

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

**ФИЗИКА**  
**PHYSICS**

УДК 530.145.1,537.633.2  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-71-80>

Поступила в редакцию 03.01.2023  
Received 03.01.2023

**Ю. А. Курочкин<sup>1</sup>, И. Ю. Рыбак<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Республика Беларусь*

<sup>2</sup>*Институт астрофизики и космических наук, Порту, Португалия*

**ЭФФЕКТ ХОЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО**

**Аннотация.** Рассмотрена задача классического и квантового движения заряженной частицы в двумерном пространстве Лобачевского при наличии аналогов однородного магнитного и электрического полей. На ее основе получены выражения для проводимости классического и квантового эффекта Холла. Показано, что в пространстве Лобачевского наличие небольшого электрического поля приводит к смещению ступенчатой структуры квантовой проводимости Холла.

**Ключевые слова:** пространство Лобачевского, эффект Холла

**Для цитирования.** Курочкин, Ю. А. Эффект Холла в пространстве Лобачевского / Ю. А. Курочкин, И. Ю. Рыбак // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 71–80. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-71-80>

**Yurii A. Kurochkin<sup>1</sup>, Ivan Yu. Rybak<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

<sup>2</sup>*Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço, Porto, Portugal*

**THE HALL EFFECT IN LOBACHEVSKY SPACE**

**Abstract.** In this paper, we consider the problem of the classical and quantum movement of a charged particle in a two-dimensional Lobachevsky space in the presence of analogues of uniform magnetic and electric fields. Based on this consideration, equations for the conductivity for the classical and quantum Hall effect are obtained. It is shown that in Lobachevsky space the presence of a small electrical field leads to a shift of the stair structure of the quantum Hall conductivity.

**Keywords:** Lobachevsky space, Hall effect

**For citation.** Kurochkin Yu. A., Rybak I. Yu. The Hall effect in Lobachevsky space. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 71–80 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-71-80>

**Введение.** Модели Пуанкаре двумерного пространства Лобачевского и задача о движении заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле в евклидовом пространстве в проекции на плоскость, перпендикулярную вектору индукции поля, находятся в интересной корреляции. Классические траектории задачи о движении в постоянном, однородном поле – окружности в моделях Пуанкаре, реализованных в круге и на полуплоскости евклидова пространства, выступают в качестве прямых плоскости Лобачевского. Поскольку аналоги постоянного магнитного поля могут быть введены в пространстве Лобачевского, то встает вопрос исследования подобия и различия теоретических предсказаний. Развитие возможностей создания различных свойств материалов привело к реализации множества теоретических идей. Стало очевидно, что

физика конденсированного состояния может эффективно воссоздавать движение частиц в неевклидовых пространствах, в особенности гиперболического типа [1–5]. Это делает актуальным исследование задачи о квантовом эффекте Холла в пространстве Лобачевского. Двумерная задача квантовой механики для заряженной частицы в пространстве Лобачевского при наличии внешнего однородного магнитного поля изучалась в ряде работ. Впервые она была рассмотрена и решена в [6]. В [7] было дано классическое и квантовое описание проблемы с нахождением спектра состояний. В частности, было показано, что  $SL(2, R)$ -симметрия является динамической, когда рассматривается вся плоскость Лобачевского. Спектр классифицирован согласно подходящему представлению группы  $SL(2, R)$ . Другой подход для данной проблемы на основе интеграла по траекториям был представлен в [8–10]. Стоит отметить, что классическая и квантовая задачи движения заряженной частицы в трехмерном пространстве Лобачевского при наличии аналогов однородных электрических и магнитных полей были подробно исследованы в [11–14]. Изучение движения заряженной частицы в пространстве Лобачевского при наличии внешнего однородного магнитного поля позволило получить некоторые результаты для эффекта Холла. В частности, была исследована волновая функция основного уровня Ландау для искривленных пространств и на ее основе построена волновая функция Лафлина для эффекта Холла [15]. Также было показано, что проводимость Холла, по аналогии с плоским пространством, может быть связана с геометрическим инвариантом с определенным топологическим индексом [16]. В [17] было изучено влияние кривизны и температуры в пространстве Лобачевского на ступенчатую структуру проводимости Холла. Однако ни одна из этих работ не рассматривала явное присутствие внешнего электрического поля и его влияния на уровни Ландау и соответствующую проводимость эффекта Холла. Данное исследование призвано восполнить этот пробел и явно описать классический и квантовый эффекты Холла при наличии внешнего магнитного и электрического полей в пространстве Лобачевского.

**Классический эффект Холла в пространстве Лобачевского. Магнитное и электрическое поля в пространстве Лобачевского.** Двумерное пространство Лобачевского можно вложить в трехмерное псевдоевклидово пространство. В этом случае объемлющие координаты  $U_0, U_1, U_2$  задаются следующими выражениями:

$$U_1^2 + U_2^2 - U_0^2 = -\rho^2, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} \left( \rho e^{y/\rho} + \left( \frac{x^2}{\rho^2} + 1 \right) \rho e^{-y/\rho} \right), \\ U_1 &= \frac{1}{2} \left( \rho e^{y/\rho} + \left( \frac{x^2}{\rho^2} - 1 \right) \rho e^{-y/\rho} \right), \\ U_2 &= x e^{-y/\rho}, \end{aligned} \quad (2)$$

определенные в интервале  $-\infty < x, y < \infty$ .

Воспользовавшись соотношениями (2), мы можем записать пространственную часть интервала в квазидекартовых координатах:

$$dl^2 = e^{-2y/\rho} dx^2 + dy^2, \quad (3)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны пространства. Переход к евклидову пространству реализуется в пределе  $\rho \rightarrow \infty$ .

Внешнее магнитное и электрическое поля, являющиеся решениями уравнений Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{|g|} F^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (4)$$

для пространства, определяемого метрикой (3), могут быть выражены через вектор-потенциалы

$$A_x = \rho B(e^{-y/\rho} - 1), \quad A_t = \mathcal{E}\rho(e^{y/\rho} - 1), \quad (5)$$

где константы  $B$  и  $\mathcal{E}$  определяют напряженности магнитного и электрического полей, которые переходят в однородные поля для плоского пространства. Стоит отметить, что решение (5) удовлетворяет ковариантному условию калибровки Лоренца.

**Классическое движение в однородных магнитных и электрических полях в пространстве Лобачевского.** Начнем рассмотрение с классического нерелятивистского лагранжиана для частицы в магнитном и электрическом полях, заданных (5),

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(e^{-2y/\rho}\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \rho\frac{qB}{c}\dot{x}(e^{-y/\rho} - 1) - q\mathcal{E}\rho(e^{y/\rho} - 1), \quad (6)$$

где  $m$  – масса частицы,  $q$  – заряды частицы,  $c$  – скорость света в вакууме.

Уравнения движения для лагранжиана (6) записываются как

$$\begin{aligned} \ddot{x}e^{-2y/\rho} &= \frac{2}{\rho}e^{-2y/\rho}\dot{x}\dot{y} + \omega e^{-y/\rho}\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{q\mathcal{E}}{m}e^{y/\rho} - \omega e^{-y/\rho}\dot{x} - \frac{1}{\rho}e^{-2y/\rho}\dot{x}^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\omega = \frac{qB}{mc}$ .

Сделав замену переменной, положив  $\tilde{u} = \rho e^{-y/\rho}$  и проинтегрировав (7), выбирая постоянную интегрирования таким образом, чтобы правильно воспроизводился плоский предел, можно переписать уравнения движения (7) в упрощенном виде:

$$\ddot{\tilde{u}} + \omega^2 - \frac{q\mathcal{E}}{m\rho} = \frac{\omega^2 + \dot{\tilde{u}}^2}{\tilde{u}}, \quad \dot{x} = \omega\rho\frac{1 - \tilde{u}}{\tilde{u}^2}. \quad (8)$$

Решение уравнений (8) при учете начальных условий записывается как

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{q\mathcal{E}/m + \omega^2\rho - \cos(t\Omega)}{\Omega^2\rho}, \\ x &= \frac{\Omega\rho}{\omega} \left[ \frac{2qm\mathcal{E}}{\Omega\omega\rho} \arctg\left(\frac{m^{-2} + q\mathcal{E}/m + \omega^2\rho}{\Omega\omega\rho} \operatorname{tg}[t\Omega/2]\right) + \frac{m\sin(t\Omega)}{q\mathcal{E}/m + \rho\omega^2 - \cos(t\Omega)} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Omega^2 = \frac{(q\mathcal{E}/m + \rho\omega^2)^2 - m^{-4}}{\rho^2\omega^2}$ . При переходе в плоское пространство  $\Omega^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \omega^2$ . При этом в данном пределе уравнения для переменных  $(x, y)$  переходят в хорошо известные выражения для движения заряженной частицы в постоянном магнитном и электрическом полях [18]:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} y = \frac{c\mathcal{E}}{B\omega} + m^2 \frac{\cos(t\omega)}{\omega^2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} x = t \frac{c\mathcal{E}}{B} + m^2 \frac{\sin(t\omega)}{\omega^2}. \quad (10)$$

Движение заряженной частицы в пространстве Лобачевского для разных значений электрического напряжения представлены на рис. 1. Поведение электрона при отсутствии внешнего электрического поля совпадает с классическим случаем, рассмотренным в статье [7].

**Классический эффект Холла в пространстве Лобачевского.** Плотность тока в классическом случае можно связать со скоростью заряженной частицы следующим соотношением:

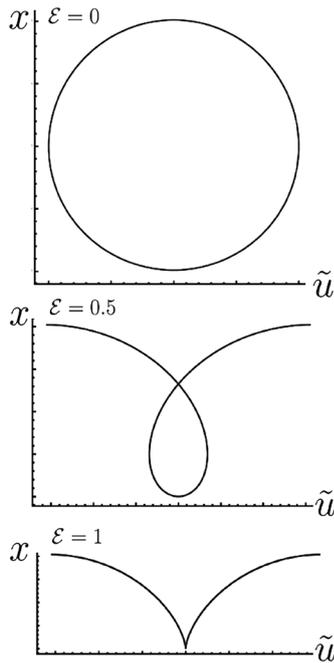


Рис. 1. Траектории движения при  $B = 10, q, c, m, \rho = 1$

Fig. 1. Movement trajectories for  $B = 10, q, c, m, \rho = 1$

$$j^\mu = -n_e q \dot{x}^\mu, \tag{11}$$

где  $n_e$  – плотность заряженных частиц. Свободные электроны могут рассеиваться друг на друге, что может быть учтено за счет добавления слагаемого в виде  $\frac{m\dot{x}^\mu}{\tau}$ , где  $\tau$  – среднее время рассеяния. Мы также требуем стационарности процесса (среднее ускорение электронов равно нулю), которое накладывает ограничение в виде уравнения для геодезической

$$\ddot{x}^\mu = \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \rightarrow \ddot{x} = \frac{2\dot{x}\dot{y}}{\rho} = 0, \quad \ddot{y} = -\frac{e^{2y/\rho} \dot{x}^2}{\rho}. \tag{12}$$

Уравнения движения (7) с учетом условия стационарности (12) (связано с рассеянием носителей зарядов) можно записать через плотность тока (11) в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\omega\tau e^{-y/\rho} \\ \omega\tau e^{-y/\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{q^2 \tau n_e}{mc} e^{y/\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Уравнение (13) – закон Ома в пространстве Лобачевского: плотность тока линейно пропорциональна электрической напряженности  $j^\mu = \sigma_\nu^\mu \mathcal{E}^\nu$ , где  $\sigma_\nu^\mu$  – тензор проводимости, а обратная ей величина – удельное сопротивление

$$\tilde{\rho} = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{DC} e^{y/\rho}} \begin{pmatrix} 1 & -\omega\tau e^{y/\rho} \\ \omega\tau e^{y/\rho} & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

При этом  $\sigma_{DC} = \frac{q^2 n_e \tau}{m}$ .

Из (14) видно, что удельное сопротивление, определяемое недиагональными элементами матрицы, сводится к такому же, как и в плоском пространстве, выражению (см. [19])  $\tilde{\rho}_{xy} = \frac{B}{qcn_e}$  и не зависит от времени рассеяния  $\tau$  (не зависит от чистоты образца). Данный вывод представляет фундаментальное свойство материи – линейный рост сопротивления с увеличением магнитного поля  $B$  (рис. 2).

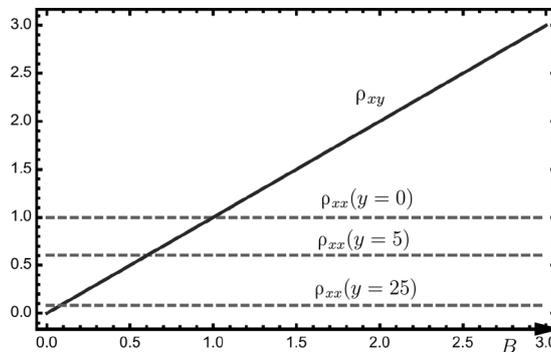


Рис. 2. Удельное сопротивление по направлениям "xy" и "xx" в зависимости от напряженности магнитного поля  $B$  и координаты "y" с параметрами  $\rho = 10, m, c, q, \tau, n_e = 1$

Fig. 2. Resistivity in directions "xy" and "xx" depending on the magnetic field strength and coordinate "y" with parameters  $\rho = 10, m, c, q, \tau, n_e = 1$

В то же время  $\tilde{\rho}_{xx} = \frac{1}{\sigma_{DC} e^{y/\rho}}$  не зависит от величины магнитного поля, а благодаря эффекту кривизны удельное сопротивление стремится к нулю на бесконечности.

**Квантовый эффект Холла в пространстве Лобачевского. Уровни Ландау для пространства Лобачевского.** Гамильтониан квантовомеханической задачи для электрона в электромагнитном поле в искривленном пространстве в общем виде может быть записан (см., напр., [20]) как

$$H = \frac{1}{2m\sqrt{g}} \left( -i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \right) \sqrt{g} g^{\mu\nu} \left( -i\hbar\partial_\nu - \frac{q}{c} A_\nu \right) + \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\mathcal{R}}{2}, \quad (15)$$

где  $\mathcal{R}$  – скалярная кривизна Риччи, которая для метрики (3) принимает вид  $\mathcal{R} = -\frac{2}{\rho^2}$ . Воспользуемся выражениями для метрики (3) и вектор-потенциалами для электромагнитного поля (5), тогда гамильтониан (15) приобретет вид

$$H = \kappa \left( -e^{2y/\rho} \partial_x^2 + 2ipb(e^{y/\rho} - e^{2y/\rho}) \partial_x + \rho^2 b^2 (e^{y/\rho} - 1)^2 - \partial_y^2 + \frac{1}{\rho} \partial_y - \frac{1}{4\rho^2} \right), \quad (16)$$

где  $b = \frac{qB}{\hbar c}$ ,  $\kappa = \frac{\hbar^2}{2m}$ .

Для пространства Лобачевского, заданного метрикой (3), можно ввести операторы, соответствующие двум трансляциям и вращению:

$$T_x = -i\partial_x, \quad T_y = -i\frac{x}{\rho}\partial_x - i\partial_y, \quad R_{xy} = -i \left( \rho \frac{e^{2y/\rho}}{2} - \frac{x^2}{2\rho} - \frac{\rho}{2} \right) + ix\partial_y. \quad (17)$$

С учетом магнитного поля (5) операторы в (17) модифицируются следующим образом:

$$\tilde{T}_x = T_x - \frac{b}{2} \left( \frac{x^2}{\rho} - \rho(e^{y/\rho} - 1)^2 \right), \quad \tilde{T}_y = T_y + bx, \quad \tilde{R}_{xy} = R_{xy} - \frac{b}{2} \left( x^2 - \rho^2(e^{2y/\rho} - 2e^{y/\rho} - 1) \right). \quad (18)$$

Введем новые операторы, построенные, как линейные комбинации (18),

$$J_0 = -\tilde{R}_{xy}, \quad J_1 = -\tilde{T}_x - \frac{\tilde{R}_{xy}}{\rho}, \quad J_2 = -\tilde{T}_y, \quad (19)$$

которые подчиняются перестановочным соотношениям

$$[J_0, J_1] = iJ_2, \quad [J_0, J_2] = -iJ_1, \quad [J_1, J_2] = -iJ_0 / \rho^2, \quad (20)$$

и, следовательно, образуют алгебру Ли группы  $SU(1,1)$ .

Алгебра (20) содержит инвариант Казимира, пропорциональный гамильтониану задачи

$$b^2 \rho^2 - \frac{H}{\kappa} - \frac{1}{4\rho^2} = \frac{J_0^2}{\rho^2} - J_1^2 - J_2^2. \quad (21)$$

Таким образом, задача имеет симметрию, выражающуюся алгеброй Ли группы  $SU(1,1)$  при наличии и отсутствии магнитного поля. В плоском пределе операторы алгебры (20) переходят в алгебру Вейля – Гейзенберга.

Величина оператора Казимира (21) дает различные представления группы  $SU(1,1)$  и соответствующие спектры значений гамильтониана  $H$ . Так, для отрицательных значений оператор

Казимира имеет непрерывный спектр значений (основная серия [21]) и дискретный, когда оператор Казимира положителен [22]. Дополнительная непрерывная серия возникает тогда, когда в операторе Казимира один из инфинитезимальных операторов мнимый. Такая ситуация возможна, только если магнитное поле (или кривизна) каким-то образом имеет действительную и мнимую компоненты [22].

**Уровни Ландау для пространства Лобачевского в магнитном и электрическом полях.** Уравнение движения для гамильтониана (15) при наличии электрического поля, заданного уравнением (5), имеет вид

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + q(e^{y/\rho} - 1) \right) \Psi = H\Psi. \quad (22)$$

При подстановке волновой функции в виде  $\Psi = e^{-iEt/\hbar} e^{ik_x x} \varphi(y)$  и введении новой переменной  $u = e^{y/\rho}$  уравнение движения приобретает вид

$$\partial_u^2 \varphi = \left( A^2 - \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2} \right) \varphi, \quad (23)$$

где

$$A = \rho(k_x + b\rho), \quad B = \rho^3 (\mathcal{F} + 2b(k_x + b\rho)), \quad C = \rho^2 (\mathcal{F}\rho - \epsilon) + \left( b^2 \rho^4 - \frac{1}{4} \right), \quad \epsilon = E/\kappa, \quad \mathcal{F} = q\mathcal{E}/\kappa.$$

Решение уравнения (23) можно искать в виде степенного ряда, который собирается в гипергеометрическую функцию, которая в свою очередь может быть представлена в виде многочленов Лагерра:

$$\Psi_n = N e^{-iEt/\hbar} e^{ik_x x} e^{-z} z^\gamma L_n^{2\gamma-1}(2z), \quad (24)$$

где

$$N^2 = \frac{(2\gamma-1)n!}{4^{1-\gamma} \pi \Gamma(n+2\gamma)A}, \quad z = \rho(k_x + b\rho)u, \quad n = \frac{B}{2A} - \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4C}).$$

Дискретные уровни энергии даются выражением

$$E_n = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 - mc^2 \frac{\mathcal{E}^2}{B^2} \mathcal{B}_\rho^2 + q\mathcal{E} l_B^2 \mathcal{B}_\rho \left( k_x + \frac{n+1/2}{\rho} \right), \quad (25)$$

где

$$B_\rho = \left( 1 + \frac{k_x l_B^2}{\rho} \right)^{-1}, \quad l_B^2 = \frac{\hbar c}{qB}.$$

Переход в плоский предел в (25) воспроизводит результат для плоского пространства [19]. Существенной особенностью пространства Лобачевского является то, что дискретный спектр переходит в непрерывную серию при энергии, превышающей  $E_{\max} = \frac{m\omega^2}{2} + q\mathcal{E}\rho$  с максимальным квантовым уровнем  $n_{\max} = l_B^{-2} \rho^2 - \frac{1}{2} + \frac{q\mathcal{E}}{\hbar\omega} B_\rho$ . Число уровней в зависимости от  $k_x$  уменьшается на величину  $\frac{q\mathcal{E}}{\hbar\omega}$ , а энергия при больших значениях  $k_x$  выходит на плато и ведет себя так же, как при  $\mathcal{E} = 0$ , но смещенное на величину  $q\mathcal{E}\rho$  (рис. 3).

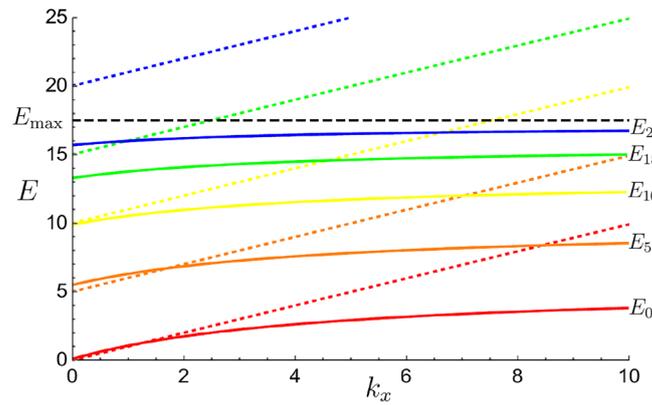


Рис. 3. Сплошные линии обозначают уровни энергии в зависимости от  $k_x$  при значении параметров  $q, \hbar, c, B, m, \mathcal{E} = 1$ , пунктирные линии соответствуют уровням для плоского пространства, а штриховая линия – максимальному значению энергии  $E_{\max}$

Fig. 3. Solid lines depict the energy levels depending on  $k_x$ , with parameter values:  $q, \hbar, c, B, m, \mathcal{E} = 1$ , the dotted lines correspond to the levels for a flat space, and the dashed line depicts the maximum energy value  $E_{\max}$

**Квантовый эффект Холла в пространстве Лобачевского при малом токе.** Дискретный спектр энергетических уровней (26) при ненулевой напряженности электрического поля  $\mathcal{E} \neq 0$  зависит от двух квантовых чисел –  $n, k_x$ . Таким образом, наличие внешнего электрического поля снимает вырождение по квантовому числу  $k_x$ . Однако в сравнении с плоским пространством спектр уровней выходит на плато и перестает зависеть от  $k_x$ , что показано на рис. 3. В связи с этим мы рассмотрим случай, когда основной вклад в эффект Холла дается частицами с большим значением  $k_x$ .

Локальная плотность квантовых состояний дискретного спектра для двумерного случая может быть представлена как мнимая часть от функции Грина [23]:

$$n(E) = \frac{1}{\pi S} \int \text{Im} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, x, E + i\varepsilon) \right] d^2x, \quad (26)$$

где  $S$  – площадь поверхности рассматриваемого образца, а мнимая часть функции Грина может быть записана как

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, x, E + i\varepsilon) \right] &= \sum_{0 < n < n_{\max}} \int_{-b\rho}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left[ \frac{|\Psi_n|^2}{E - E_n + i\varepsilon} \right] dk_x = \\ &= \sum_{0 < n < n_{\max}} \pi \int_{-b\rho}^{\infty} |\Psi_n|^2 \delta(E - E_n) dk_x. \end{aligned} \quad (27)$$

Полное число состояний может быть представлено интегрированием по энергии

$$N = S \int_{-\infty}^{E_F} n(E) dE = S \sum_{0 < n < n_{\max}} \int_{-b\rho}^{\infty} |\Psi_n|^2 \Theta(E_F - E_n) dk_x, \quad (28)$$

где  $E_F$  – энергия Ферми. Предполагая, что выполняется  $\gamma = b\rho^2 - n$  (справедливо для больших  $k_x$ ), можно проинтегрировать (28), используя соотношения из [6], и просуммировать аналогично тому, как было сделано в [17]:

$$N = \frac{S}{2\pi\rho^2} \left( b\rho^2 - \frac{1}{2}[Y] \right) [Y], \quad (29)$$

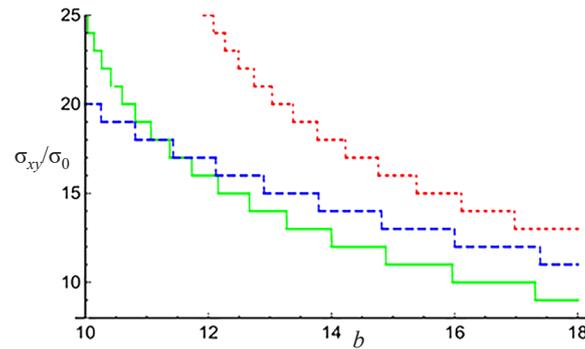


Рис. 4. Проводимость для нулевой кривизны (штриховая синяя линия), для пространства Лобачевского без однородного электрического поля (пунктирная красная линия) и с ним (сплошная зеленая линия)

Fig. 4. Conductivity for zero curvature (dashed blue line), for Lobachevsky space without (dashed red line) and with (solid green line) a uniform electric field

где  $[Y] = \left[ b\rho^2 + \frac{1}{2} - \rho\sqrt{b^2\rho^2 - 2mE_F/\hbar^2 + \rho Fm} \right]$  – целая часть выражения в скобках. Соответствующая проводимость, если энергия Ферми находится в энергетической щели, дана выражением [24]

$$\sigma_{xy} = \frac{qc}{S} \frac{\partial N}{\partial B} = \sigma_0[Y], \quad (30)$$

где  $\sigma_0 = \frac{q^2}{h}$ . В сравнении с выражением для проводимости при наличии только магнитного поля [17], в выражении (30) возникло дополнительное смещение, изображенное на рис. 4, за счет электрического поля. Стоит отметить, что данный эффект имеет место только в пространстве Лобачевского из-за наличия плато в спектре энергии при больших значениях, которое отсутствует для случая плоского пространства.

**Заключение.** Рассмотрены аналитические решения задачи движения классической и квантовой заряженной частицы в двумерном пространстве Лобачевского при наличии аналогов однородного магнитного и электрического полей. Основываясь на данных решениях, была получена проводимость для классического и квантового эффекта Холла. В частности, показано, что в пространстве Лобачевского выполняется классический закон Ома и проводимость для эффекта Холла имеет схожий вид как и для плоского пространства. Для квантового эффекта Холла продемонстрировано смещение ступенчатой структуры за счет наличия аналога однородного электрического поля.

**Благодарности.** Авторы благодарят В. М. Редькова за содействие в оформлении рукописи и членов семинара центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» за полезную дискуссию.

**Acknowledgments.** The authors thank V. M. Red'kov for assistance in preparing the manuscript and members of the seminar of the Center “Fundamental Interactions and Astrophysics” for a helpful discussion.

### Список использованных источников

1. Iorio, A. Curved spacetimes and curved graphene: A status report of the Weyl symmetry approach / A. Iorio // *Int. J. Mod. Phys. D.* – 2015. – Vol. 24, № 05. – P. 1530013-1–1530013-64. <https://doi.org/10.1142/s021827181530013x>
2. Simulating hyperbolic space on a circuit board / P. M. Lenggenhager [et al.] // *Nat. Commun.* – 2022. – Vol. 13, № 1. – Art. no. 4373. <https://doi.org/10.1038/s41467-022-32042-4>
3. Kollár, A. J. Hyperbolic lattices in circuit quantum electrodynamics / A. J. Kollár, M. Fitzpatrick, A. A. Houck // *Nature.* – 2019. – Vol. 571, № 7763. – P. 45–50. <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1348-3>
4. Quantum simulation of hyperbolic space with circuit quantum electrodynamics: From graphs to geometry / I. Boettcher [et al.] // *Phys. Rev. A.* – 2020. – Vol. 102, № 3. – Art. no. 032208. <https://doi.org/10.1103/physreva.102.032208>

5. Maciejko, J. Hyperbolic band theory / J. Maciejko, S. Rayan // *Sci. Adv.* – 2021. – Vol. 7, № 36. – Art. no. 9170. <https://doi.org/10.1126/sciadv.abe9170>
6. Comtet, A. Effective action on the hyperbolic plane in a constant external field / A. Comtet, P. J. Houston // *J. Math. Phys.* – 1985. – Vol. 26, № 1. – P. 185–191. <https://doi.org/10.1063/1.526781>
7. Comtet, A. On the Landau levels on the hyperbolic plane / A. Comtet // *Ann. Phys.* – 1987. – Vol. 173, № 1. – P. 185–209. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(87\)90098-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(87)90098-4)
8. Grosche, C. The path integral on the Poincaré upper half-plane with a magnetic field and for the Morse potential / C. Grosche // *Ann. Phys.* – 1988. – Vol. 187, № 1. – P. 110–134. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(88\)90283-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(88)90283-7)
9. Grosche, C. Path integration on the hyperbolic plane with a magnetic field / C. Grosche // *Ann. Phys.* – 1990. – Vol. 201, № 2. – P. 258–284. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(90\)90042-m](https://doi.org/10.1016/0003-4916(90)90042-m)
10. Grosche, C. On the path integral in imaginary Lobachevsky space / C. Grosche // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1994. – Vol. 27, № 10. – P. 3475–3490. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/27/10/023>
11. Classical Particle in Presence of Magnetic Field, Hyperbolic Lobachevsky and Spherical Riemann Models / V. V. Kudryashov [et al.] // *SIGMA*. – 2010. – Vol. 6, № 004. – 34 p. <https://doi.org/10.3842/sigma.2010.004>
12. Bogush, A. A. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A. A. Bogush, V. M. Red'kov, G. G. Krylov // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–416.
13. Kurochkin, Yu. A. Magnetic Field in the Lobachevsky Space and Related Integrable Systems / Yu. A. Kurochkin, V. S. Otchik, E. M. Ovsiyuk // *Phys. At. Nucl.* – 2012. – Vol. 75, № 10. – P. 1245–1249. <https://doi.org/10.1134/s1063778812100122>
14. Ovsiyuk, E. M. On behavior of quantum particles in an electric field in spaces of constant curvature, hyperbolic and spherical models / E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko // *Ukr. J. Phys.* – 2013. – Vol. 58, № 11. – P. 1065–1072. <https://doi.org/10.15407/ujpe58.11.1065>
15. Iengo, R. Quantum mechanics and quantum Hall effect on Riemann surfaces / R. Iengo, D. Li // *Nucl. Phys. B.* – 1994. – Vol. 413, № 3. – P. 735–753. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)90010-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90010-8)
16. Quantum Hall Effect on the Hyperbolic / A. L. Carey [et al.] // *Plane. Comm. Math. Phys.* – 1998. – Vol. 190, № 3. – P. 629–673. <https://doi.org/10.1007/s002200050255>
17. Bulaev, D. V. Quantum Hall effect on the Lobachevsky plane / D. V. Bulaev, V. A. Geyler, V. A. Margulis // *Phys. B: Condens. Matter.* – 2003. – Vol. 337, № 1–4. – P. 180–185. [https://doi.org/10.1016/s0921-4526\(03\)00402-2](https://doi.org/10.1016/s0921-4526(03)00402-2)
18. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; под ред. Л. П. Питаевского. – Изд. 9-е, стер. – М.: Физматлит, 2018. – Т. 2: Теория поля. – 504 с.
19. Tong, D. Lectures on the Quantum Hall Effect [Electronic resource] / D. Tong // *Arxiv [Preprint]*. – 2016. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1606.06687>
20. Landsman, N. P. *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics* / N. P. Landsman. – New York: Springer-Verlag, 1998. – XIX, 529 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1680-3>
21. Виленкин, Н. Я. Специальные функции и теория представления групп / Н. Я. Виленкин. – 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
22. Biedenharn, L. C. On the unitary representations of  $SU(1,1)$  and  $SU(2,1)$  / L.C. Biedenharn, J. Nuyts, N. Straumann // *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique.* – 1965. – Vol. 3, № 1. – P. 13–39.
23. Economou, E. N. *Green's Functions in Quantum Physics* / E. N. Economou. – 3<sup>rd</sup> ed. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2006. – XVIII, 480 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-28841-4>
24. Streda, P. Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions / P. Streda // *J. Phys. C: Solid State Phys.* – 1982. – Vol. 15, № 22. – P. L717–L721. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/22/005>

## References

1. Iorio A. Curved spacetimes and curved graphene: A status report of the Weyl symmetry approach. *International Journal of Modern Physics D*, 2015, vol. 24, no. 05, pp. 1530013-1–1530013-64. <https://doi.org/10.1142/s021827181530013x>
2. Lenggenhager P. M., Stegmaier A., Upreti L. K., Hofmann T., Helbig T., Vollhardt A., Greiter M. [at al.]. Simulating hyperbolic space on a circuit board. *Nature Communications*, 2022, vol. 13, no. 1, art. no. 4373. <https://doi.org/10.1038/s41467-022-32042-4>
3. Kollár A. J., Fitzpatrick M., Houck A. A. Hyperbolic lattices in circuit quantum electrodynamics. *Nature*, 2019, vol. 571, no. 7763, pp. 45–50. <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1348-3>
4. Boettcher I., Bienias P., Belyansky R., Kollár A. J., Gorshkov A. V. Quantum simulation of hyperbolic space with circuit quantum electrodynamics: From graphs to geometry. *Physical Review A*, 2020, vol. 102, no. 3, art. no. 032208. <https://doi.org/10.1103/physreva.102.032208>
5. Maciejko J., Rayan S. Hyperbolic band theory. *Science Advances*, 2021, vol. 7, no. 36, art. no. 9170. <https://doi.org/10.1126/sciadv.abe9170>
6. Comtet A., Houston P. J. Effective action on the hyperbolic plane in a constant external field. *Journal of Mathematical Physics*, 1985, vol. 26, no. 1, pp. 185–191. <https://doi.org/10.1063/1.526781>
7. Comtet A. On the Landau levels on the hyperbolic plane. *Annals of Physics*, 1987, vol. 173, no. 1, pp. 185–209. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(87\)90098-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(87)90098-4)
8. Grosche C. The path integral on the Poincaré upper half-plane with a magnetic field and for the Morse potential. *Annals of Physics*, 1988, vol. 187, no. 1, pp. 110–134. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(88\)90283-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(88)90283-7)

9. Grosche C. Path integration on the hyperbolic plane with a magnetic field. *Annals of Physics*, 1990, vol. 201, no. 2, pp. 258–284. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(90\)90042-m](https://doi.org/10.1016/0003-4916(90)90042-m)
10. Grosche C. On the path integral in imaginary Lobachevsky space. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994, vol. 27, no. 10, pp. 3475–3490. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/27/10/023>
11. Kudryashov V. V., Kurochkin Yu. A., Ovsyuk E. M., Red'kov, V. M. Classical Particle in Presence of Magnetic Field, Hyperbolic Lobachevsky and Spherical Riemann Models. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2010, vol. 6, no. 004, 34 p. <https://doi.org/10.3842/sigma.2010.004>
12. Bogush A. A., Red'kov V. M., Krylov G. G. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2008, vol. 11, no. 4, pp. 403–416.
13. Kurochkin Yu. A., Otchik V. S., Ovsyuk E. M. Magnetic Field in the Lobachevsky Space and Related Integrable Systems. *Physics of Atomic Nuclei*, 2012, vol. 75, no. 10, pp. 1245–1249. <https://doi.org/10.1134/s1063778812100122>
14. Ovsyuk E. M., Veko O. V. On behavior of quantum particles in an electric field in spaces of constant curvature, hyperbolic and spherical models. *Ukrainian Journal of Physics*, 2013, vol. 58, no. 11, pp. 1065–1072. <https://doi.org/10.15407/ujpe58.11.1065>
15. Iengo R., Li D. Quantum mechanics and quantum Hall effect on Riemann surfaces. *Nuclear Physics B*, 1994, vol. 413, no. 3, pp. 735–753. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)90010-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90010-8)
16. Carey A. L., Hannabuss K. C., Mathai V., McCann P. Quantum Hall Effect on the Hyperbolic Plane. *Communications in Mathematical Physics*, 1998, vol. 190, no. 3, pp. 629–673. <https://doi.org/10.1007/s002200050255>
17. Bulaev D. V., Geyler V. A., Margulis V. A. Quantum Hall effect on the Lobachevsky plane. *Physica B: Condensed Matter*, 2003, vol. 337, no. 1–4, pp. 180–185. [https://doi.org/10.1016/s0921-4526\(03\)00402-2](https://doi.org/10.1016/s0921-4526(03)00402-2)
18. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields. Vol. 2*. Elsevier, 2013. 417 p.
19. Tong D. Lectures on the Quantum Hall Effect. *Arxiv [Preprint]*, 2016. Available at: <https://arxiv.org/abs/1606.06687>
20. Landsman N. P. *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics*. New York, Springer-Verlag, 1998. XIX, 529 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1680-3>
21. Vilenkin N. I. *Special Functions and the Theory of Group Representations. Vol. 22*. American Mathematical Soc., 1968. <https://doi.org/10.1090/mmono/022>
22. Biedenharn L. C., Nuyts J., Straumann N. On the unitary representations of  $SU(1,1)$  and  $SU(2,1)$ . *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 1965, vol. 3, no. 1, pp. 13–39.
23. Economou E. N. *Green's Functions in Quantum Physics*. 3<sup>rd</sup> ed. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. XVIII, 480 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-28841-4>
24. Streda P. Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 1982, vol. 15, no. 22, pp. L717–L721. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/22/005>

### Информация об авторах

**Курочкин Юрий Андреевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

**Рыбак Иван Юрьевич** – Институт астрофизики и космических наук (CAUP, Rua das Estrelas, 4150-762 Porto, Portugal). E-mail: Ivan.Rybak@astro.up.pt

### Information about the authors

**Yurii A. Kurochkin** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Center “Fundamental Interactions and Astrophysics”, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

**Ivan Yu. Rybak** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço (CAUP, Rua das Estrelas, 4150-762 Porto, Portugal). E-mail: Ivan.Rybak@astro.up.pt