ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.217.2,519.17
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-51-61

Поступила в редакцию 13.01.2022
Received 13.01.2022

А. О. Задорожнюк

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ АЛЬДУСА О ВРЕМЕНИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ДЛЯ ГРУПП КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

Аннотация. Исследуется время перемешивания случайных блужданий на минимальных графах Кэли групп комплексных отражений $G(m,1,n)$. Ключевую роль при этом играет адаптация метода склеивания распределений, применявшегося ранее для симметрической группы. Сложность адаптации заключается в том, что с обобщением в случайном блуждании появляются две компоненты, к которым нужно применять склеивание, и эти компоненты влияют на обоюдное поведение. Для решения этой проблемы случайные блуждания разбиваются на несколько блоков, для каждого из которых даются отдельные оценки времени, необходимого для совпадения состояний. Доказаны оценки сверху и снизу на время перемешивания случайных блужданий на группах комплексных отражений, аналогичные оценкам Альдуса для симметрической группы.

Ключевые слова: случайные блуждания, графы Кэли, группы комплексных отражений

Для цитирования. Задорожнюк, А. О. Аналог теоремы Альдуса о времени перемешивания для групп комплексных отражений / А. О. Задорожнюк // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 51–61. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-51-61

Hanna A. Zadarazhniuk

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

AN ANALOGUE OF ALDOUS'S THEOREM ON MIXING TIMES OF A RANDOM WALK FOR COMPLEX REFLECTION GROUPS

Abstract. The subject of this paper is the mixing time of random walks on minimal Cayley graphs of complex reflection groups $G(m,1,n)$. The key role in estimating it is played by the coupling of distributions, which has been used before for the same task on symmetric groups. The difficulty with its adaptation for the current case is that there are now two components in a walk, which are to be coupled, and they influence each other's behaviour. To solve this problem, random walks are split into several blocks for each of which the time needed for their states to match is estimated separately. The result is upper and lower bounds on mixing times of random walks on complex reflection groups, analogous to those obtained by Aldous for a symmetric group.

Keywords: random walks, Cayley graphs, complex reflection groups

For citation. Zadarazhniuk H. A. An analogue of Aldous's theorem on mixing times of a random walk for complex reflection groups. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 51–61 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-51-61

Введение. Время перемешивания для случайного блуждания, заданного на графе, – это мера того, насколько быстро распределение вероятностей состояний этого случайного блуждания стремится к равномерному. Время перемешивания случайных блужданий на графах Кэли симметрической группы довольно обстоятельно было исследовано в работах [1–3]. Примером практического применения полученных результатов может служить изучение перемешивания генов в хромосомах за счет инверсий [4], а также построение хэш-функций [5]. Скорость распространения случайного блуждания тесно связана и с другой метрикой на графах – резисторным расстоянием, которое для графов Кэли групп комплексных отражений исследовалось в [6, 7]. Преимущество графов Кэли групп комплексных отражений состоит в том, что благодаря наличию простой комбинаторной структуры на них легче строить алгоритмы маршрутизации [8]. Для демонстрации того, что время перемешивания не слишком велико, удобно использовать параметры спектрального расширения графов, как это делалось в [5] для другого класса графов.

Однако в рассматриваемых нами случаях указанные параметры дают лишь очень грубые оценки или и вовсе неизвестны.

Группы комплексных отражений $G(m,p,n)$ являются обобщением симметрической группы S_n. В [1] для симметрической группы с порождающим множеством, состоящим из транспозиций соседних элементов, Альдусом даны оценки $C_1 n^3 \le \tau_{\text{mix}} \le C_2 n^3 \log n$ на время перемешивания. Нижняя оценка позже была улучшена до $\frac{n^3 \log n}{\pi^2} + C_3 n^3$ (напр., [2, 3]). Для получения оценки сверху вместо параметров спектрального расширения использовался метод склеивания вероятностных распределений.

В [9] изопериметрическими методами была получена верхняя оценка на время перемешивания $O(n^7 \log n)$ для недвудольных графов на $G(m,p,n)$ с помощью оценок диаметров и спектральных пробелов. При этом, в отличие от работ [1, 2] по симметрической группе S_n, рассматриваемые блуждания не были «ленивыми» (т. е. не могли вместо очередного шага оставаться на месте). Кажется логичным предположить, что ленивые блуждания не должны перемешиваться быстрее не ленивых, и эту оценку можно улучшить. Кроме того, возможен подход к решению задачи, рассматривающий «ожидаемое время перемешивания» и использующий фундаментальную матрицу цепи Маркова [10, гл. 4].

В настоящей статье рассматриваются ленивые блуждания на графах Кэли групп $G(m,1,n)$, для которых метод склеивания распределений адаптируется и приводит снова к почти неулучшаемой верхней оценке $Cn^3 \log n$. Сложность адаптации состоит в том, что с обобщением в блуждании появляются две компоненты, к которым нужно применять склеивание, и эти компоненты влияют на поведение друг друга.

Основные понятия и результаты.

Определение 1. Пусть Γ – группа, T – порождающее множество, не содержащее единичного элемента, такое, что $\forall x \in T : x^{-1} \in T$. Графом Кэли $\mathrm{Cay}(\Gamma, T)$ называется граф, множество вершин которого – элементы Γ, а множество ребер – $\{(x,y) \mid xy^{-1} \in T\}$.

Замечание 1. Как можно заметить, по определению граф Кэли – ориентированный. Однако, благодаря дополнительному условию на порождающее множество, две его вершины либо соединены ребрами в обоих направлениях, либо не соединены вовсе. Поэтому в дальнейшем мы можем говорить о рассматриваемых графах как о неориентированных.

Определение 2. Группа комплексных отражений $G(m,p,n)$, $m, p, n \in \mathbb{N}$, $p \mid m$ – конечная группа, действующая на n-мерном комплексном векторном пространстве [11]. Ее элементы можно представить как мономиальные матрицы $n \times n$, элементами которых являются ξ^{a_k} ($\xi \in \mathbb{C}$ – первообразный корень из единицы степени m, $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv 0 \bmod p$). Операцией на группе является умножение матриц соответствующих элементов.

Мы будем рассматривать графы Кэли на группах $G(m,1,n)$, $m > 1$. В дальнейшем матрицу, у которой ξ^{a_k} находятся на позициях $(k, \sigma(k))$ (где $\sigma \in S_n$), будем обозначать парой $(\sigma, (a_1, a_2, \ldots, a_n))$. Также пусть $(i, i+1)$ обозначает элемент симметрической группы, меняющий местами i-й и $(i+1)$-й элементы перестановки, а id – единичный элемент симметрической группы. В качестве порождающего множества $T_{m,n}$ возьмем минимальное для групп $G(m,1,n)$. При $m > 1$ включим в него следующие элементы:

$$s_i = \big((i,i+1),(0,\ldots,0)\big), \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$r = \big(\mathrm{id},(1,0,\ldots,0)\big);$$

$$r^{-1} = \big(\mathrm{id},(m-1,0,\ldots,0)\big).$$

При $m = 1$ группа $G(m,1,n)$ – симметрическая группа S_n. Результат, обобщаемый следствием 1 данной статьи, был уже доказан для нее (напр., [2]) с порождающим множеством $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$.

Пусть S – не более чем счетное множество. Определим на нем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : \Omega = S$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра всех подмножеств Ω, $\mathbb{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Определение 3. Случайным блужданием (далее также «блужданием») (X_t), $t = 0,1,2,\ldots$, на множестве S будем называть случайный процесс $X : \Omega \times \mathbb{N}_0 \to S$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Рассматриваемые далее случайные блуждания на графах Кэли являются также цепями Маркова, т. е. для них $\mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t, \ldots, X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)$. Для таких случайных блужданий на $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ можно определить матрицу вероятностей одношаговых переходов M: $M_{ij} = \mathbb{P}(X_{t+1} = \omega_j \mid X_t = \omega_i)$.

Если значения (X_t) сравнимы, будем говорить, что X_t *уменьшается (увеличивается)* на следующем шаге, когда $X_{t+1} < X_t$ $(X_{t+1} < X_t)$, и *не изменяется*, когда $X_{t+1} = X_t$.

Замечание 2. Под случайным блужданием на графе Кэли $\mathrm{Cay}(G(m,1,n), T_{m,n})$ будем понимать блуждание на множестве элементов $G(m,1,n)$. Его начальное распределение вероятностей можно задать вектором длины $|G(m,1,n)| = m^n n!$, где на одной позиции стоит единица, а на остальных – нули. Поскольку графы Кэли вершинно-транзитивны, случайное блуждание, не теряя общности, можно начинать в произвольной вершине. Матрица вероятностей одношаговых переходов определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}_{kl} = \mathbb{P}\left(X_{t+1} = \omega_l \mid X_t = \omega_k\right) = \begin{cases} p_s / 2, \text{ если } \omega_l = s_i \omega_k, \ i = \overline{1, n-1}, \\ p_r / 2, \text{ если } \omega_l = r\omega_k \text{ или } \omega_l = r^{-1}\omega_k, \\ 1/2, \text{ если } \omega_l = \omega_k, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

где $(n-1)p_s + 2p_r = 1$. Легко убедиться, что так как элементы s_i имеют порядок 2, матрица будет симметрической и, следовательно, дважды стохастической. Тогда для вектора $v_\pi = \dfrac{1}{m^n n!} \cdot (1, 1, \ldots, 1)$ длины $m^n n!$ верно $v_\pi = v_\pi \mathcal{M}$, т. е. стационарное распределение такого случайного блуждания является равномерным.

В дальнейшем под случайным блужданием (X_t) будем иметь в виду именно такое блуждание на графе Кэли $G(m,1,n)$. Выделим в (X_t) две компоненты. Ранее мы представили элементы $G(m,1,n)$ как пары $\left(\sigma, (a_1, a_2, \ldots, a_n)\right)$. Первая компонента будет соответствовать первому элементу этой пары, вторая – второму, т. е. если $X_t = \left(\sigma, (a_1, a_2, \ldots, a_n)\right)$, то $X_t^1 = \sigma$, $X_t^2 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Также для соответствующего момента времени t введем обозначения: $X_t(i) = \left(\sigma(i), a_i\right)$, $X_t^1(i) = \sigma(i)$, $X_t^2(i) = a_i$. Последовательности $\left(X_t^1(i)\right)$, $\left(X_t^2(i)\right)$, $\left(X_t(i)\right)$ являются случайными блужданиями на множествах $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ и $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{0, 1, \ldots, m-1\}$ соответственно, хотя не все из них будут цепями Маркова.

Определение 4 [2, с. 47–48]. Пусть μ и ν – вероятностные меры на конечном множестве S. Расстояние по вариации между этими мерами определяется по формуле

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu(i) - \nu(i)|.$$

Обозначим через π равномерное распределение на группе $G(m,1,n)$, через P^{X_t} – распределение вероятностей случайного блуждания (X_t) на графе Кэли этой группы.

Определение 5 [2, с. 55]. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторая фиксированная величина. Временем перемешивания случайного блуждания (X_t) на графе Кэли $\mathrm{Cay}\left(G(m,1,n), T_{m,n}\right)$ будем называть величину

$$\tau_{\mathrm{mix}}(m, n, \varepsilon) = \min\{t : d(P^{X_t}, \pi) \le \varepsilon\}.$$

Верны следующие оценки на τ_{mix}.

Теорема 1. *Для любого m выполняется неравенство*

$$\tau_{\mathrm{mix}}(m,n,\varepsilon) \geq \frac{n^2}{4p_s}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right).$$

Т е о р е м а 2. *Для любого m и для любого n ≥ 4/ε справедлива оценка*

$$\tau_{\mathrm{mix}}(m,n,\varepsilon) \leq \lceil 2\log_2 n \rceil \left(\left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil + \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil + \left\lceil \frac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil \right).$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $p_r = \dfrac{1}{4}$, $p_s = \dfrac{1}{2(n-1)}$. *Для любого* $m \in \mathbb{N}$ *существуют постоянные* $c(\varepsilon)$, $C(m)$ *такие, что для любого* $n \geq 4/\varepsilon$ *выполняются неравенства*

$$c(\varepsilon)n^3 \leq \tau_{\mathrm{mix}}(m,n,\varepsilon) \leq C(m)n^3 \log n.$$

Далее приведем доказательства оценок на τ_{mix}, сформулированные в теоремах 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть (Z_t) – случайное блуждание на множестве $\mathbb{Z}$, которое увеличивается или уменьшается на 1 с вероятностями $p_s/2$ и не изменяется с вероятностью $1 - p_s$. Основываясь на $\left(X_t^1(1)\right)$, можно задать (Z_t) таким образом, что будет верно неравенство $\mathbb{P}\left(X_t^1(1)-1 \geq z\right) \leq \mathbb{P}(|Z_t| \geq z)$. Пусть начальное состояние $Z_0 = X_0^1(1)$. Последующие состояния будут определяться по описанным далее правилам.

Если $Z_t > 0$ и $1 < X_t^1(1) < n$, то:

$Z_{t+1} = Z_t + 1$, если $X_{t+1}^1(1) = X_t^1(1) + 1$;

$Z_{t+1} = Z_t - 1$, если $X_{t+1}^1(1) = X_t^1(1) - 1$;

$Z_{t+1} = Z_t$, если $X_{t+1}^1(1) = X_t^1(1)$.

Когда $\left(X_t^1(1)\right)$ принимает одно из своих граничных значений – 1 или n – происходит небольшое изменение в последнем случае. Вероятность того, что $X_t^1(1) = 1$ уменьшится на следующем шаге, равна 0, однако для Z_t мы хотим сохранить эту вероятность равной $p_s/2$. Поэтому Z_t может уменьшиться на 1, даже если $X_t^1(1)$ на том же шаге не изменилось. Аналогичная ситуация наблюдается с границей $X_t^1(1) = n$. Заметим, что при этом $|Z_t|$ все равно не меньше $|X_t^1(1)|-1$, так как эти правила действуют только до тех пор, пока значения Z_t не окажутся по другую сторону от 0.

Если $Z_t \leq 0$ и $1 < X_t^1(1) < n$, то правила меняются следующим образом:

$Z_{t+1} = Z_t - 1$, если $X_{t+1}^1(1) = X_t^1(1) + 1$;

$Z_{t+1} = Z_t + 1$, если $X_{t+1}^1(1) = X_t^1(1) - 1$;

$Z_{t+1} = Z_t$, если $X_{t+1}^1(1) = X_t^1(1)$.

Заметим, что матрица вероятностей одношаговых переходов (Z_t) при этом остается неизменной. Здесь возникает зеркальная ситуация, когда уменьшение $X_t^1(1)$ уже невозможно, но Z_t с вероятностью $p_s/2$ продолжит уменьшаться. Она обрабатывается аналогичным образом и все еще не нарушает желаемого неравенства $|Z_t| \geq X_t^1(1) - 1$.

Тогда по неравенству Маркова

$$\mathbb{P}\left(|Z_t| \geq \frac{n}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(Z_t^2 \geq \frac{n^2}{4}\right) \leq \frac{4\mathbb{E}Z_t^2}{n^2}.$$

Вычислим среднее значение, используя аддитивность и независимость шагов друг от друга:

$$\mathbb{E}Z_t^2 = t\left(\frac{p_s}{2} + \frac{p_s}{2} + (1-p_s)\cdot 0\right) = tp_s.$$

Рассмотрим множество A всех элементов $\left(\sigma,(a_1,a_2,\ldots,a_n)\right)$, у которых $\lfloor n/2 \rfloor \leq \sigma(1) \leq n$. Всего таких будет не меньше половины. По определению,

$$d(P^{X_t},\pi) \geq \pi(A) - P^{X_t}(A) \geq \pi(A) - \mathbb{P}\left(|Z_t| \geq \frac{n}{2}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{4tp_s}{n^2}.$$

Тогда при $t < \frac{n^2}{4p_s}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ имеем $d(P^{X_t}, \pi) > \varepsilon$.

З а м е ч а н и е 3. Часть доказательства, связанная с первой компонентой, является более общим случаем (за счет произвольных вероятностей перехода) доказательства оценки для S_n, приведенного, например, в [2].

Доказательство теоремы 2. Начнем с того, что введем понятие склеивания (coupling).

О п р е д е л е н и е 4 [2]. Склеиванием двух случайных блужданий будем называть процесс $(X_t, Y_t)_{t=0}^{\infty}$, в котором блуждания (X_t) и (Y_t) имеют одну и ту же матрицу вероятностей одношаговых переходов M, но, возможно, разные начальные распределения. При этом (X_t) и (Y_t) будем называть склеенными.

О п р е д е л е н и е 5. Совмещением склеенных блужданий (X_t) и (Y_t) назовем состояние $X_t = Y_t$. Склеивание любой пары блужданий всегда можно организовать таким образом, чтобы после первого совпадения блуждания оставались совпадающими, т. е. из того, что $X_t = Y_t$ следовало бы, что $X_s = Y_s\ \forall s \geq t$ [2]. Для такого склеивания определим время совмещения: $\tau_{\text{couple}} = \min\{t : X_t = Y_t\}$.

Пусть вероятности перехода случайных блужданий (X_t) и (Y_t) те же, что были при оценке снизу. Тогда можем утверждать следующее.

Л е м м а 1. *Справедливо следующее неравенство:* $d(P^{X_t}, \pi) \leq \mathbb{P}(\tau_{\text{couple}} > t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, согласно лемме 4.11 из [2], для двух случайных блужданий (X_t) и (Y_t) с (возможно) разными начальными точками, но одинаковыми матрицами вероятностей одношаговых переходов верно неравенство $\max d(P^{X_t}, P^{Y_t}) \geq d(P^{X^t}, \pi)$, где максимум берется по всем возможным парам таких блужданий. Во-вторых, теорема 5.2 из [2] утверждает, что если условие $X_s = Y_s \forall s > \tau_{\text{couple}}$ выполняется, то $d(P^{X_t}, P^{Y_t}) \leq \mathbb{P}(\tau_{\text{couple}} > t)$. Из двух неравенств следует желаемое.

Благодаря лемме 1 для оценки $\tau_{\text{mix}}(m, n, \varepsilon) = \min\{t : d(P^{X_t}, \pi) \leq \varepsilon\}$ нам достаточно оценить сверху $\mathbb{P}(\tau_{\text{couple}} > t)$. Из такой верхней оценки будет следовать аналогичная оценка на $d(P^{X_t}, \pi)$, а участвующее в ней t станет оценкой сверху для τ_{mix}.

Когда речь идет о блужданиях по графу Кэли S_n, в качестве аналогии блуждания обычно используется перемешивающаяся колода карт (положение i-го элемента в подстановке становится положением карты i в колоде). Можно продолжить эту аналогию на группу комплексных отражений, сказав, что карты теперь можно не только перемещать, но и поворачивать, и значения во второй компоненте отвечают как раз за поворот соответствующих карт. Для получения оценки на $\mathbb{P}(\tau_{\text{couple}} > t)$ нам нужно будет рассмотреть изменение состояния одной конкретной карты i в колодах X и Y. Последовательность ее состояний – тоже цепь Маркова, поэтому склеивание будем рассматривать отдельно для каждой пары карт. Однако в этом доказательстве нам понадобятся чуть более сильные свойства, чем сохранение положений карт одинаковыми после того, как произошло совмещение.

Совпадение состояний будем рассматривать отдельно для каждой компоненты. На каждом шаге сначала выбирается случайное отражение, одинаковое для обеих колод. Вероятности выбора – введенные ранее p_s и p_r, для которых $p_r + p_r + \sum_{i=1}^{n-1} p_s = 1$. Далее это отражение применяется (либо не применяется) с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если среди карт, которые оно затрагивает, есть совмещенные, то отражение применяется (не применяется) в обеих колодах. Иначе – применяется в одной и не применяется в другой. При этом получается, что вероятности перехода в новое состояние для каждой колоды зависят только от ее текущего состояния, но не от того, произошло ли уже совмещение. Значение вероятности применения $\frac{1}{2}$ нужно именно для того, чтобы матрицы вероятностей одношаговых переходов у построенных подобным образом процессов не различались до и после совмещения.

От правил параллельного перемешивания колод нам понадобится, чтобы даже после совмещения только по одной компоненте одинаковые карты из колод X и Y продолжали быть совмещенными по этой компоненте. Поскольку все возможные отражения затрагивают только одну из компонент, с обеспечением этого свойства проблем не возникает.

Пусть $T_1(i)$ и $T_2(i)$ – время, когда впервые произошло совмещение i-й карты по первой и второй компонентам соответственно, $\tau_{\text{couple}}(i)$ – по обеим компонентам. Для оценки $\mathbb{P}\left(\tau_{\text{couple}}(i) > t\right)$ дождемся сначала совмещения по первой компоненте и получим оценку $\mathbb{P}\left(T_1(i) > t\right)$, а уже затем получим оценку для второй компоненты: $\mathbb{P}\left(T_2(i) > t \mid X_0^1(i) = Y_0^1(i)\right)$ и добавим ее к первой. Такая последовательность выбрана потому, что вероятность изменения второй компоненты для карты зависит от значения первой (изменение возможно только когда карта находится на первой позиции). Намного проще становится работать с этой зависимостью, когда она хотя бы трансформируется в одинаковые вероятности перехода для обеих карт в конкретный момент времени.

У т в е р ж д е н и е 1. *При описанных выше правилах склеивания имеет место оценка*

$$\mathbb{P}\left(T_1(i) \geq \left\lceil \frac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil \left\lceil 2\log_2 n \right\rceil\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть случайное блуждание $\left(Z_t^1\right)$ определяется как разность между позициями карт i в двух колодах в момент времени t, т. е. $Z_t^1 = \mid X_t^1(i) - Y_t^1(i) \mid$. Вследствие правил, установленных для склеивания, $\mid Z_{t+1}^1 - Z_t^1 \mid \geq 1$ до совмещения по первой компоненте и $Z_t^1 = 0$ при всех $t \geq T_1(i)$.

Отражения r и r^{-1} не влияют на Z_t^1, а вот благодаря отражениям s_i оно может увеличиться или уменьшиться на 1. В большинстве случаев вероятности увеличения и уменьшения будут равны p_s. Действительно, если $X_t^1(i) = x$, $Y_t^1(i) = y$, то уменьшить Z_t^1 может либо транспозиция s_x, примененная к первой цепи, либо транспозиция s_{y-1}, примененная ко второй. Вероятность каждого из этих событий $p_s \cdot \frac{1}{2}$. Точно так же увеличить Z_t^1 может либо s_{x-1}, примененная к первой цепи, либо s_y, примененная ко второй, что в сумме даст вероятность p_s.

Заметим, что Z_t^1 не может увеличиться, например, когда оно уже равно $n - 1$. Менее очевидным может быть то, что вероятности увеличения Z_t^1 вообще зависят не только от его текущего значения. Действительно, транспозиций s_y и s_{x-1} может и не существовать, хотя $y = n$ или $x = 1$ – допустимые значения для позиций i-й карты. Иными словами, в то время как $\mathbb{P}\left(Z_{t+1}^1 = Z_t^1 - 1\right) = p_s$ для всех $Z_t^1 > 0$, для увеличения мы имеем всего лишь $\mathbb{P}\left(Z_{t+1}^1 = Z_t^1 + 1\right) \leq p_s$.

Нас интересует время, когда Z_t^1 впервые станет равно 0, но чтобы оценить его, мы перейдем к другому случайному блужданию – $\left(\hat{Z}_t^1\right)$, для которого потребуем $\mathbb{P}\left(\hat{Z}_{t+1}^1 = \hat{Z}_t^1 + 1\right) = p_s$ при $0 < \hat{Z}_t^1 < n-1$ (0 исключен, чтобы подчеркнуть, что после совмещения мы планируем оставлять $\left(X^1(i)\right)$, $\left(Y^1(i)\right)$ совмещенными). Это блуждание всегда будет не меньше $\left(Z_t^1\right)$, поэтому оценка, полученная для него, будет оценивать сверху время достижения 0 блужданием $\left(Z_t^1\right)$.

Итак, мы имеем блуждание $\left(\hat{Z}_t^1\right)$ со следующей матрицей вероятностей одношаговых переходов:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_s & 1-2p_s & p_s & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_s & 1-2p_s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-2p_s & p_s \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_s & 1-p_s \end{pmatrix}.$$

Обозначим h_k математическое ожидание времени, за которое блуждание первый раз достигнет 0, начавшись в k. Тогда можем записать систему:

$$\begin{cases} h_0 = 0, \\ h_k = p_s(h_{k-1}+1) + p_s(h_{k+1}+1) + (1-2p_s)(h_k+1), \quad 1 \le k \le n-2, \\ h_{n-1} = p_s(h_{n-2}+1) + (1-p_s)(h_{n-1}+1). \end{cases}$$

Обозначим $\Delta_k = h_k - h_{k-1}$, $1 \le k \le n-1$, и перепишем эту систему следующим образом:

$$\begin{cases} h_0 = 0, \\ \Delta_k - \Delta_{k+1} = \dfrac{1}{p_s}, \quad 1 \le k \le n-2, \\ \Delta_{n-1} = \dfrac{1}{p_s}. \end{cases}$$

Тогда для $k = 1, \ldots, n-2$ можем найти $\Delta_k = \dfrac{n-k}{p_s}$. Значит, $\Delta_1 = h_1 - h_0 = h_1 = \dfrac{n-1}{p_s}$, а $h_k = \dfrac{\sum_{n-1}^{n-k} j}{p_s} = \dfrac{(2n-1-k)k}{2p_s}$. Максимальное значение достигается как раз при $k = n-1$ и равно $\dfrac{n(n-1)}{2p_s}$, т. е. $\mathbb{E}\big(T_1(i)\big) \le \dfrac{n(n-1)}{2p_s}$.

Применим теперь неравенство Маркова: $\mathbb{P}\left(T_1(i) \ge \dfrac{n(n-1)}{p_s}\right) \le \dfrac{1}{2}$. Разобьем блуждание на блоки длины $\left\lceil \dfrac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil$. Вероятность неосуществления совмещения на каждом из таких блоков ограничена $\dfrac{1}{2}$. Поэтому если мы рассмотрим вероятность неосуществления совмещения на пути из $\lceil 2\log_2 n \rceil$ блоков, то получим

$$\mathbb{P}\left(T_1(i) \ge \left\lceil \frac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil \right) \le \frac{1}{n^2}.$$

Похожим образом поступим и со второй компонентой. В данном случае совмещение происходит только благодаря отражениям r и r^{-1}, причем интересующая нас карта должна оказаться на первой позиции в колоде в момент применения этих отражений. Поэтому рассматриваемый процесс разобьем на два, для которых будем оценивать число шагов по отдельности. Первый будет связан непосредственно с совмещением, т. е. применением отражений r и r^{-1}, когда на первой позиции в соответствующей колоде уже находится карта i. Здесь мы имеем случайное блуждание, принимающее значения от 0 до $m - 1$. Эти значения временно перестают меняться в периоды, когда применяется отражение s_1 и карта уходит с первой позиции. Первый процесс определим как то случайное блуждание, которое останется, если удалить из исходного такие периоды постоянства. Он будет цепью Маркова на множестве $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Второй процесс связан с перемещением карты i на первую позицию в случае, когда она не там. Он состоит из одинаковых блоков, заканчивающихся очередным применением s_1, которое возвращает карту i на первую позицию. Напомним, что здесь предполагается, что по первой компоненте i-е карты уже совмещены, т. е. отражения s_1 либо применяются к обеим колодам, либо не применяются ни к одной из них. В следующем утверждении приведена общая оценка для второй компоненты.

Утверждение 2. *При описанных выше правилах склеивания верна оценка*

$$\mathbb{P}\left(T_2(i) > \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil^2 + \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil \right) \middle| X_0^1(i) = Y_0^1(i) \right) < \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^4}.$$

Для доказательства этого утверждения докажем две леммы, касающиеся описанных выше двух процессов. В первом процессе мы имеем следующее.

Лемма 2. *Пусть $T_{2,1}(i)$ – число шагов в первом процессе, за которое будет достигнуто совмещение i-й карты по второй компоненте, при условии, что $X_0^1(i) = Y_0^1(i) = 1$. Тогда при описанных правилах склеивания выполняется неравенство*

$$\mathbb{P}\left(T_{2,1}(i) \geq \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left\lceil 2\log_2 n \right\rceil\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Доказательство. Так же, как и для первой компоненты, перейдем к рассмотрению расстояния между позициями i-й карты. Однако из-за того, что правила перехода теперь другие, соответствующие, скорее, вращению, чем перемещению, положение карты i – это блуждание, скорее, по кругу, чем по прямой. Определим отклонение как

$$Z_t^{2,1} = \min\left\{| X_t^2(i) - Y_t^2(i) |, m - | X_t^2(i) - Y_t^2(i) |\right\}.$$

Это случайное блуждание на точках $0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]$. Чтобы оно изменило значение в следующий момент времени, должно быть выбрано отражение r или r^{-1}, что, как мы знаем, произойдет с вероятностями p_r. Применение любого из остальных отражений можно рассматривать как шаг, на котором не происходит изменений. Отражение s_1, убирающее карту с первой позиции, относится еще к этому процессу, т. е. мы можем считать, что с вероятностью хотя бы $1 - 2p_r$ в $\left(Z_t^{2,1}\right)$ происходит шаг, на котором его значение не меняется.

Распишем теперь вероятности перехода для $\left(Z_t^{2,1}\right)$. Если $Z_t^{2,1} = 0$, то $\left(X_t^2(i)\right)$, $\left(Y_t^2(i)\right)$ совмещены и $Z_{t+1}^{2,1}$ тоже может оказаться только 0. Для $Z_t^{2,1} = 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right] - 1$ блуждание на следующем шаге увеличится или уменьшится на 1 с вероятностями p_r и не изменит значения с вероятностью $1 - 2p_r$. Ситуация с $Z_t^{2,1} = \left[\frac{m}{2}\right]$ отличается для четного и нечетного m. Если m четно, то максимум $Z_t^{2,1}$ достигается только при одном варианте взаимного расположения i-х карт, и любой сделанный шаг уменьшит $Z_t^{2,1}$. Поэтому $Z_{t+1}^{2,1} = \left[\frac{m}{2}\right] - 1$ с вероятностью $2p_r$ и $Z_{t+1}^{2,1} = \left[\frac{m}{2}\right]$ с вероятностью $1 - 2p_r$. Если же m нечетное, то существует два варианта взаимного расположения i-х карт с расстоянием $\left[\frac{m}{2}\right]$, и одно из отражений r, r^{-1} как раз осуществит переход из первого варианта во второй. Следовательно, $Z_{t+1}^{2,1} = \left[\frac{m}{2}\right] - 1$ с вероятностью p_r и $Z_{t+1}^{2,1} = \left[\frac{m}{2}\right]$ с вероятностью $1 - p_r$.

Теперь повторим те же рассуждения, что и для первой компоненты. Составим систему уравнений, чтобы оценить время, через которое $\left(Z_t^{2,1}\right)$ впервые достигнет 0. Для четного m имеем:

$$\begin{cases} h_0 = 0, \\ h_k = p_r(h_{k-1} + 1) + p_r(h_{k+1} + 1) + (1 - 2p_r)(h_k + 1), \quad 1 \leq k \leq \frac{m}{2}, \\ h_{\frac{m}{2}} = 2p_r\left(h_{\frac{m}{2}-1} + 1\right) + (1 - 2p_r)\left(h_{\frac{m}{2}} + 1\right). \end{cases}$$

Для нечетного m система примет следующий вид:

$$\begin{cases} h_0 = 0, \\ h_k = p_r(h_{k-1} + 1) + p_r(h_{k+1} + 1) + (1 - 2p_r)(h_k + 1), \quad 1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}, \\ h_{\frac{m-1}{2}} = p_r\left(h_{\frac{m-3}{2}} + 1\right) + (1 - p_r)\left(h_{\frac{m-1}{2}} + 1\right). \end{cases}$$

Решив системы тем же образом, что и для первой компоненты, находим

$$h_{\frac{m}{2}} = \frac{m(m+4)}{8p_r}$$

для четного m,

$$h_{\frac{m}{2}} = \frac{(m-1)(m+1)}{8p_r}$$

для нечетного m.

Повторим и остальные шаги, использовавшиеся для первой компоненты. Количество повторяющихся блоков блуждания ($\lceil 2\log_2 n \rceil$) обусловлено количеством карт и желаемой оценкой на вероятность, поэтому оно останется таким же:

$$\mathbb{E}\left(T_{2,1}(i)\right) \le \frac{m(m+4)}{8p_r}, \qquad \mathbb{P}\left(T_{2,1}(i) \ge \frac{m(m+4)}{4p_r}\right) \le \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}\left(T_{2,1}(i) \ge \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) \le \frac{1}{n^2}.$$

Теперь перейдем к участкам, когда карта i не находится на 1-й позиции и должна на нее попасть. Можно заметить, что в большинстве случаев мы точно знаем, что на момент начала такого участка карта находится на второй позиции – ведь мы начали отслеживать ее положение, как только она покинула первую. Исключение составляет самый первый из подобных участков.

Лемма 3. *При условии, что* $\left(X_t^1(i)\right)$ *и* $\left(Y_t^1(i)\right)$ *совмещены, число шагов, необходимое, чтобы i-я карта в обеих колодах переместилась со второй позиции на первую, можно оценить следующим образом:*

$$\mathbb{P}\left(T_{2,2}(i) \ge \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) \le \frac{1}{n^2}.$$

Доказательство. Состояние, к которому мы стремимся в этот раз, – не совмещение, а нахождение на 1-й позиции, поэтому блуждание $\left(Z_t^{2,2}\right)$ определим как разность $X_t^1(i) - 1$. Снова составим систему для h_k – математических ожиданий времени, через которое $\left(Z_t^{2,2}\right)$ достигнет 0. Здесь вероятности увеличения и уменьшения $Z_t^{2,2}$ на следующем шаге уже зависят только от текущего состояния, а именно: при $Z_t^{2,2}$ от 1 до $n-2$ они равны $p_s/2$, при $Z_t^{2,2} = n-1$ остается только вероятность уменьшения, равная $p_s/2$. Что происходит после $Z^{2,2} = 0$ нас здесь не интересует, поэтому будем считать, что из 0 возможен переход только в 0. Итак, получаем систему

$$\begin{cases} h_0 = 0, \\ h_k = \dfrac{p_s}{2}(h_{k-1}+1) + \dfrac{p_s}{2}(h_{k+1}+1) + (1-p_s)(h_k+1), \quad 1 \le k \le n-2, \\ h_{n-1} = \dfrac{p_s}{2}(h_{n-2}+1) + \left(1 - \dfrac{p_s}{2}\right)(h_{n-1}+1). \end{cases}$$

Ее решения: $h_k = \dfrac{(2n-1-k)k}{p_s}$. В данной лемме нам нужно $k = 1$. Все так же применив неравенство Маркова и рассмотрев $\lceil 2\log_2 n \rceil$ блоков блуждания, получим

$$\mathbb{P}\left(T_{2,2}(i) \ge \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) \le \frac{1}{n^2}.$$

Лемма 4. *При условии, что* $\left(X_t^1(i)\right)$ *и* $\left(Y_t^1(i)\right)$ *совмещены, число шагов, необходимое, чтобы i-я карта в обеих колодах переместилась с произвольной позиции на первую, можно оценить следующим образом:*

$$\mathbb{P}\left(T'_{2,2}(i) \geq \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Неравенство получается, если в лемме 3 вместо $k = 1$ взять $k = n - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 2. Отрезки перемещения карты со второй позиции на первую в худшем случае будут вставлены между любыми двумя моментами, когда карта находилась на первой позиции. Поэтому найденные в леммах 3 и 4 значения можно рассматривать как длины каждого шага в том блуждании, которое совершается на второй компоненте, с числом шагов $T_{2,1}(i)$. Таким образом, теперь, чтобы получить оценку для всего $T_2(i)$, нам нужно перемножить $T_{2,1}(i)$ и $T_{2,2}(i)$:

$$\mathbb{P}\left(T_{2,1}(i) \cdot T_{2,2}(i) > \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil \cdot \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(T_{2,1}(i) \cdot T_{2,2}(i) \leq \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil \cdot \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) \leq$$

$$\leq 1 - \mathbb{P}\left(T_{2,1}(i) \leq \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) \mathbb{P}\left(T_{2,2}(i) \leq \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(T_{2,1}(i) > \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right)\right)\left(1 - \mathbb{P}\left(T_{2,2}(i) > \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right)\right) \leq \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}.$$

Далее вспомним, что самый первый шаг, вероятно, обладал длиной побольше, и добавим к этой оценке $\mathbb{P}\left(T'_{2,2}(i) > \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil\right) < \frac{1}{n^2}$.

Итак,

$$\mathbb{P}\left(T_2(i) > \left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil^2 + \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil \,\middle|\, X_0^1(i) = Y_0^1(i)\right) < \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^4}.$$

Мы получили оценки времени совмещения по каждой из компонент, из которых теперь можем вывести оценку на время полного совмещения $\left(X_t^1(i)\right)$ и $\left(Y_t^1(i)\right)$:

$$\tau_{\text{couple}}(i) \leq T_2(i) + T_1(i),$$

$$F(m, n, p_s, p_r) := \lceil 2\log_2 n \rceil \left(\left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2\log_2 n \rceil + \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil + \left\lceil \frac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil\right),$$

$$\mathbb{P}\left(\tau_{\text{couple}}(i) > F(m, n, p_s, p_r)\right) < \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^4}.$$

Но карт всего n, и такие совмещения по каждой из них независимы друг от друга. Поэтому оценка τ_{couple} не меняется, а оценка вероятности умножается на n. Получаем

$$\mathbb{P}\left(\tau_{\text{couple}} > F(m, n, p_s, p_r)\right) < \frac{4}{n} - \frac{1}{n^3} < \frac{4}{n}.$$

Это значит, что по лемме 1 $d(P^{X_t}, \pi) \leq \frac{4}{n}$, где $t = F(m, n, p_s, p_r)$. Мы нашли одно t, при котором выполняется это неравенство, а τ_{mix} является минимумом из таких t. Следовательно,

$$\tau_{\text{mix}}\left(m, n, \frac{4}{n}\right) \leq F(m, n, p_s, p_r).$$

Однако изначально у τ_{mix} был еще параметр ε. Здесь ему соответствует величина, зависящая от n, поэтому при переходе к оценке $\tau_{\text{mix}}(m,n,\varepsilon)$ появляется дополнительное условие о связи n и ε:

$$\tau_{\text{mix}}(m,n,\varepsilon) \le F(m,n,p_s,p_r)$$

для $n \ge \frac{4}{\varepsilon}$, что завершает доказательство утверждения 2, а вместе с ним и теоремы 2.

Список использованных источников

1. Aldous, D. J. Random walks on finite groups and rapidly mixing Markov chains / D. J. Aldous // Séminaire de Probabilités XVII 1981/82. Lecture Notes in Mathematics / eds. J. Azéma, M. Yor. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1983. – Vol. 986. – P. 243–297. https://doi.org/10.1007/BFb0068322

2. Levin, D. A. Markov Chains and Mixing Times / D. A. Levin, Y. Peres, E. L. Wilmer. – American Mathematical Society, 2009. – 371 p. https://doi.org/10.1090/mbk/058

3. Wilson, D. B. Mixing times of Lozenge tiling and card shuffling Markov chains / D. B. Wilson // Ann. Appl. Probability. – 2004. – Vol. 14, № 1. – P. 274–325. https://doi.org/10.1214/aoap/1075828054

4. Durret, R. Shuffling chromosomes / R. Durret // J. Theor. Probability – 2003. – Vol. 16, № 3. – P. 725–750. https://doi.org/10.1023/a:1025676617383

5. Jao, D. Expander graphs based on GRH with an application to elliptic curve cryptography / D. Jao, S. D. Miller, R. Venkatesan // J. Number Theory. – 2009. – Vol. 129, № 6. – P. 1491–1504. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2008.11.006

6. Vaskouski, M. Resistance Distances in Cayley Graphs on Symmetric Groups / M. Vaskouski, A. Zadorozhnyuk // Discrete Appl. Math. – 2017. – Vol. 227. – P. 121–135. https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.04.044

7. Васьковский, М. М. Асимптотическое поведение резисторных расстояний в графах Кэли / М. М. Васьковский, А. О. Задорожнюк // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 2. – С. 140–146. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146.

8. Sauerwald, T. Randomized Protocols for Information Dissemination / T. Sauerwald. – University of Padeborn, 2008. – 160 p.

9. Васьковский, М. М. О случайных блужданиях на графах Кэли групп комплексных отражений / М. М. Васьковский // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 3. – С. 51–56. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-51-56

10. Кемени, Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл; пер. с англ. С. А. Молчанова, Н. Б. Левиной, Я. А. Когана; под ред. А. А. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 272 с.

11. Broué, M., Introduction to Complex Reflection Groups and Their Braid Groups / M. Broué. – Springer, 2010. – 144 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-11175-4

References

1. Aldous D. Random walks on finite groups and rapidly mixing markov chains. Azéma J., Yor M. (eds). *Séminaire de Probabilités XVII 1981/82. Lecture Notes in Mathematics*, *vol 986*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 243–297. https://doi.org/10.1007/BFb0068322

2. Levin D. A., Peres Y., Wilmer E. L. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2009. 371 p. https://doi.org/10.1090/mbk/058

3. Wilson D. B. Mixing times of Lozenge tiling and card shuffling Markov chains. *Annals of Applied Probability*, 2004, vol. 14, no. 1, pp. 274–32. https://doi.org/10.1214/aoap/1075828054

4. Durret R. Shuffling chromosomes. *Journal of Theoretical Probability*, 2003, vol. 16, no. 3, pp. 725–750. https://doi.org/10.1023/a:1025676617383

5. Jao D., Miller. S. D., Venkatesan R. Expander graphs based on GRH with an application to elliptic curve cryptography. *Journal of Number Theory*, 2009, vol. 129, no. 6, pp. 1491–1504. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2008.11.006

6. Vaskouski M., Zadorozhnyuk A. Resistance Distances in Cayley Graphs on Symmetric Groups. *Discrete Applied Mathematics*, 2017, vol. 227, pp. 121–135. https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.04.044

7. Vaskouski M. M., Zadorozhnyuk A. O. Asymptotic behavior of resistance distances in Cayley graphs. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 2, pp. 140–146 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-2-140-146

8. Sauerwald T. *Randomized Protocols for Information Dissemination*. University of Padeborn, 2008. 160 p.

9. Vaskouski M. Random walks on Cayley graphs of complex reflection groups. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2021, no. 3, pp. 51–56 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-51-56

10. Kemeny J. G., Snell J. L. *Finite Markov Chains*. New York, Van Nostrand Comp. Int., 1960.

11. Broué M. *Introduction to Complex Reflection Groups and Their Braid Groups*. Springer, 2010. 144 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-11175-4

Информация об авторе

Задорожнюк Анна Олеговна – аспирант, ассистент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: a_zadorozhnuyk@mail.ru

Information about the author

Hanna A. Zadarazhniuk – Postgraduate Student, Assistant of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a_zadorozhnuyk@mail.ru