ ) из этого интервала функция  $L(x)$  (14) имеет локальный максимум, то производная от этой функции в данной точке обращается в нуль, что с учетом предыдущих требований позволяет построить нелинейную систему для нахождения тройки неизвестных параметров  $\{p, x_1, d\}$ :

$$\begin{cases} L(1) = d; \\ L(x_1) = d; \\ L'(x_1) = 0, \end{cases}$$

которая в развернутом виде принимает вид

$$\begin{cases} 8p^2 - 64p + 128 = d; \\ \left(x_1^2 + 1\right)^3 \left(x_1^8 + 4x_1^6 + (2p + 6)x_1^4 + (-12p + 4)x_1^2 + (1 + p)^2\right) = d; \\ 2x_1 \left(x_1^2 + 1\right) \left(7x_1^8 + 28x_1^6 + (10p + 42)x_1^4 + (28 - 44p)x_1^2 + 3p^2 - 6p + 7\right) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8p^2 - 64p + 128 = d; \\ \left(x_1^2 + 1\right)^3 \left(x_1^8 + 4x_1^6 + (2p + 6)x_1^4 + (-12p + 4)x_1^2 + (1 + p)^2\right) = d; \\ 7x_1^8 + 28x_1^6 + (10p + 42)x_1^4 + (28 - 44p)x_1^2 + 3p^2 - 6p + 7 = 0. \end{cases} \quad (16)$$



Получение конечной системы (16) «вручную» было затруднительно (необходимо разложить на множители многочлен четырнадцатой степени), а ее решение без помощи компьютера является куда более сложной задачей. Система компьютерной математики *Maple 2021* в явном виде не генерирует значения всех решений данной системы. Так, в явном виде находятся четыре тройки решений:

$$\{p = 4; x_1 = 1; d = 0\}, \quad \left\{ p = \frac{28}{3}; x_1 = 1; d = \frac{2048}{9} \right\},$$

$$\{p = 4; x_1 = -1; d = 0\}, \quad \left\{ p = \frac{28}{3}; x_1 = -1; d = \frac{2048}{9} \right\}.$$

Ни одно из них нам не подходит, потому что полученные значения  $x_1$  не принадлежат рассматриваемому промежутку  $(0;1)$ .

Пятая тройка сгенерирована в виде

$$\left\{ p = t^2 + \frac{5}{2}; x_1 = t; d = 22 - 48t^2 \right\},$$

где  $t$  – корень биквадратного уравнения

$$2t^4 + 6t^2 - 1 = 0. \quad (17)$$

Корнями уравнения (17) являются числа

$$x_{1,1} = \frac{\sqrt{2\sqrt{11}-6}}{2}, \quad x_{1,2} = -\frac{\sqrt{2\sqrt{11}-6}}{2}, \quad x_{1,3} = \frac{i\sqrt{2\sqrt{11}+6}}{2}, \quad x_{1,4} = -\frac{i\sqrt{2\sqrt{11}+6}}{2}.$$

Из представленных четырех значений в контексте нашей задачи имеет смысл только первое выражение – значение  $x_{1,1} \approx 0,3978849017$ . Таким образом, получаем тройку чисел

$$\left\{ p = 1 + \frac{\sqrt{11}}{2}; x_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{11}-6}}{2}; d = 94 - 24\sqrt{11} \right\}.$$

Шестая тройка решений сгенерирована с использованием корня уравнения двенадцатой степени, приводить которое не будем, так как к этому моменту рассуждений мы уже построили нужный функционал, гарантирующий экстремальность полинома  $P_7$ . Кроме того, не ясно, можно ли решить данное уравнение двенадцатой степени в радикалах. Приближенное же решение нас не устраивает, поскольку нам уже известно точное значение  $P_7$ .

Теперь осталось согласно схеме, представленной в предыдущем пункте статьи, аналитически доказать экстремальность полинома

$$P_7 = z^7 + \left(1 + \frac{\sqrt{11}}{2}\right)z^3.$$

Занумеруем против часовой стрелки на квадрате  $D$  идущие подряд 12  $e$ -точек  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 12$ ) начиная с  $z_1 = 1 + i$ :

$$z_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{11}-6}}{2} + i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{11}-6}}{2} + i, \quad z_4 = -1 + i, \quad z_5 = -1 + i\frac{\sqrt{2\sqrt{11}-6}}{2},$$

и т. д.

Обозначим через  $Q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 12$ ) значения, комплексно сопряженные значениям  $P_7(z_k)$ :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 6 - \sqrt{11} + (6 - \sqrt{11})i, & Q_2 &= (26\sqrt{11} - 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6} + (315 - 95\sqrt{11})i, \\ Q_3 &= -(26\sqrt{11} - 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6} + (315 - 95\sqrt{11})i, & Q_4 &= -6 + \sqrt{11} + (6 - \sqrt{11})i, \\ Q_5 &= -315 + 95\sqrt{11} + i(26\sqrt{11} - 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6}, & Q_6 &= -315 + 95\sqrt{11} - i(26\sqrt{11} - 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6}, \\ Q_7 &= -6 + \sqrt{11} - (6 - \sqrt{11})i, & Q_8 &= (-26\sqrt{11} + 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6} - (315 - 95\sqrt{11})i, \\ Q_9 &= (26\sqrt{11} - 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6} - (315 - 95\sqrt{11})i, & Q_{10} &= 6 - \sqrt{11} - (6 - \sqrt{11})i, \\ Q_{11} &= 315 - 95\sqrt{11} - i(26\sqrt{11} - 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6}, & Q_{12} &= 315 - 95\sqrt{11} - i(26\sqrt{11} - 91)\sqrt{2\sqrt{11} - 6}. \end{aligned}$$

Согласно (9), составим систему

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle \mu, c \rangle &= 0, & \operatorname{Re}\langle \mu, z \rangle &= 0, & \operatorname{Re}\langle \mu, z^2 \rangle &= 0, & \operatorname{Re}\langle \mu, z^3 \rangle &= 0, \\ \operatorname{Re}\langle \mu, z^4 \rangle &= 0, & \operatorname{Re}\langle \mu, z^5 \rangle &= 0, & \operatorname{Re}\langle \mu, z^6 \rangle &= 0, & \|\mu\| &= 1. \end{aligned}$$

Дополнительно потребуем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle \mu, c \rangle &= 0, & \operatorname{Im}\langle \mu, z \rangle &= 0, & \operatorname{Im}\langle \mu, z^2 \rangle &= 0, & \operatorname{Im}\langle \mu, z^3 \rangle &= 0, \\ \operatorname{Im}\langle \mu, z^4 \rangle &= 0, & \operatorname{Im}\langle \mu, z^5 \rangle &= 0, & \operatorname{Im}\langle \mu, z^6 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем систему

$$\sum_{k=1}^{12} b_k = 1, \quad \frac{6 + \sqrt{11}}{25\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{12} b_k Q_k z_k^m = 0, \quad \frac{6 + \sqrt{11}}{25\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{12} b_k Q_k z_k^m = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 6). \quad (18)$$

Можно в эту систему еще включить условие (10)

$$\langle \mu, z^7 \rangle = |P_7(z_k)| = \|P_7\| = \sqrt{94 - 24\sqrt{11}} = (6 - \sqrt{11})\sqrt{2},$$

но не будем сейчас этого делать, поскольку она и без того переопределенная (15 уравнений и 12 неизвестных), а это условие легко проверить после нахождения коэффициентов  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 12$ ).

Решением системы (18) является набор чисел

$$b_1 = b_4 = b_7 = b_{10} = \frac{5(9\sqrt{11} - 29)}{4(41\sqrt{11} - 121)}, \quad b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = b_8 = b_9 = b_{11} = b_{12} = \frac{6 - \sqrt{11}}{2(41\sqrt{11} - 121)}.$$

Найденный функционал  $\mu$  действует следующим образом:

$$\langle \mu, g \rangle = \frac{6 + \sqrt{11}}{25\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{12} b_k Q_k g(z_k),$$

что полностью доказывает экстремальность полинома (15). На рис. 2 изображен график модуля полинома (15).

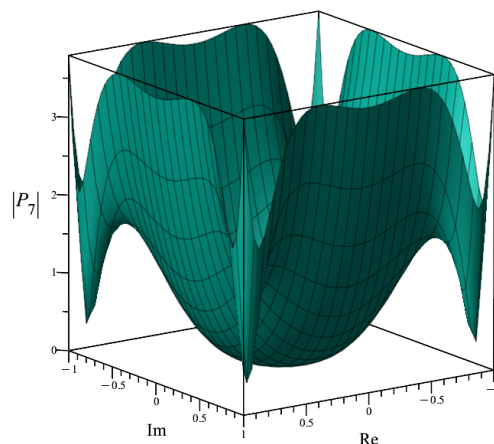


Рис. 2. График модуля экстремального полинома  $P_7$

Fig. 2. Graph of modulus of extremal polynomial  $P_7$

**Численно-аналитическое построение экстремальных полиномов с восьмой по одиннадцатую степень, заданных на квадрате комплексной плоскости.** После приведенного аналитического построения при помощи системы компьютерной математики экстремального полинома седьмой степени  $P_7$  (15) естественно попытаться провести аналогичное построение полиномов более высоких степеней. Однако здесь мы встречаемся с новыми трудностями. Число и расположение  $e$ -точек у полиномов  $P_4, P_5, P_6$  было одинаковым. Если предположить, что количество  $e$ -точек для  $P_8$  будет, так же, как у  $P_7$ , равно 12, а их локализация будет схожей с  $P_7$ , то построенный из этих соображений полином восьмой степени не будет являться экстремальным (система уравнений (9)–(10) не имеет решений). На самом деле численное моделирование показывает, что у экстремальных полиномов  $P_8, P_9, P_{10}$  и  $P_{11}$  на границе квадрата  $D$  будет ровно 16  $e$ -точек, из которых 4 расположены в вершинах квадрата, еще 4 – на серединах его сторон, оставшиеся 8 симметрично «блуждают» от середины сторон к вершинам квадрата, причем с увеличением степени полинома расстояние до вершин квадрата уменьшается.

По аналогии с экстремальными полиномами меньших степеней, а также с учетом симметрии задачи  $P_8$  следует искать в виде

$$P_8 = z^8 + az^4 + b. \tag{19}$$

Из условия совпадения значений квадрата модуля  $|P_8|^2$  в  $e$ -точках  $z = 1 + i$  и  $z = i$  находим, что  $a = 3$ . Как и в случае построения  $P_7$ , в силу симметрии задачи достаточно рассмотреть только одну половину стороны квадрата  $D$ , например, правую верхнюю при  $x \in [0;1], y = 1$ . Для аналитического нахождения значения коэффициента  $b$  необходимо решить нелинейную систему из двух уравнений, где первое уравнение отражает совпадение значений квадрата модуля полинома (19)  $P_8$  в  $e$ -точках при  $x = 0$  и  $x = x_1$  ( $x_1$  – неизвестная точка в диапазоне  $(0;1)$ ), а второе – равенство нулю производной от квадрата модуля на верхней стороне квадрата  $D$  в точке  $x = x_1$ . То есть с учетом наложенных ограничений необходимо решить систему

$$\begin{aligned} x_1^{12} + 9x_1^{10} + 43x_1^8 + 87x_1^6 + 2(b + 32)x_1^4 - 2(27b + 6)x_1^2 + 46b - 16 &= 0, \\ 16x_1^{14} + 112x_1^{12} + 408x_1^{10} + 440x_1^8 + (16b - 184)x_1^6 - (336b + 456)x_1^4 + (584b - 80)x_1^2 - 184b + 64 &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что система компьютерной математики *Maple 2021*, а также ее современная версия *Maple 2022.1* не генерируют точное решение данной системы уравнений в радикалах, а предлагают искать  $x_1^2$  как корень уравнения седьмой степени

$$s^7 - 54s^6 - 305s^5 - 663s^4 + 1607s^3 + 5145s^2 + 2976s - 708 = 0. \tag{20}$$

На промежутке  $(0;1)$  данное уравнение имеет единственное решение, которое находим численно. Таким образом,  $x_1 \approx 0,42355248654560012799$ ;  $b \approx 0,38292867981572756694$ .

Далее с помощью систем компьютерной математики несложно убедиться в том, что переопределенная система, аналогичная (18), имеет единственное численное решение, удовлетворяющее условиям (9)–(10), что окончательно доказывает экстремальность полинома

$$P_8 = z^8 + 3z^4 + 0,38292867981572756694.$$

Для построения полиномов  $P_9$ ,  $P_{10}$  и  $P_{11}$  используется этот же подход (представленный выше при построении  $P_8$ ) к получению системы для нахождения координаты «плавающей» точки  $x_1$  и коэффициентов полинома  $a$  и  $b$ . Однако в этих случаях строго аналитически найти точное значение какого-то из коэффициентов полинома затруднительно, но можно установить аналитическую линейную связь между ними.

В [16] приведено численно-аналитическое доказательство экстремальности полинома  $P_9$  вида

$$P_9 = z^9 + az^5 + bz. \quad (21)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  из выражения (21) связаны между собой следующим образом:

$$a = \frac{(9 - 5\sqrt{2})}{31}(b + 31 + 15\sqrt{2}),$$

а координата  $x_1$  неизвестной  $e$ -точки на верхней стороне квадрата  $D$  равна

$$x_1 \approx 0,55455136583876287241.$$

Таким образом, экстремальный полином  $P_9$  имеет следующий приближенный вид [16]:

$$P_9(z) = z^9 + 3,2977903255033379613z^5 + 0,78580851488163723679z.$$

Более подробно остановимся на построении и доказательстве экстремальности полинома  $P_{10}$ . По аналогии с полученными ранее экстремальными полиномами  $P_{10}$  ищем в виде

$$P_{10} = P_{10}(z) = z^{10} + az^6 + bz^2. \quad (22)$$

В силу симметрии области достаточно рассмотреть одну сторону квадрата  $D$ , например, верхнюю. Пусть

$$P_{10} = (x + iy)^{10} + a(x + iy)^6 + b(x + iy)^2.$$

Квадрат модуля этого выражения при  $y = 1$  равен

$$\begin{aligned} |P_{10}|^2|_{y=1} = & (x^{16} + 8x^{14} + (2a + 28)x^{12} + (-4a + 56)x^{10} + (a^2 - 34a + 2b + 70)x^8 + \\ & + (4a^2 - 56a - 56b + 56)x^6 + (6a^2 + (2b - 34)a + 140b + 28)x^4 + \\ & + (4a^2 + (-12b - 4)a - 56b + 8)x^2 + (a + b + 1)^2)(x^2 + 1)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку правая часть выражения (23) представляет собой четную функцию по  $x$ , то рассматриваем отрезок  $x \in [0;1]$ . Предполагаем, что максимум квадрата модуля  $|P_{10}|^2$  при  $y = 1$  на указанном отрезке достигается в трех точках, среди которых  $x = 0$  и  $x = 1$ , т. е.

$$\max |P_{10}|^2 = 4(4a - b - 16)^2.$$

Подставляя это значение в (23), при  $x = 0$  получаем, что  $b = -31 + 9a$  или  $b = -11 + 7a / 3$ . Одно из этих соотношений окажется справедливым, но проверить необходимо и то и другое.

Само по себе наличие простой линейной связи между коэффициентами  $a$  и  $b$  из (22) является интересным фактом. Подставим первое значение  $b = -31 + 9a$  в выражение (23):

$$\begin{aligned} |P_{10}|^2_{|y=1} = & \left( x^{16} + 8x^{14} + (2a + 28)x^{12} + (-4a + 56)x^{10} + (a^2 - 34a + 2b + 70)x^8 + \right. \\ & + (4a^2 - 56a - 56b + 56)x^6 + \left( 6a^2 + (2b - 34)a + 140b + 28 \right) x^4 + \\ & \left. + \left( 4a^2 + (-12b - 4)a - 56b + 8 \right) x^2 + (a + b + 1)^2 \right) (x^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

С целью определения координаты  $x_1$  неизвестной  $e$ -точки (как точки локального максимума), расположенной между  $x = 0$  и  $x = 1$ , вычисляем производную

$$\begin{aligned} \left( |P_{10}|^2_{|y=1} \right)' = & 4x(x^2 + 1)^2 \left( 5x^{16} + 40x^{14} + (8a + 140)x^{12} + (-8a + 280)x^{10} + \right. \\ & + (3a^2 - 58a + 164)x^8 + (12a^2 - 1432a + 4496)x^6 + (54a^2 + 1488a - 5936)x^4 + \\ & \left. + (-132a^2 + 960a - 1696)x^2 + 48a^2 - 668a + 1772 \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, необходимо учесть, что значение квадрата модуля  $|P_{10}|^2_{|y=1}$  в этой точке совпадает со значением в нуле, т. е. равно  $4(4a - b - 16)^2$ . Значит, справедливо уравнение

$$\begin{aligned} x_1^2 \left( x_1^2 - 1 \right) \left( x_1^{16} + 11x_1^{14} + (2a + 56)x_1^{12} + (2a + 176)x_1^{10} + (a^2 - 20a + 324)x_1^8 + (7a^2 - 616a + 2188)x_1^6 + \right. \\ \left. + (40a^2 - 588a + 1468)x_1^4 + (-12a^2 + 1044a - 3620)x_1^2 - 96a^2 + 1336a - 3544 \right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя  $x = x_1$  в выражение (24) и приравнивая его правую часть к нулю, вместе с уравнением (25) получаем систему для нахождения пары  $\{x_1, a\}$ . Вводя замену  $x_1^2 = s$ , окончательно получаем систему из двух уравнений восьмой степени относительно  $s$ . Эту систему решаем численно. В итоге получаем (все значащие цифры верные в строгом смысле)

$$\begin{aligned} x_1 & \approx 0,6321119432190359708; & a & \approx 3,593033765965358671; \\ b & = -31 + 9a \approx 1,33730389368822804. \end{aligned}$$

Остается проверить справедливость критерия (8). Занумеруем против часовой стрелки 16 подряд идущих  $e$ -точек начиная с  $z_1 = 1 + i$ . Значение  $|P_{10}(z_k)| = \|P_{10}\| \approx 5,930337659653586712$ .

Обозначим через  $Q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 16$ ) значения, сопряженные значениям  $P_{10}(z_k)$ :

$$\begin{aligned} Q_1 & \approx -5,930337659653586712i; & Q_2 & \approx 4,476271748081576299 + 3,889973778167699850i; \\ Q_3 & \approx -5,930337659653586712i; & Q_4 & \approx 4,476271748081576299 - 3,889973778167699850i; \\ Q_5 & \approx 5,930337659653586712i; & Q_6 & \approx -4,476271748081576299 - 3,889973778167699850i; \\ Q_7 & \approx 5,930337659653586712i; & Q_8 & \approx -4,476271748081576299 + 3,889973778167699850i; \\ Q_9 & \approx -5,930337659653586712i; & Q_{10} & \approx 4,476271748081576299 + 3,889973778167699850i; \\ Q_{11} & \approx -5,930337659653586712i; & Q_{12} & \approx 4,476271748081576299 - 3,889973778167699850i; \\ Q_{13} & \approx 5,930337659653586712i; & Q_{14} & \approx -4,476271748081576299 - 3,889973778167699850i; \\ Q_{15} & \approx 5,930337659653586712i; & Q_{16} & \approx -4,476271748081576299 + 3,889973778167699850i. \end{aligned}$$

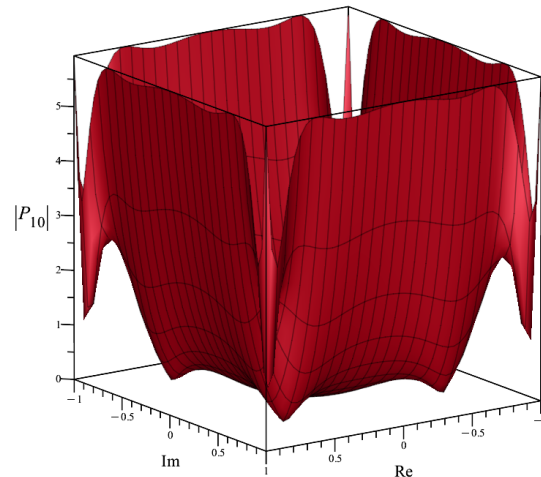


Рис. 3. График модуля экстремального полинома  $P_{10}$

Fig. 3. Graph of modulus of extremal polynomial  $P_{10}$

Таким образом, аналогично (18) получаем систему

$$\sum_{k=1}^{16} h_k = 1, \quad \frac{1}{\|P_{10}\|} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{16} h_k Q_k z_k^m = 0, \quad \frac{1}{\|P_{10}\|} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{16} h_k Q_k z_k^m = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 9). \quad (26)$$

Условие (10)  $\langle \mu, z^{10} \rangle = |P_{10}(z_k)| = \|P_{10}\| \approx 5,930337659653586712$  в переопределенную систему (26) можно сразу не включать, а проверить после нахождения  $h_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 16$ ).

Приближенным решением системы (26) является набор

$$h_1 = h_5 = h_9 = h_{13} \approx 0,0486886874845206738;$$

$$h_2 = h_4 = h_6 = h_8 = h_{10} = h_{12} = h_{14} = h_{16} \approx 0,0654308978954007203;$$

$$h_3 = h_7 = h_{11} = h_{15} \approx 0,0704495167246778855.$$

Функционал  $\mu$  действует следующим образом:

$$\langle \mu, g \rangle = \frac{1}{5,930337659653586712} \times \sum_{k=1}^{16} h_k Q_k g(z_k),$$

что гарантирует экстремальность полинома

$$P_{10}(z) \approx z^{10} + 3,593033765965358671z^6 + 1,33730389368822804z^2.$$

Для случая, когда  $b = -11 + 7a / 3$ , переопределенная система уравнений для нахождения коэффициентов  $h_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 16$ ) типа (26) не имеет решения. На рис. 3 изображен график модуля найденного экстремального полинома  $P_{10}$ .

Экстремальный на квадрате  $D$  полином одиннадцатой степени абсолютно аналогичным образом ищется в виде

$$P_{11} = P_{11}(z) = z^{11} + a z^7 + b z^3,$$

т. е.

$$P_{11} = (x + iy)^{11} + a(x + iy)^7 + b(x + iy)^3.$$



Остановимся только на основных полученных результатах. Связь между коэффициентами  $a$  и  $b$  линейная:

$$b = \frac{40\sqrt{2} - 513 + 127a}{33 - 10\sqrt{2}}.$$

Координата  $x_1$  «плавающей» (при  $y = 1$ ) между  $x = 0$  и  $x = 1$   $e$ -точки

$$x_1 \approx 0,68318100905399512212.$$

Непосредственно сам экстремальный полином

$$P_{11}(z) \approx z^{11} + 3,89571997456161491271z^7 + 2,03230750309549816250z^3.$$

В последних двух выражениях все значащие цифры верные.

Итак, подытожим: рассмотренным выше численно-аналитическим способом можно получить с любой необходимой степенью точности приближенное значение коэффициентов экстремальных полиномов, являющихся комплексными аналогами полиномов Чебышева первого рода, с восьмой по одиннадцатую степень включительно. Основной предпосылкой для этого служило наличие  $e$ -точек на серединах сторон квадрата  $D$  (при  $x = 0$ ). Приравнивая значения квадрата модуля в данных точках, а также вершинах квадрата, легко получалось выразить один неизвестный коэффициент полинома через другой ( $a$  в случае полинома восьмой степени и вовсе получить коэффициенты аналитически).

Отметим, что при вычислении экстремального полинома  $P_{12}$  мы сталкиваемся с новыми эффектами (трудностями). Согласно результатам численного моделирования в системе компьютерной математики *Maple 2021*, квадрат экстремального полинома  $P_{12}$  при  $y = 1$  имеет локальный минимум в точке  $x = 0$  (как в случае  $P_7$ ), а «плавающая»  $e$ -точка  $x_1$  между  $x = 0$  и  $x = 1$  «раздваивается», что доводит общее число  $e$ -точек по периметру квадрата  $D$  до 20. То есть для построения  $P_{12}$  численными методами необходимо одновременно искать 5 неизвестных параметров, 3 из которых являются коэффициентами данного полинома.

**Основные сведения о всех известных экстремальных полиномах, заданных на квадрате  $D$ .** Для обобщения и целостного восприятия уже известных результатов, касающихся аналогов полиномов Чебышева первого рода (как наименее уклоняющихся от нуля со старшим коэффициентом, равным единице) на квадрате комплексной плоскости удобно представить их в виде таблицы.

Старшая степень	Точная или приближенная формула	Информация о корнях	Число и расположение $e$ -точек
1	$z$	$z_1 = 0$	4; в вершинах квадрата $D$
2	$z^2$	$z_1 = z_2 = 0$	4; в вершинах квадрата $D$
3	$z^3$	$z_1 = z_2 = z_3 = 0$	4; в вершинах квадрата $D$
4	$z^4 + \frac{3}{2}$	4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{1,2} = \frac{6^{1/4}}{2}(1 \pm i), \quad z_{3,4} = \frac{6^{1/4}}{2}(-1 \pm i);$ $(6^{1/4} / 2 \approx 0,78254229)$	8; вершины квадрата $D$ и середины его сторон
5	$z^5 + (9 - 5\sqrt{2})z$ $(z^5 + 1,9289321z)$	1 корень $z_1 = 0$ и 4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{2,3} = \frac{(9 - 5\sqrt{2})^{1/4} \sqrt{2}}{2}(1 \pm i),$ $z_{4,5} = \frac{(9 - 5\sqrt{2})^{1/4} \sqrt{2}}{2}(-1 \pm i),$ где $(9 - 5\sqrt{2})^{1/4} \sqrt{2} / 2 \approx 0,83332468$	8; вершины квадрата $D$ и середины его сторон

Окончание таблицы

Старшая степень	Точная или приближенная формула	Информация о корнях	Число и расположение $e$ -точек
6	$z^6 + \frac{7}{3}z^2$	1 кратный корень $z_1 = z_2 = 0$ и 4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{3,4} = \frac{189^{1/4}\sqrt{2}}{6}(1 \pm i)$ , $z_{5,6} = \frac{189^{1/4}\sqrt{2}}{6}(-1 \pm i)$ $(189^{1/4}\sqrt{2} / 6 \approx 0,87393513)$	8; вершины квадрата $D$ и середины его сторон
7	$z^7 + \left(1 + \frac{\sqrt{11}}{2}\right)z^3$ $(z^7 + 2,6583123z^3)$	1 кратный корень $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ и 4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{4,5} = \frac{(8\sqrt{11}+16)^{1/4}\sqrt{2}}{4}(1 \pm i)$ , $z_{6,7} = \frac{(8\sqrt{11}+16)^{1/4}\sqrt{2}}{4}(-1 \pm i)$ , где число $\frac{(8\sqrt{11}+16)^{1/4}\sqrt{2}}{4} \approx 0,90289346$	12; вершины квадрата $D$ , а также $e_{1,2} = \pm l + i$ ; $e_{3,4} = -1 \pm i l$ ; $e_{5,6} = \pm l - i$ ; $e_{7,8} = 1 \pm i l$ , где $l = \frac{\sqrt{2\sqrt{11}-6}}{2} \approx 0,39788490$
8	$z^8 + 3z^4 + 0,38292868$	4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{1,2} \approx 0,92006712(1 \pm i)$ , $z_{3,4} \approx 0,92006712(-1 \pm i)$ , а также 4 корня в вершинах меньшего квадрата $z_{5,6} \approx 0,42749394(1 \pm i)$ , $z_{7,8} \approx 0,42749394(-1 \pm i)$	16; вершины квадрата $D$ , середины его сторон, а также $e_{1,2} = \pm l + i$ ; $e_{3,4} = -1 \pm i l$ ; $e_{5,6} = \pm l - i$ ; $e_{7,8} = 1 \pm i l$ , где $l \approx 0,42355248$
9	$z^9 + 3,2977903z^5 + 0,78580851z$	1 корень $z_1 = 0$ , 4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{2,3} \approx 0,93363279(1 \pm i)$ , $z_{4,5} \approx 0,93363279(-1 \pm i)$ , а также 4 корня в вершинах меньшего квадрата $z_{6,7} \approx 0,50422351(1 \pm i)$ , $z_{8,9} \approx 0,50422351(-1 \pm i)$	16; вершины квадрата $D$ , середины его сторон, а также $e_{1,2} = \pm l + i$ ; $e_{3,4} = -1 \pm i l$ ; $e_{5,6} = \pm l - i$ ; $e_{7,8} = 1 \pm i l$ , где $l \approx 0,55455136$
10	$z^{10} + 3,5930337z^6 + 1,3373039z^2$	1 кратный корень $z_1 = z_2 = 0$ и 4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{3,4} \approx 0,94361771(1 \pm i)$ , $z_{5,6} \approx 0,94361771(-1 \pm i)$ , а также 4 корня в вершинах меньшего квадрата $z_{7,8} \approx 0,56981181(1 \pm i)$ , $z_{9,10} \approx 0,56981181(-1 \pm i)$	16; вершины квадрата $D$ , середины его сторон, а также $e_{1,2} = \pm l + i$ ; $e_{3,4} = -1 \pm i l$ ; $e_{5,6} = \pm l - i$ ; $e_{7,8} = 1 \pm i l$ , где $l \approx 0,63211194$
11	$z^{11} + 3,8957199z^7 + 2,0323075z^3$	1 кратный корень $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ и 4 корня в вершинах квадрата с центром в нуле $z_{4,5} \approx 0,95125007(1 \pm i)$ , $z_{6,7} \approx 0,95125007(-1 \pm i)$ , а также 4 корня в вершинах меньшего квадрата $z_{8,9} \approx 0,62758515(1 \pm i)$ , $z_{10,11} \approx 0,62758515(-1 \pm i)$	16; вершины квадрата $D$ , середины его сторон, а также $e_{1,2} = \pm l + i$ ; $e_{3,4} = -1 \pm i l$ ; $e_{5,6} = \pm l - i$ ; $e_{7,8} = 1 \pm i l$ , где $l \approx 0,68318101$

**З а м е ч а н и е.** В отличие от хорошо изученных полиномов Чебышева первого рода, к настоящему моменту не установлено, выражаются ли в радикалах коэффициенты, корни и  $e$ -точки экстремальных на квадрате  $D$  полиномов высоких степеней. Для практического применения этих полиномов, например при построении итерационных процессов высоких порядков, более чем достаточно того, что коэффициенты полиномов можно получить с любой степенью точности. Тем не менее для полноты исследования, а также «красоты» результатов можно попытаться с помощью компьютера подобрать соответствующие числа, содержащие радикалы. Вторым направлением деятельности по усилению результатов может стать доказательство того, что конечные алгебраические уравнения для нахождения координат «плавающих»  $e$ -точек типа (20) разрешимы или не разрешимы в радикалах.

**Заключение.** Подробно рассмотрено применение субдифференциального критерия оптимальности (8) для доказательства экстремальности полиномов со старшим коэффициентом, равным единице, заданных на квадрате комплексной плоскости. Получен явный аналитический вид и рассмотрены основные свойства требуемого экстремального полинома седьмой степени. На примере полинома десятой степени продемонстрирован численно-аналитический подход к построению рассматриваемых экстремальных полиномов с восьмой по одиннадцатую степень включительно. Обнаружены принципиальные трудности, с которыми сталкивается исследователь при численном построении экстремального полинома двенадцатой степени. Возможно, читателя могут заинтересовать работы [17–19], в которых рассмотрен другой класс экстремальных полиномов комплексного аргумента с условием  $P(0) = 1$ , заданных на прямоугольнике комплексной плоскости.

**Благодарности.** Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (№ 20210494).

**Acknowledgements.** The research was carried out within the framework of the State Program of Scientific Research “Convergence-2025” (no. 20210494).

### Список использованных источников

1. Трубников, Ю. В. О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области / Ю. В. Трубников // Таврич. вестн. информатики и математики. – 2003. – № 2. – С. 45–56.
2. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. Трубников, Ю. В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю. В. Трубников. – М.: Астропресс-XXI, 2002. – 256 с.
4. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
5. Трубников, Ю. В. Субдифференциал и экстремальные конструкции / Ю. В. Трубников // Докл. АН БССР. – 1990. – Т. 34, № 6. – С. 505–507.
6. Трубников, Ю. В. Об одном методе нахождения чебышевских итерационных параметров / Ю. В. Трубников // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 4. – С. 5–9.
7. Трубников, Ю. В. Движение корней экстремальных полиномов / Ю. В. Трубников, И. А. Орехова, Сунь Байюй // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 5–14.
8. Красносельский, М. А. Позитивные линейные системы / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев. – М.: Наука, 1985. – 255 с.
9. Kozjakin, V. S. Some remarks on the method of minimal residues / V. S. Kozjakin, M. A. Krasnosel'ski // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1982. – Vol. 4, № 3. – P. 211–239. <https://doi.org/10.1080/01630568208816115>
10. Zabrejko, A. P. Chebyshev Polynomial Iterations and Approximate Solutions of Linear Operator Equations / A. P. Zabrejko, P. P. Zabrejko // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1994. – Vol. 13, № 4. – P. 667–681. <https://doi.org/10.4171/zaa/484>
11. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 455 с.
12. Лебедев, В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика / В. И. Лебедев. – М.: Физматлит, 2000. – 296 с.
13. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский; пер. с пол. С. Н. Киро. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
14. Коллатц, Л. Теория приближений / Л. Коллатц, В. Крабс. – М.: Мир, 1969. – 447 с.
15. Чернявский, М. М. О численном методе нахождения экстремального полинома седьмой степени, определенного на квадрате комплексной плоскости / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 74-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск,

18 февр. 2022 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2022. – С. 50–52.

16. Трубников, Ю. В. Экстремальные полиномы комплексного аргумента высоких степеней / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2022): материалы Междунар. науч. конф., Новополоцк, 31 мая – 3 июня 2022 г.: в 2 ч. – Новополоцк: ПГУ, 2022. – Ч. 2. – С. 101–103.

17. Трубников, Ю. В. Экстремальные полиномы третьей степени комплексного аргумента / Ю. В. Трубников, И. А. Орехова, Сунь Байюй // Вес. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2012. – № 6 (72). – С. 13–18.

18. Трубников, Ю. В. Построение экстремального полинома третьей степени специального вида, заданного на прямоугольнике комплексной плоскости / Ю. В. Трубников, И. А. Орехова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 1. – С. 13–21.

19. Трубников, Ю. В. Об экстремальных полиномах третьей степени комплексного аргумента / Ю. В. Трубников, И. А. Орехова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 2. – С. 40–47.

## References

1. Trubnikov Yu. V. On approximate and exact polynomials of Chebyshev type in the complex domain. *Tavrisheskii vestnik informatiki i matematiki = Tauride Bulletin of Informatics and Mathematics*, 2003, no. 2, pp. 45–56 (in Russian).
2. Dzyadyk V. K. *Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 512 p. (in Russian).
3. Trubnikov Yu. V. *Extremal Constructions in Nonsmooth Analysis and Operator Equations with Accretive Nonlinearities*. Moscow, Astropress-XXI Publ., 2002. 256 p. (in Russian).
4. Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Theory of Extremal Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (in Russian).
5. Trubnikov Yu. V. Subdifferential and extreme constructions. *Doklady akademii nauk BSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the BSSR], 1990, vol. 5, no. 6, pp. 505–507 (in Russian).
6. Trubnikov Yu. V. On one method for finding Chebyshev iterative parameters. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1999, no. 4, pp. 5–9 (in Russian).
7. Trubnikov Yu. V., Orekhova I. A., Syn Baiyi. Movement of the roots of extreme polynomials. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhavnaga universitjeta = Bulletin of Vitebsk State University*, 2012, no. 3, pp. 5–14 (in Russian).
8. Krasnosel'skii M. A., Lifshits E. A., Sobolev A. V. *Positive Linear Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1985. 255 p. (in Russian).
9. Kozjakin V. S., Krasnosel'ski M. A. Some remarks on the method of minimal residues. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 1994, vol. 4, no. 3, pp. 211–239. <https://doi.org/10.1080/01630568208816115>
10. Zabrejko A. P., Zabrejko P. P. Chebyshev Polynomial Iterations and Approximate Solutions of Linear Operator Equations. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 1994, vol. 13, no. 4, pp. 667–681. <https://doi.org/10.4171/zaa/484>
11. Krasnosel'ski M. A., Vainikko G. M., Zabrejko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Approximate Solution of Operator Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 455 p. (in Russian).
12. Lebedev V. I. *Functional Analysis and Computational Mathematics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 296 p. (in Russian).
13. Pashkovsky S. *Computational Applications of Polynomials and Chebyshev Series*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 384 p. (in Russian).
14. Collatz L., Krabs W. *Approximationstheorie*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 1973. 209 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-94885-4>
15. Chernyavsky M. M., Trubnikov Yu. V. On a numerical method for finding an extremal polynomial of the seventh degree defined on a square of the complex plane. *Materialy 74 Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferencii prepodavatelei, nauchnyh sotrudnikov i aspirantov «Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike»* [Materials of the 74<sup>th</sup> Regional scientific and practical conference of teachers, researchers and postgraduates “Science for education, production, economics”]. Vitebsk, Vitebsk State University named after P. M. Masherov, 2022, pp. 50–52 (in Russian).
16. Trubnikov Yu. V., Chernyavsky M. M. Extremal polynomials of a complex argument of high degrees. *Materialy XX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferencii po differencial'nym uravneniyam «Eruginskie chteniya – 2022». T. 2* [Materials of the XX International scientific conference on differential equations “Eruginskie chteniya – 2022”. Vol. 2]. Novopolotsk, Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, 2022, pp. 50–52 (in Russian).
17. Trubnikov Yu. V., Orekhova I. A., Syn Baiyi. Extreme third degree polynomials of complex argument. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhavnaga universitjeta = Bulletin of Vitebsk State University*, 2012, no. 6 (72), pp. 13–18 (in Russian).
18. Trubnikov Yu. V., Orekhova I. A. Construction of the extreme third degree polynomial assigned on the rectangle of the complex plane. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2013, no. 1, pp. 13–21 (in Russian).
19. Trubnikov Yu. V., Orekhova I. A. On the extreme third-degree polynomials with complex argument. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2014, no. 2, pp. 40–47 (in Russian).

### Информация об авторах

**Трубников Юрий Валентинович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры инженерной физики, Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, (пр. Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: yurii\_trubnikov@mail.ru

**Чернявский Михаил Михайлович** – преподаватель кафедры инженерной физики, Витебский государственный университет имени П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: misha360ff@mail.ru

### Information about the authors

**Yurii V. Trubnikov** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Engineering Physics, Vitebsk State University named after P. M. Mashe-rov, (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: yurii\_trubnikov@mail.ru

**Mikhail M. Chernyavsky** – Lecturer at the Department of Engineering Physics, Vitebsk State University named af-ter P. M. Masherov, (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: misha360ff@mail.ru