ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.518.45
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-95-109

Поступила в редакцию 24.10.2022
Received 24.10.2022

Н. Ю. Казлоўская, Я. А. Роўба

Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Янкі Купалы, Гродна, Рэспубліка Беларусь

АБ НАБЛІЖЭННІ ФУНКЦЫІ $|\sin x|^s$ РАЦЫЯНАЛЬНЫМІ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫМІ АПЕРАТАРАМІ ФЕЕРА

Анатацыя. Апраксімацыя з дапамогай трыганаметрычных шэрагаў Фур'е з'яўляецца добра распрацаваным кірункам тэорыі набліжэння паліномамі. Метады набліжэння рацыянальнымі трыганаметрычнымі шэрагамі Фур'е даследаваны ў меншай ступені. У прыватнасці, рацыянальныя трыганаметрычныя аператары Феера ў рацыянальнай апраксімацыі са свабоднымі полюсамі не выкарыстоўваліся. У рабоце даследуецца апраксімацыя функцыі $|\sin x|^s$, $s \in (0;2)$, рацыянальнымі трыганаметрычнымі аператарамі Феера. Атрымана інтэгральнае прадстаўленне астатку набліжэння функцыі, якая разглядаецца, азначаным метадам. Знойдзена ацэнка такіх набліжэнняў у пунктах аналітычнасці функцыі $|\sin x|^s$ пры ўмове паўнаты адпаведнай сістэмы рацыянальных функцый. На прыкладзе набліжэння рацыянальнымі функцыямі Феера з двума геаметрычна living рознымі полюсамі паказана, што парадак раўнамернага набліжэння ў гэтым выпадку вышэйшы за парадак набліжэння трыганаметрычнымі паліномамі. У якасці выніку атрымана асімптатычная ацэнка раўнамернага набліжэння трыганаметрычнымі сумамі Феера ў полінаміяльным выпадку.

Ключавыя словы: рацыянальная апраксімацыя, рацыянальныя трыганаметрычныя аператары Феера, асімптатычныя ацэнкі, мажаранта раўнамерных набліжэнняў

Для цытавання. Казлоўская, Н. Ю. Аб набліжэнні функцыі $|\sin x|^s$ рацыянальнымі трыганаметрычнымі аператарамі Феера / Н. Ю. Казлоўская, Я. А. Роўба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 2. – С. 95–109. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-95-109

Natallia Yu. Kazlouskaya, Yaugeni A. Rovba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ON THE APPROXIMATION OF THE $|\sin x|^s$ FUNCTION BY RATIONAL TRIGONOMETRIC OPERATORS OF THE FEJÉR TYPE

Abstract. Approximation by trigonometric Fourier series is a well-developed branch of the theory of approximation by polynomials. Methods of approximation by rational trigonometric Fourier series have not been researched so deeply yet. In particular, rational trigonometric operators of the Fejér type have not been used in the rational approximation with free poles. In this paper, we consider the approximation of the function $|\sin x|^s$, $s \in (0;2)$, by rational trigonometric operators of the Fejér type. An integral representation of the remainder for the above-mentioned approximation is obtained. An estimate of approximations is found in the points of analyticity of the function $|\sin x|^s$ under the condition that the corresponding system of rational functions is complete. It is shown that the order of uniform approximation in the case of approximation by rational Fejér functions with two geometrically different poles is higher than the order of approximation by trigonometric polynomials. As a result, an asymptotic estimation of the uniform approximation by trigonometric Fejér sums in the polynomial case is obtained.

Keywords: rational approximation, rational trigonometric operators of the Fejér type, asymptotic estimates, majorant of uniform approximation

For citation. Kazlouskaya N. Yu., Rovba Y. A. On the approximation of the $|\sin x|^s$ function by rational trigonometric operators of the Fejér type. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 95–109 (in Belarusian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-95-109

Уводзіны. Даследаванне набліжэнняў 2π-перыядычных функцый з дапамогай сум Феера бярэ свой пачатак з прац Л. Феера [1], А. Лебега [2], на сённяшні дзень мае багатую гісторыю і шырокае прымяненне ў полінаміяльнай апраксімацыі [3, 4]. У 1956 г. былі пабудаваны рацыянальныя шэрагі Фур'е на адзінкавай акружнасці, якія абагульняюць трыганаметрычныя шэрагі Фур'е [5]. Некалькі пазней – уведзены рацыянальныя аператары Феера, Джэксана і Вале Пусэна [6]. Частковыя сумы рацыянальных шэрагаў Фур'е, рацыянальныя аператары Джэксана і Вале Пусэна знайшлі шырокае прымяненне ў тэорыі рацыянальных набліжэнняў, у прыватнасці ў знаходжанні класаў функцый, якія адлюстроўваюць асаблівасці рацыянальнай апраксімацы [7, 8]. Што датычыцца рацыянальных трыганаметрычных аператараў Феера, то яны ў рацыянальнай апраксімацыі са свабоднымі полюсамі асаблівых прымяненняў не знайшлі.

Заўважым, што большасць прац па тэорыі рацыянальнай апраксімацыі прысвечаны алгебраічнаму выпадку [7]. Так, напрыклад, задача аб апраксімацыі непарыўных на адрэзку функцый рацыянальнымі функцыямі з фіксаванай колькасцю геаметрычна розных полюсаў была разгледжана ў [9, 10]. Даследаванні ў гэтым кірунку былі працягнуты ў [11, 12] і інш. Адзначым таксама артыкул [13], у якім вывучаюцца набліжэнні функцый Маркава інтэгральнымі аператарамі тыпу Фур'е – Чабышова на аснове рацыянальных функцый Чабышова – Маркава і ў выпадку фіксаванай колькасці геаметрычна розных полюсаў даследуецца мажаранта ўказаных набліжэнняў. Апраксімацыя сярэднімі Феера рацыянальных шэрагаў Фур'е – Чабышова з двума геаметрычна рознымі полюсамі была даследавана ў [14].

У дадзенай рабоце разгледжана апраксімацыя функцыі $|\sin x|^s$, $s \in (0;2)$, $x \in R$, рацыянальнымі трыганаметрычнымі аператарамі Феера. Усталявана інтэгральнае прадстаўленне такіх набліжэнняў і іх асімптатычнае выражэнне пры $x \in (-\pi, 0) \bigcup (0, \pi)$. У выпадку двух геаметрычна розных полюсаў атрыманы раўнамерная ацэнка, асімптатычны выраз мажаранты набліжэнняў, а таксама знойдзены аптымальныя значэнні параметраў, якія забяспечваюць максімальную хуткасць меншання гэтай мажаранты.

Набліжэнні ў агульным выпадку. Няхай

$$\alpha_k \in [0,1), \quad \alpha_k = -\alpha_{n+k}, \; k = 1, 2, \ldots n. \tag{1}$$

Абазначым

$$\lambda_{2n}(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k|\cos(u - \arg\alpha_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Відавочна, што пры азначаным вышэй выбары параметраў

$$\lambda_{2n}(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \alpha_k^4}{1 - 2\alpha_k^2 \cos 2u + \alpha_k^4}.$$

Для адвольнай функцыі $f \in C_{2\pi}$ разгледзім аператар Феера

$$\Phi_{2n}(x, f) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_{2n}^2(t, x)\,dt}{\int_{-\pi}^{\pi} D_{2n}^2(t, x)\,dt}, \quad x \in \mathbb{R},$$

дзе

$$D_{2n}(t, x) = \frac{\sin \lambda_{2n}(t, x)}{\sin \frac{t - x}{2}}, \qquad \lambda_{2n}(t, x) = \int_x^t \lambda_{2n}(u)\,du.$$

Такія аператары былі ўведзены ў [15], яны з'яўляюцца некаторай мадыфікацыяй аператараў Феера з [6].

Л е м а 1. *Для функцыі $D_{2n}(t,x)$ праўдзіцца роўнасць*

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_{2n}^2(t,x)dt = 4\pi\lambda_{2n}(x).$$

Д о к а з лемы 1 прадстаўлены ў артыкуле [15].

Л е м а 2. *Для цотнай, 2π-перыядычнай непарыўнай функцыі f аператар Феера мае выгляд*

$$\Phi_{2n}(x,f) = \frac{1}{2\pi\lambda_{2n}(x)}\int_0^{\pi} f(t)\left(\left(\xi^2\frac{\chi_{2n}(\xi)}{\chi_{2n}(z)} + z^2\frac{\chi_{2n}(z)}{\chi_{2n}(\xi)}\right)\frac{\xi^2+z^2}{(\xi^2-z^2)^2} - \frac{4\xi^2 z^2}{(\xi^2-z^2)^2}\right)dt,$$

$$\chi_{2n}(\xi) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\xi^2-\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2\xi^2}.$$

Указанае прадстаўленне няцяжка атрымаць з [15].

Разгледзім функцыю $f(x) = |\sin x|^s,\ s\in(0;2),\ x\in R.$ Увядзём абазначэнне $\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = |\sin x|^s - \Phi_{2n}(x, |\sin x|^s),\ x\in R,$ дзе $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., a_{2n})$.

Т э а р э м а 1. *Для набліжэння функцыі $|\sin x|^s,\ s\in(0;2),\ x\in R,$ рацыянальнымі аператарамі Феера праўдзіцца наступнае прадстаўленне:*

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = \frac{2\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi\lambda_{2n}(x)}\times$$

$$\times\int_0^1 \frac{t}{t^4-2t^2\cos 2x+1}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^s\left(\chi_{2n}(t)\sqrt{t^4+2t^2\cos 2x+1}\cos\varphi_{2n}(x,t) - 2\frac{(t^4+1)\cos 2x - 2t^2}{t^4-2t^2\cos 2x+1}\right)dt, \quad (2)$$

$$\varphi_{2n}(x,t) = \arg\left(\frac{1}{\chi_{2n}(z)}\cdot\frac{t^2+z^2}{(t^2-z^2)^2}\right), \quad z = e^{ix},$$

альбо

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = -\frac{2}{\pi\lambda_{2n}(x)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{t}{1-2t^2\cos 2x+t^4}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^s\Psi_{2n}(x,t)dt, \quad (3)$$

дзе

$$\Psi_{2n}(x,t) = \sqrt{1+2t^2\cos 2x+t^4}\sqrt{1-2\chi_{2n}(t)\cos\arg\chi_{2n}(z)+\chi_{2n}^2(t)}\cos\Theta_{2n}(x,t) + \cos 2x - t^2,$$

$$\Theta_{2n}(x,t) = \arg\frac{z^2(1+t^2z^2)\chi_{2n}(t)\chi_{2n}(z)}{(1-z^2t^2)^2}.$$

Тэарэма 1 даказваецца аналагічным чынам, як і адпаведная тэарэма працы [16].

Т э а р э м а 2. *Няхай лікі $\alpha_k\in[0,1),\ k=1,2,...,$ такія, што шэраг $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1-|\alpha_k|\right)$ разбягаецца. Тады справядлівы суадносіны*

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = -\frac{2^{2-s}\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi\lambda_{2n}(x)}\left(\int_0^1 t^{1-s}(1-t^2)^s\frac{\left((t^4+1)\cos 2x - 2t^2\right)}{(t^4-2t^2\cos 2x+1)^2}dt + o(1)\right), \quad n\to+\infty, \quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi). \quad (4)$$

Д о к а з. З тэарэмы 1 вынікае, што

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = -\frac{2^{2-s}\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi\lambda_{2n}(x)}\int_0^1 t^{1-s}(1-t^2)^s \frac{\left((t^4+1)\cos 2x - 2t^2\right)}{(t^4-2t^2\cos 2x+1)^2}dt + \frac{2\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi\lambda_{2n}(x)} I_{2n}, \tag{5}$$

дзе

$$I_{2n} = \int_0^1 \frac{t\sqrt{t^4+2t^2\cos 2x+1}}{t^4-2t^2\cos 2x+1}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^s \chi_{2n}(t)\cos\varphi_{2n}(x,t)\,dt.$$

Заўважым, што праўдзяцца наступныя няроўнасці:

$$\sqrt{t^4+2t^2\cos 2x+1} \le \sqrt{t^4+2t^2+1} = t^2+1, \quad t^4-2t^2\cos 2x+1 = (t^2-2t\cos x+1)(t^2+2t\cos x+1) \ge \sin^4 x,$$

$$\left|\cos\varphi_{2n}(x,t)\right| \le 1, \quad x\in R, \quad t\in[0,1].$$

Адсюль будзем мець ацэнку

$$\left|I_{2n}\right| \le \frac{1}{2^s\sin^4 x}\int_0^1 t^{1-s}(1+t^2)(1-t^2)^s\left|\chi_{2n}(t)\right|dt.$$

У апошнім інтэграле выканаем замену $t=\sqrt{\dfrac{1-u}{1+u}}$, $\quad dt = -\dfrac{du}{(1+u)^{3/2}(1-u)^{1/2}}$. У выніку атрымаем

$$\left|I_{2n}\right| \le \frac{1}{2^s\sin^4 x}\int_0^1 \frac{(1-u)^{(1-s)/2}}{(1+u)^{(1-s)/2}}\cdot\frac{2}{1+u}\cdot\left(\frac{2u}{1+u}\right)^s\prod_{k=1}^n\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|\frac{du}{(1+u)^{3/2}(1-u)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2}{\sin^4 x}\int_0^1 \frac{u^s}{(1-u)^{s/2}(1+u)^{(6+s)/2}}\prod_{k=1}^n\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Тады, відавочна,

$$\left|I_{2n}\right| \le \frac{2}{\sin^4 x} I'_{2n}, \tag{6}$$

дзе

$$I'_{2n} = \int_0^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}}\prod_{k=1}^n\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du.$$

Абярэм адвольны лік $\varepsilon\in(0,1)$, і інтэграл I'_{2n} прадставім у выглядзе

$$I'_{2n} = \int_0^\varepsilon \frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}}\prod_{k=1}^n\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du + \int_\varepsilon^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}}\prod_{k=1}^n\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du. \tag{7}$$

Паколькі $\left|\dfrac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right| \le 1$, $k=1,2,\ldots,n$, пры $u\in[0,1]$, то

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du\le\int_0^{\varepsilon}\frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}}\,du. \tag{8}$$

З улікам таго, што $\frac{1}{(1-u^2)^{s/2}}=1+\frac{s}{2}u^2+o(u^2),\ u\to 0,$ атрымаем

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}}\,du=O(\varepsilon^{s+1}),\ \ \varepsilon\to 0. \tag{9}$$

Ацэнім другі інтэграл з роўнасці (7):

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{u^s}{(1-u^2)^{s/2}}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du\le\max_{u\in[\varepsilon,1]}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|\int_{\varepsilon}^{1}\frac{du}{(1-u^2)^{s/2}}\le\frac{2(1-\varepsilon)^{(2-s)/2}}{2-s}\max_{u\in[\varepsilon,1]}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|. \tag{10}$$

Абазначым $\Omega=\{k:1\le k\le n,\beta_k\le\varepsilon\}$. Тады для $k\in\Omega$ маем

$$\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|\le\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}=1-\frac{2\beta_k}{1+\beta_k}\le\exp\left(-\frac{2\beta_k}{1+\beta_k}\right),\quad u\in[\varepsilon,1],$$

а для $k\notin\Omega,\ 1\le k\le n-1,$

$$\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|\le\frac{\beta_k-\varepsilon}{\beta_k+\varepsilon}\le\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\beta_k+\varepsilon}\right)\le\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right),\quad u\in[\varepsilon,1].$$

Такім чынам,

$$\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|\le\exp\left(-2\left(\sum_{k\in\Omega}\frac{\beta_k}{1+\beta_k}+(n-|\Omega|)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right),$$

дзе $|\Omega|$ – магутнасць мноства Ω. Адсюль і з роўнасцей (6)–(10) вынікае, што $I_{2n}\to 0,\ n\to\infty$, пры ўмове, што шэраг $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|)$ разбягаецца. Адзначым, што прыведзеная ўмова з'яўляецца неабходнай і дастатковай, каб сістэма функцый $\left\{\frac{1}{z-\alpha_k},\frac{1}{1-\overline{\alpha_k}z}\right\}_{k=1}^{\infty}$ была поўнай у $C_{2\pi}$ [17].

Набліжэнні ў выпадку двух геаметрычна розных полюсаў. Пакладзём зараз $\alpha_1=\alpha_2=\ldots\alpha_n=\alpha$. Пры такім выбары параметраў

$$\chi_{2n}(t)=\left(\frac{t^2-\alpha^2}{1-t^2\alpha^2}\right)^n,\qquad \lambda_{2n}(x)=\frac{1}{2}+n\cdot\frac{1-\alpha^4}{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4}.$$

Велічыню $\varepsilon_{2n}(x,\alpha)$ для выпадку двух геаметрычна розных полюсаў будзем абазначаць праз $\varepsilon_{2n,2}(x,\alpha)$.

Вынік 1. *У выпадку, калі* $\alpha_1=\alpha_2=\ldots\alpha_n=\alpha$, *прадстаўленне* (3) *можа быць перапісана ў выглядзе*

$$\varepsilon_{2n,2}(x,\alpha)=\frac{2}{\pi\lambda_{2n}(x)}\sin\frac{\pi s}{2}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-2t^2\cos 2x+t^4}}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^s\left(\frac{1-\alpha^4}{1-t^2\alpha^2}\frac{\sqrt{1+2t^2\cos 2x+t^4}}{\sqrt{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{2k}(t)\chi_{2k}(z)\right|+1\right)\cos\Upsilon_{2n}(x,t)\,dt, \tag{11}$$

дзе

$$\Upsilon_{2n}(x,t) = \arg\left(\frac{z^2}{1-z^2t^2}\left(1+\frac{(1-\alpha^4)(1+t^2z^2)}{(1-t^2\alpha^2)(1-z^2\alpha^2)}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{2k}(t)\chi_{2k}(z)\right)\right).$$

На аснове прадстаўлення (11) будзем мець ацэнку

$$\left|\varepsilon_{2n,2}(x,\alpha)\right| \le \frac{2^{1-s}\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi\left(\frac{1}{2}+n\frac{1-\alpha^4}{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4}\right)}\times$$

$$\times\left((1-\alpha^4)\int_0^1\frac{t^{1-s}(1-t^2)^s}{1-t^2\alpha^2}\frac{\sqrt{1+2t^2\cos 2x+t^4}}{\sqrt{1-2t^2\cos 2x+t^4}\sqrt{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4}}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\chi_{2k}(t)\right|dt+\int_0^1\frac{t^{1-s}(1-t^2)^s}{\sqrt{1-2t^2\cos 2x+t^4}}dt\right).$$

З улікам таго, што пры $x \in R$

$$\sqrt{1+2t^2\cos 2x+t^4} \le 1+t^2, \quad \sqrt{1-2t^2\cos 2x+t^4} \ge 1-t^2, \quad \frac{1-\alpha^4}{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4} \ge \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2},$$

атрымаем

$$\left|\varepsilon_{2n,2}(x,\alpha)\right| \le \frac{2^{1-s}\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi n}\int_0^1\frac{t^{1-s}(1-t^2)^s(1+t^2)}{1-t^2\alpha^2}\frac{\sqrt{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4}}{\sqrt{1-2t^2\cos 2x+t^4}}\frac{1-\left|\chi_2(t)\right|^n}{1-\left|\chi_2(t)\right|}dt+$$

$$+\frac{2^{1-s}\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi n}\cdot\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^1 t^{1-s}(1-t^2)^{s-1}dt. \quad (12)$$

У другім з інтэгралаў роўнасці (12) выканаем замену $t = \cos u$:

$$\int_0^1 t^{1-s}(1-t^2)^{s-1}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1-s}u\cdot\sin^{2s-1}u\,du = c(s), \quad (13)$$

дзе

$$c(s) = \frac{2^s\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}s(s+1)}. \quad (14)$$

Ацэнім першы інтэграл роўнасці (12). Даследуем функцыю

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4}{1-2t^2\cos 2x+t^4}}.$$

Паколькі

$$\gamma'(x) = \frac{2\sin 2x(\alpha^2-t^2)(1-t^2\alpha^2)}{(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)^{1/2}(1-2t^2\cos 2x+t^4)^{3/2}},$$

то функцыя $\gamma(x)$ пры $t\in[0,\alpha]$ нарастальная на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, спадальная на $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ і дасягае свайго найбольшага значэння ў пункце $x=\frac{\pi}{2}$, а пры $t\in[\alpha,1]$ спадальная на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, нарастальная на $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ і дасягае свайго найбольшага значэння ў пунктах $x = 0$ і $x = \pi$. Пры гэтым

$$\gamma(0)=\gamma(\pi)=\frac{1-\alpha^2}{1-t^2},\qquad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\alpha^2}{1+t^2}.$$

У выніку будзем мецъ

$$\int_0^1\frac{t^{1-s}(1-t^2)^s(1+t^2)}{1-t^2\alpha^2}\frac{\sqrt{1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4}}{\sqrt{1-2t^2\cos 2x+t^4}}\frac{1-|\chi_2(t)|^n}{1-|\chi_2(t)|}dt=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha^2}\int_0^\alpha t^{1-s}(1-t^2)^s\gamma(x)\left(1-|\chi_2(t)|^n\right)dt+\frac{1}{1+\alpha^2}\int_\alpha^1 t^{1-s}(1-t^2)^{s-1}(1+t^2)\gamma(x)\left(1-\chi_2^n(t)\right)dt\le$$

$$\le\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\int_0^\alpha \frac{t^{1-s}(1-t^2)^s}{1+t^2}\left(1-|\chi_2(t)|^n\right)dt+\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\int_\alpha^1 t^{1-s}(1-t^2)^{s-2}(1+t^2)\left(1-\chi_2^n(t)\right)dt.$$

Такім чынам, праўдзіцца

Т э а р э м а 3. *Для набліжэння функцыі* $|\sin x|^s,\ s\in(0;2),\ x\in R,$ *рацыянальнымі аператарамі Феера ў выпадку двух геаметрычна розных полюсаў справядліва наступная ацэнка:*

$$\left|\varepsilon_{2n,2}(x,\alpha)\right|\le\varepsilon_{2n}^*(\beta),\quad n\in N, \tag{15}$$

дзе $\beta=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$,

$$\varepsilon_{2n}^*(\beta)=\frac{2^{1-s}}{\pi n}\sin\frac{\pi s}{2}\left(J_1+J_2+\frac{c(s)}{\beta}\right), \tag{16}$$

$$J_1=\frac{1}{\beta}\int_0^\alpha\frac{t^{1-s}(1-t^2)^s}{1+t^2}\left(1-|\chi_2(t)|^n\right)dt,\quad J_2=\beta\int_\alpha^1 t^{1-s}(1-t^2)^{s-2}(1+t^2)\left(1-\chi_2^n(t)\right)dt,$$

$c(s)$ *вызначаецца формулай* (14).

Паколькі ва ўсіх ужытых пры ацэнцы падынтэгральнай функцыі з формулы (11) няроўнасцях дасягаецца роўнасць пры $\alpha = 0$, $x = 0$, справядлівы

В ы н і к 2. *Для набліжэння функцыі* $|\sin x|^s,\ s\in(0;2),\ x\in R,$ *сярэднімі Феера полінаміяльных шэрагаў Фур'е праўдзіцца наступная роўнасць:*

$$\varepsilon_{2n}^*=\varepsilon_{2n}^*(1)=\left\|\varepsilon_{2n}(x,0)\right\|_{C_{2\pi}}=\frac{2^{1-s}}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sin\frac{\pi s}{2}\left(\int_\alpha^1 t^{1-s}(1-t^2)^{s-2}(1+t^2)(1-t^{2n})dt+c(s)\right). \tag{17}$$

У інтэгралах J_1, J_2 выканаем замену $t=\sqrt{\frac{1-u}{1+u}},\ dt=\frac{-du}{(1+u)^{3/2}(1-u)^{1/2}}$. Атрымаем

$$J_1=\frac{2^{s-1}}{\beta}\int_\beta^1\frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}\left(1-\left(\frac{u-\beta}{u+\beta}\right)^n\right)du, \tag{18}$$

$$J_2 = 2^{s-1}\beta\int_0^{\beta} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \cdot \frac{1-\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n}{u} du. \tag{19}$$

Прадыферэнцуем інтэграл J_2 па параметры n:

$$\frac{\partial J_2}{\partial n} = 2^{s-1}\beta\int_0^{\beta} \frac{u^{s-1}}{J_2(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \cdot \frac{-1}{u}\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n \ln\frac{\beta-u}{\beta+u} du =$$

$$= 2^{s-1}\beta\int_0^{\beta} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \cdot \frac{-1}{u}\ln\frac{\beta-u}{\beta+u} \cdot \frac{\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n}{e^{-\frac{2un}{\beta}}} e^{-\frac{2un}{\beta}} du.$$

Для даследавання асімптатычных паводзінаў апошняга інтэграла прыменім метад Лапласа, а менавіта тэарэму Эрдэі [18].

Т э а р э м а   Э р д э і. *Няхай $I(x)$ – інтэграл віду*

$$I(x) = \int_a^b q(t)e^{xp(t)}dt,$$

дзе $p(t)$ – рэчаісная функцыя рэчаіснай зменнай, функцыя $q(t)$ можа быць як комплексназначнай, так і рэчаісназначнай, значэнне a канечнае, значэнне b можа быць як канечным, так і бясконцым.

Акрамя таго, няхай выконваюцца ўмовы:

1) функцыя $p(t)$ мае максімум пры $t = a$, прычым $p(t) < p(a)$ пры $a < t \le b$;

2) функцыі $p'(t)$ і $q(t)$ непарыўныя ў некаторым наваколлі пункта a, за выключэннем, магчыма, самога пункта a;

3) інтэграл $I(x)$ абсалютна збягаецца ва ўсім абсягу інтэгравання пры ўсіх досыць вялікіх x;

4) выконваюцца асімптатычныя роўнасці $p(t) \sim p(a) - P(t-a)^{\mu}$, $t \to a+0$, $q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1}$, $t \to a + 0$, дзе P, μ, λ – дадатныя пастаянныя, а $Q \ne 0$ – рэчаісная або комплексная пастаянная; пры гэтым першае з указаных судачыненняў дапускае дыферэнцыраванне.

Тады

$$I(x) \sim \frac{Q}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{e^{xp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad x \to +\infty. \tag{20}$$

Паколькі

$$\lim_{u\to 0} \frac{-1}{u}\ln\frac{\beta-u}{\beta+u} = \lim_{u\to 0}\left(-\frac{\beta+u}{\beta-u}\right)\cdot\frac{-2\beta}{(\beta+u)^2} = \lim_{u\to 0}\frac{2\beta}{\beta^2-u^2} = \frac{2}{\beta}, \quad \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n = \left(1-\frac{2u}{\beta+u}\right)^n \sim e^{-\frac{2un}{\beta}}, \quad u \to 0,$$

$$(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u) \sim 1, \quad u \to 0,$$

функцыя $p(u) = \frac{-2u}{\beta}$ дасягае на $[0,\beta]$ максімуму ў пункце $u = 0$, і толькі ў ім, функцыя

$$q(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \cdot \frac{-1}{u}\ln\frac{\beta-u}{\beta+u} \cdot \frac{\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n}{e^{-\frac{2un}{\beta}}} \sim \frac{2}{\beta}u^{s-1},$$

то згодна з формулай (20)

$$\frac{\partial J_2}{\partial n} \sim 2^s \int_0^{\beta} u^{s-1} e^{-\frac{2un}{\beta}} du \sim \frac{\beta^s}{n^s}\Gamma(s), \quad n \to \infty.$$

Каб вярнуцца да інтэграла J_2, выканаем інтэграванне:

а) пры $s \in (0,1)$

$$J_2 \sim \beta^s \Gamma(s) \frac{n^{1-s}}{1-s}, \quad n \to \infty;$$

б) пры $s = 1$

$$J_2 \sim \beta \ln n, \quad n \to \infty;$$

в) пры $s \in (1,2)$ вынік атрымаем на аснове формулы (19):

$$J_2 = 2^{s-1}\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \cdot \frac{1-\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n}{u} du =$$

$$= 2^{s-1}\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} du - 2^{s-1}\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n du. \tag{21}$$

Першы з інтэгралаў у роўнасці (21) не залежыць ад n. Даследуем 2-і інтэграл, выкарыстоўваючы тэарэму Эрдэі. Маем

$$\int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n du = \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \frac{\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n}{e^{-\frac{2un}{\beta}}} e^{-\frac{2un}{\beta}} du.$$

Аналагічна, як і пры даследаванні інтэграла J_2, знойдзем:

$$\int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n du \sim \left(\frac{\beta}{2n}\right)^{s-1} \Gamma(s-1) = O\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right), \quad n \to \infty.$$

Такім чынам, пры $s \in (1,2)$

$$J_2 \sim 2^{s-1}\beta \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} du + O\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right), \quad n \to \infty.$$

Разгледзім інтэграл J_1. На аснове роўнасці (18) будзем мець:

$$J_1 = \frac{2^{s-1}}{\beta} \int_{\beta}^{1} \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} du - \frac{2^{s-1}}{\beta} \int_{\beta}^{1} \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} \left(\frac{u-\beta}{u+\beta}\right)^n du. \tag{22}$$

Першы з інтэгралаў у роўнасці (22) не залежыць ад n. Даследуем 2-і інтэграл, выкарыстоўваючы тэарэму Эрдэі. Выканаем у ім замену $\nu = 1 - u$, атрымаем:

$$J_1^{(2)} = \int\limits_0^{1-\beta} \frac{(1-v)^s}{(2v-v^2)^{\frac{s}{2}}(2-v)} e^{n\ln\left(\frac{v-(1-\beta)}{v-(1+\beta)}\right)} dv.$$

Паколькі вытворная функцыі $p_1(v) = \ln\left(\frac{v-(1-\beta)}{v-(1+\beta)}\right)$ роўная

$$p_1'(v) = \frac{v-(1+\beta)}{v-(1-\beta)} \cdot \frac{-2\beta}{\left(v-(1+\beta)\right)^2} = \frac{-2\beta}{(v-1)^2-\beta^2} < 0,$$

то функцыя $p_1(v)$ меншая на $[0,1-\beta]$ і дасягае на гэтым адрэзку максімуму ў пункце 0, і толькі ў ім,

$$p_1(v) - p_1(0) \sim -\frac{2\beta v}{1-\beta^2}, \quad v \to 0, \qquad q_1(v) = \frac{(1-v)^s}{(2v-v^2)^{\frac{s}{2}}(2-v)} \sim \frac{1}{2^{1+\frac{s}{2}}} v^{-\frac{s}{2}}, \quad v \to 0,$$

то згодна з формулай (20)

$$J_1^{(2)} \sim \frac{1}{2^{1+\frac{s}{2}}} \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}\right)^{1-\frac{s}{2}} \left(\frac{1-\beta}{1+\hat{a}}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{1-\frac{s}{2}}} = O\left(\frac{1}{n^{1-\frac{s}{2}}}\right), \quad n \to \infty.$$

Такім чынам,

$$J_1 = \frac{2^{s-1}}{\beta} \int\limits_\beta^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} du + O\left(\frac{1}{n^{1-\frac{s}{2}}}\right), \quad n \to \infty.$$

На аснове формулы (16) атрымаем тады наступную тэарэму.

Т э а р э м а 4. *Для набліжэння функцыі* $|\sin x|^s$, $s \in (0;2)$, $x \in R$, *рацыянальнымі апературамі Феера у выпадку двух геаметрычна розных полюсаў праўдзяцца асімптатычныя роўнасці (велічыня* $\varepsilon_{2n}^*(\beta)$ *вызначана ў* (16)):

а) пры $s \in (0,1)$

$$\varepsilon_{2n}^*(\beta) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left(\left(\frac{\beta}{2}\right)^s \frac{\Gamma(s)}{n^s(1-s)} + \frac{1}{2n\beta}\int\limits_\beta^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)} du + \upsilon_{2n}^{(s)}(\beta)\right), \quad n \to \infty, \tag{23}$$

дзе

$$\upsilon_{2n}^{(s)}(\beta) = \frac{1}{n\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi} s(s+1)} + O\left(\frac{1}{n^{2-\frac{s}{2}}}\right), \qquad \beta \in (0,1], \quad n \to \infty; \tag{24}$$

б) пры $s = 1$

$$\varepsilon_{2n}^*(\beta) = \frac{1}{\pi n}\left(\beta \ln n + \frac{1}{\beta}\int\limits_\beta^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}(1+u)} du\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty; \tag{25}$$

в) пры $s \in (1,2)$

$$\varepsilon^*_{2n}(\beta) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left(\frac{\beta}{2n}\int_0^\beta \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du + \frac{1}{2n\beta}\int_\beta^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du + \upsilon^{(s)}_{2n}(\beta)\right) + O\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad n\to\infty. \tag{26}$$

Вынік 3. *Для набліжэння функцыі* $|\sin x|^s$, $s\in(0;2)$, $x\in R$, *сярэднімі Феера полінаміяльных шэрагаў Фур'е праўдзяцца наступныя асімптатычныя роўнасці:*

а) пры $s \in (0,1)$

$$\varepsilon^*_{2n} \sim \frac{2^{1-s}}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\frac{\Gamma(s)}{n^s(1-s)}, \quad n\to\infty; \tag{27}$$

б) пры $s = 1$

$$\varepsilon^*_{2n} \sim \frac{\ln n}{\pi n}, \quad n\to\infty; \tag{28}$$

в) пры $s \in (1,2)$

$$\varepsilon^*_{2n} = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du + O\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad n\to\infty. \tag{29}$$

Для доказу дастаткова ў асімптатычных роўнасцях для інтэграла J_2 пакласці $\beta = 1$ і ўлічыць, што ў гэтым выпадку інтэграл $J_1 = 0$.

Вырашым зараз задачу мінімізацыі правых частак роўнасцей, атрыманых у тэарэме 4, шляхам выбару аптымальнага значэння параметра β. Пакладзём $\varepsilon^*_{2n} = \inf\limits_{\beta\in(0,1]} \varepsilon^*_{2n}(\beta)$. Будзем лічыць таксама, што лік α такі, што выконваецца ўмова $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\alpha) = \infty$. Відавочна, што пры выкананні такой умовы $\lim\limits_{n\to\infty} n\beta = \infty$. Паколькі для кожнага значэння n можа быць выбрана сваё значэнне параметра α, а адпаведна і β, то, наогул кажучы, $\beta = \beta(n)$, прычым пры выкананні азначанай вышэй умовы $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(n) = 0$.

Разгледзім выпадкі:

а) $s \in (0,1)$. У такім выпадку другі складнік у правай частцы роўнасці (24) мае большы парадак маласці ў параўнанні з першым складнікам. З улікам гэтага і таго, што $\beta(n) \to 0$ пры $n \to \infty$, атрымаем

$$\upsilon^{(s)}_{2n}(\beta) \sim \frac{1}{n\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}s(s+1)}, \quad n\to\infty, \tag{30}$$

$$\int_\beta^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du \sim \int_0^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du, \quad \beta\to 0.$$

У інтэграле $\int_0^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du$ выканаем замену $u = \sin t$. У выніку знойдзем [18]

$$\int_0^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^s t\cos^{1-s} t}{1+\sin t}dt = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi s}{2}}. \tag{31}$$

Такім чынам, на аснове роўнасці (23) будзем мець

$$\varepsilon_{2n}^{*}(\beta) \sim A(s)\cdot\frac{\beta^{s}}{n^{s}} + B(s)\cdot\frac{1}{n\beta}, \quad n\to\infty, \tag{32}$$

дзе

$$A(s) = \frac{2^{1-s}\Gamma(s)}{\pi(1-s)}\sin\frac{\pi s}{2}, \tag{33}$$

$$B(s) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}s(s+1)}. \tag{34}$$

Даследуем на экстрэмум функцыю $g(\beta) = A(s)\cdot\frac{\beta^{s}}{n^{s}} + B(s)\cdot\frac{1}{n\beta}$, якая стаіць у правай частцы асімптатычнай роўнасці (32). Вылічым вытворную функцыі $g(\beta)$:

$$g'(\beta) = sA(s)\cdot\frac{\beta^{s-1}}{n^{s}} - B(s)\cdot\frac{1}{n\beta^{2}},$$

$g'(\beta) = 0$ пры

$$\beta = \beta^{*} = n^{-\frac{1-s}{s+1}}\cdot\left(\frac{B(s)}{sA(s)}\right)^{\frac{1}{s+1}}, \tag{35}$$

прычым функцыя $g(\beta)$ мае ў пункце β^{*} строгі лакальны мінімум і $\beta^{*} < 1$ пры досыць вялікіх n.

Адсюль вынікае, што

$$\varepsilon_{2n}^{*} \sim g(\beta^{*}) = \frac{1}{n^{\frac{2s}{1+s}}}\cdot A^{\frac{1}{s+1}}(s)B^{\frac{s}{s+1}}(s)\cdot\frac{1+s}{s^{\frac{s}{s+1}}}, \quad n\to\infty.$$

б) $s = 1$. Аналагічна, як і пры $s \in (0,1)$, на аснове роўнасці (25) будзем мець

$$\varepsilon_{2n}^{*}(\beta) \sim \frac{1}{\pi n}\left(\beta\ln n + \frac{1}{\beta}\int_{0}^{1}\frac{u^{s}}{(1-u^{2})^{\frac{s}{2}}(1+u)}du\right), \quad n\to\infty,$$

адкуль з улікам формулы (31) атрымаем

$$\varepsilon_{2n}^{*}(\beta) \sim \frac{1}{\pi n}\left(\beta\ln n + \frac{\pi}{2\beta}\right), \quad n\to\infty. \tag{36}$$

Даследуем на экстрэмум функцыю $g_{2}(\beta) = \frac{1}{\pi n}\left(\beta\ln n + \frac{\pi}{2\beta}\right)$, якая стаіць у правай частцы асімптатычнай роўнасці (36). Вылічым вытворную функцыі $g_{2}(\beta)$:

$$g_{2}'(\beta) = \frac{1}{\pi n}\left(\ln n - \frac{\pi}{2\beta^{2}}\right),$$

$g_2'(\beta)=0$ пры $\beta=\beta^*=\sqrt{\dfrac{\pi}{2\ln n}}$, прычым функцыя $g_2(\beta)$ мае ў пункце β^* строгі лакальны мінімум і $\beta^*\le 1$ пры досыць вялікіх n. Адсюль вынікае, што

$$\varepsilon_{2n}^*\sim g_2(\beta^*)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\ln n}}{n},\quad n\to\infty.$$

в) $s\in(1,2)$. Відавочна, што ў гэтым выпадку на аснове формулы (26)

$$\varepsilon_{2n}^*\sim\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi s}{2}\inf_{0<\beta\le1}\left(\frac{\beta}{n}\int_0^\beta\frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du+\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2}\int_\beta^1\frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du+\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}s(s+1)}\right)\right),\quad n\to\infty.$$

Такім чынам, справядліва

Т э а р э м а 5. *Для набліжэння функцыі* $|\sin x|^s$, $s\in(0;2)$, $x\in R$, *рацыянальнымі аператарамі Феера ў выпадку двух геаметрычна розных полюсаў праўдзяцца асімптатычныя роўнасці:*

а) пры $s\in(0,1)$

$$\varepsilon_{2n}^*\sim\frac{1}{n^{\frac{2s}{1+s}}}\cdot A^{\frac{1}{s+1}}(s)B^{\frac{s}{s+1}}(s)\cdot\frac{1+s}{s^{\frac{s}{s+1}}},\quad n\to\infty,\tag{37}$$

дзе

$$A(s)=\frac{2^{1-s}\Gamma(s)}{\pi(1-s)}\sin\frac{\pi s}{2},\qquad B(s)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}s(s+1)};$$

б) пры $s=1$

$$\varepsilon_{2n}^*\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\ln n}}{n},\quad n\to\infty;\tag{38}$$

в) пры $s\in(1,2)$

$$\varepsilon_{2n}^*\sim\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi s}{2}\inf_{0<\beta\le1}\left(\frac{\beta}{n}\int_0^\beta\frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du+\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2}\int_\beta^1\frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1+u)}du+\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}s(s+1)}\right)\right),\quad n\to\infty.$$

Заўважым, што з параўнання ацэнак (37), (38) і (27), (28) вынікае, што рацыянальныя аператары Феера набліжаюць функцыю $|\sin x|^s$ ў выпадку $s\in(0,1]$ лепш у сэнсе парадку за полінаміяльныя.

Заключэнне. Даследаваны набліжэнні функцыі $|\sin x|^s$ рацыянальнымі трыганаметрычнымі аператарамі Феера. Атрымана інтэгральнае прадстаўленне астатку набліжэнняў, а таксама папунктавая ацэнка набліжэнняў пры $x\in(-\pi,0)\bigcup(0,\pi)$ пры ўмове паўнаты адпаведнай сістэмы рацыянальных функцый. Падрабязна даследаваны выпадак двух геаметрычна розных полюсаў. Паказана, што ўжо ў гэтым выпадку пры $s\in(0,1]$ раўнамернае набліжэнне трыганаметрычнымі рацыянальнымі аператарамі Феера лепш у сэнсе парадку за полінаміяльнае. Знойдзена асімптатычная ацэнка раўнамерных набліжэнняў полінаміяльнымі трыганаметрычнымі аператарамі Феера функцыі $|\sin x|^s$, $s\in(0,2)$.

Спіс выкарыстаных крыніц

1. Fejér, L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen / L. Fejér // Math. Ann. – 1904. – Vol. 58, № 1–2. – P. 51–69. https://doi.org/10.1007/bf01447779
2. Lebesgue, H. Sur les intégrales singulières / H. Lebesgue // Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques. – 1909. – Vol. 1, № 1. – P. 25–117. https://doi.org/10.5802/afst.257
3. Bernstein, S. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degre donne / S. Bernstein // Mem. Acad. Roy. Belgique. – 1912. – Vol. 4, № 4. – P. 1–104.
4. Zygmund, A. On the degree of approximation of functions by Fejér means / A. Zygmund // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1945. – Vol. 51, № 4. – P. 274–278. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1945-08332-3
5. Джрбашян, М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М. М. Джрбашян // Изв. Акад. наук Армян. ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.
6. Русак, В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979. – 179 с.
7. Petrushev, P. P. Rational approximation of real functions / P. P. Petrushev, V. A. Popov. – Cambridge University Press, 1988. – 384 p. https://doi.org/10.1017/cbo9781107340756
8. Ровба, Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2001. – 106 с.
9. Лунгу, К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К. Н. Лунгу // Мат. сб. – 1971. – Т. 86 (128), № 2 (10). – С. 314–324.
10. Лунгу, К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К. Н. Лунгу // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 151–160.
11. Ровба, Е. А. О приближении рациональными функциями с заданным числом полюсов / Е. А. Ровба // Современные проблемы теории функций: материалы Всесоюз. шк. по теории функций, Баку, 21 мая – 1 июня 1977 г. – Баку, 1980. – С. 234–239.
12. Старовойтов, А. П. Аппроксимация рациональными функциями с заданным числом полюсов / А. П. Старовойтов. – Минск: Белорус. гос. ун-т., 1984. – 23 с.
13. Поцейко, П. Г. Об одном рациональном интегральном операторе типа Фурье – Чебышева и аппроксимации функций Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2020. – № 2. – С. 6–27. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27
14. Поцейко, П. Г. Суммы Фейера рационального ряда Фурье – Чебышева и аппроксимации функции $|x|^s$ / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 3. – С. 18–34. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-18-34
15. Казлоўская, Н. Ю. Аб набліжэннях рацыянальнымі трыганаметрычнымі аператарамі Феера на класах Ліпшыца / Н. Ю. Казлоўская // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 13–22.
16. Казлоўская, Н. Ю. Аб апраксімацыі функцыі $|\sin x|^s$ частковымі сумамі трыганаметрычных рацыянальных шэрагаў Фур'е / Н. Ю. Казлоўская, Я. А. Роўба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 1. – С. 11–17. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-11-17
17. Ахиезер, Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
18. Эрдейи, А. Асимптотические разложения: пер. с англ. / А. Эрдейи. – М.: Физматгиз, 1962. – 128 с.

References

1. Fejér L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Mathematische Annalen*, 1904, vol. 58, no. 1–2, pp. 51–69. https://doi.org/10.1007/bf01447779
2. Lebesgue H. Sur les intégrales singulières. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques*, 1909, vol. 1, pp. 25–117. https://doi.org/10.5802/afst.257
3. Bernstein S. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degre donne. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux Arts de Belgique*, 1912, vol. 4, no. 4, pp. 1–104.
4. Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejér means. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1945, vol. 51, no. 4, pp. 274–278. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1945-08332-3
5. Dzhrbashian M. M. To Fourier series theory about rational functions. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoi SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences of the Armenian SSR. Series of Physical and Mathematical Sciencies], 1956, vol. 9, no. 7, pp. 3–28 (in Russian).
6. Rusak V. N. *Rational Functions as Approximation Apparatus*. Minsk, BSU, 1979. 179 p. (in Russian).
7. Petrushev P. P., Popov V. A. *Rational Approximation of Real Functions.* Cambridge University Press, 1988. 384 p. https://doi.org/10.1017/cbo9781107340756
8. Rovba E. A. *Interpolation and Fourier Series in Rational Approximation.* Grodno, Grodno State University, 2001. 106 p. (in Russian).
9. Lungu K. N. On best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Matematicheskii sbornik Sbornik: Mathematics*, 1971, vol. 86 (128), no. 2 (10), pp. 314–324 (in Russian).
10. Lungu K. N. On best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Sibirskii matematicheskii zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 1984, vol. 15, no. 2, pp. 151–160 (in Russian).

11. Rovba E. A. On approximation by rational functions with a given number of poles. *Sovremennye problemy teorii funktsii: materialy Vsesoyuznoi shkoly po teorii funktsii* [Modern Problems of the Theory of Functions: Materials All-Union. schools on the theory of functions]. Baku, 1980, pp. 234–239 (in Russian).

12. Starovoitov A. P. *Approximation by Rational Functions with a Given Number of Poles.* Minsk, BSU, 1984. 23 p. (in Russian).

13. Patseika P. G., Rovba Ya. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 2, pp. 6–27 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27

14. Patseika P. G., Rovba Ya. A. Fejer means of rational Fourier – Chebyshev series and approximation of function $|x|^s$]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 3, pp. 18–34 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-18-34

15. Kazlouskaya N. Ju. On the approximation by rational trigonometric operators of Fejér type on Lipschitz classes. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaŭnaga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2022, vol. 12, no. 2, pp. 13–22 (in Belarussian).

16. Kazlouskaya N. Yu., Rouba Ya. A. Approximation of the function $|\sin x|^s$ by the partial sums of the trigon-mometric rational fourier series. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 11–17 (in Belarussian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-1-11-17

17. Ahiezer N. I. *Lectures on Approximation Theory.* Moscow, Nauka Publ., 1965. 408 p. (in Russian).

18. Erdelyi A. *Asymptotic Expansions.* Dover Publ., 1956. 128 p.

Інфармацыя аб аўтарах

Роўба Яўген Аляксеевіч – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры фундаментальнай і прыкладной матэматыкі і інфарматыкі, Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Янкі Купалы (вул. Ажэшкі, 22, 230023, Гродна, Рэспубліка Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com

Казлоўская Наталля Юр'еўна – аспірант кафедры фундаментальнай і прыкладной матэматыкі і інфарматыкі, Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Янкі Купалы (вул. Ажэшкі, 22, 230023, Гродна, Рэспубліка Беларусь). E-mail: Kozlowskaya_Natalya@tut.by

Information about the authors

Yaugeni A. Rovba – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com

Natallia Yu. Kazlouskaya – Postgraduate Student of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus).
E-mail: Kozlowskaya_Natalya@tut.by