ФІЗІКА

УДК 530.182

М. А. КНЯЗЕВ, Н. Г. БЛИНКОВА

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОСОЛИТОННЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 30.04.2015)

Введение. Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) относится к числу наиболее хорошо изученных нелинейных уравнений в частных производных. Данное уравнение является интегрируемым, т. е. имеет решение не только в виде одиночного солитона, но и бесконечное количество решений, соответствующих связанным состояниям произвольного числа солитонов и (или) антисолитонов [1]. Каждому такому решению соответствует некоторый закон сохранения.

В настоящее время значительное внимание уделяется проблеме взаимосвязи между решениями уравнения КдФ и решениями уравнения Фридмана в космологии. Возможность такой взаимосвязи обусловлена нелинейным характером указанных уравнений. Эта проблема получила название дуализма гравитация/солитон [2].

Связь между решениями уравнения КдФ и уравнения Риккати широко применяется при изучении космологических моделей. Например, в работе [3] рассмотрены адиабатические солитоны уравнения КдФ в баротропических открытых космологических моделях. При этом для решения уравнения Фридмана [4] используется уравнение Риккати для параметра Хаббла и показана его связь с уравнением КдФ. Аналогичный подход применяется в [5, 6] при исследовании космологической жидкости Дарбу для объяснения космологического эффекта ускорения. При этом метод с применением адиабатических индексов оказывается эффективным, так как космологическое микроволновое излучение имеет характер гауссова и адиабатического [7]. Такой характер микроволнового излучения предсказывается в том числе и в инфляционной модели [8]. В целом же подход с использованием уравнения Риккати для решения нелинейных уравнений в частных производных находит все более широкое применение [9, 10].

В явном виде связь между уравнениями Фридмана и уравнением КдФ изучена в [2] для ряда космологических сценариев: инфляционной модели, циклической Вселенной и т. д. Для инфляционной модели получено выражение для постоянной Хаббла в зависимости от решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка для потенциальной функции. Предложенный подход предполагает явное вычисление производной Шварца [11]. В указанной работе было использовано односолитонное решение уравнения КдФ. Представляется интересным изучить, как изменятся полученные результаты, если вместо односолитонного решения использовать двухсолитонное. В настоящей работе рассмотрены математические аспекты указанной проблемы.

Постановка задачи. В работе [2] уравнение КдФ рассматривается в виде

$$u_t + \frac{3}{u_0} u u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где u_0 – некоторая константа, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ и т. п.

При помощи замены зависимой переменной $u \to -2u_0 u$ это уравнение можно записать в стандартной форме

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

Односолитонное решение уравнения (2) известно [1]:

$$u(x,t) = -\frac{\lambda^2}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\lambda}{2}\left(x-\lambda^2 t\right)\right], \tag{3}$$

где λ – постоянная. Если ввести новую независимую переменную $\varphi = x - \lambda t$, то уравнение КдФ можно записать в виде ОДУ следующего вида:

$$-\lambda^2 u' + u''' + \frac{3}{u_0}uu' = 0, \tag{4}$$

а его решение в виде $u = u(\varphi)$. Здесь посредством штриха обозначена производная по φ. Для тривиального решения $u = 0$ преобразовании Бэклунда можно записать в виде

$$u = u_0\left(\lambda^2 - 4y^2\right), \tag{5}$$

где $y = y(\varphi)$ – новая неизвестная функция, являющаяся решением уравнения Риккати вида

$$y' + y^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0. \tag{6}$$

Решение данного уравнения удовлетворяет следующему ОДУ третьего порядка:

$$S\left[y(\varphi)\right] = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = -\frac{\lambda^2}{2}, \tag{7}$$

левая часть которого представляет собой производную Шварца. Именно свойства этой производной позволили установить аналогию между распространением солитона и динамикой Вселенной в инфляционной модели. В этой связи в качестве первого этапа исследования интересно посмотреть, как изменится уравнение (7), если использовать двухсолитонное решение уравнения КдФ.

Двухсолитонное решение. В общем случае двухсолитонное решение уравнение КдФ имеет вид [12]

$$u(x,t) = -2\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right)\frac{\lambda_2^2\operatorname{cosech}^2(\gamma_2) + \lambda_1^2\operatorname{cosech}^2(\gamma_1)}{\left(\lambda_2\operatorname{cth}(\gamma_2) - \lambda_1\operatorname{cth}(\gamma_1)\right)^2}, \tag{8}$$

$$\gamma_1 = \lambda_1 x - 4\lambda_1^3 t + \delta_1,\ \gamma_2 = \lambda_2 x - 4\lambda_2^3 t + \delta_2,\ \delta_i = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{m_i(0)}{2\lambda_i}\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)\right],\ i = 1,2,$$

где параметры λ_1 и λ_2 имеют тот же смысл, что и параметр λ в соотношении (3), а $m_i(0)$– нормировочные константы, появляющиеся при решении задачи рассеяния. Решение рассматриваемой нами задачи с использованием соотношения (8) представляется весьма громоздким. Гораздо проще исследовать предельные случаи двухсолитонного решения в моменты времени, значительно отстоящие в прошлое или будущее от момента времени взаимодействия его составляющих. В первом случае соотношение (8) можно представить в виде

$$u(x,t) = -2\lambda_1^2\operatorname{sech}^2(\gamma_1 - \Delta) - 2\lambda_2^2\operatorname{sech}^2(\gamma_2 + \Delta), \tag{9}$$

где $\Delta = \operatorname{arctg}(\lambda_1/\lambda_2)$, а во втором

$$u(x,t) = -2\lambda_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 + \Delta) - 2\lambda_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 - \Delta). \tag{10}$$

Видно, что солитонные компоненты взаимодействуют упруго и единственным результатом этого является дополнительный сдвиг по фазе. В обоих случаях двухсолитонное решение можно записать в виде

$$u(x,t) = u_1\left(x - 4\lambda_1^2 t\right) + u_2\left(x - 4\lambda_2^2 t\right). \tag{11}$$

По аналогии с решением в виде одиночного солитона введем две новые независимые переменные $\varphi_1 = x - 4\lambda_1^2 t$ и $\varphi_2 = x - 4\lambda_2^2 t$, причем, поскольку различие между ними состоит только в λ_1 и λ_2, дифференцирование по этим переменным будем в обоих случаях одинаково обозначать штрихом, учитывая при вычислении производных очевидное отличие в коэффициентах.

Построение уравнений. Будем использовать формальное соотношение (11). Анализ фазовых сдвигов может быть проведен на заключительной стадии исследования. Подставим (11) в уравнение (1). В результате получим соотношение

$$-4\lambda_1^2 u_1' - 4\lambda_2^2 u_2' + u_1''' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0}(u_1 u_2)' = 0. \tag{12}$$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$(u_1 u_2)' = 0, \tag{13}$$

то уравнение (12) расщепляется на два не связанных между собой уравнения и для каждой из составляющих решения (11) можно получить результаты, аналогичные результатам, полученным в работе [2] для односолитонного решения. Оценим, какие ограничения при этом накладываются на параметры λ_1 и λ_2. Подставим соотношение (9) в уравнение (13) и, считая время достаточно большим, опустим конкретные значения x, тогда можно получить соотношение вида

$$\frac{m_1(0)}{m_2(0)} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2(\lambda_2 + \lambda_1)},$$

из которого можно сделать заключение о возможном значении одного из параметров λ_i, $i = 1, 2$, если задан другой.

Рассмотрим случай, когда условие (13) не выполняется. Теперь уравнение (12) можно заменить одной из двух следующих систем уравнений:

$$-4\lambda_1^2 u_1' + u_1''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_1 u_2' = 0, \tag{14}$$

$$-4\lambda_2^2 u_2' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} u_2 u_1' = 0, \tag{15}$$

или

$$-4\lambda_1^2 u_1' + u_1''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_2 u_1' = 0, \tag{16}$$

$$-4\lambda_2^2 u_2' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} u_1 u_2' = 0. \tag{17}$$

В обоих случаях симметрия относительно замены индексов 1 и 2 очевидна.

Введем две новые функции y_1 и y_2 при помощи соотношений

$$u_1 = u_0\left(\lambda_1^2 - a_1 y_1^2\right), \tag{18}$$

$$u_2 = u_0\left(\lambda_2^2 - a_2 y_2^2\right). \tag{19}$$

Подставим соотношения (18) и (19), например, в уравнения (16) и (17). В результате получим систему уравнений, которую можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\left(y_1^2\right)'''}{\left(y_1^2\right)'} - 3\left(y_1^2 + y_2^2\right) = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \tag{20}$$

$$\frac{\left(y_2^2\right)'''}{\left(y_2^2\right)'} - 3\left(y_1^2 + y_2^2\right) = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2. \tag{21}$$

Для предельного случая двухсолитонного решения данную систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка можно рассматривать как аналог уравнения (7).

Преобразование системы уравнений для функций y_1 и y_2 при помощи производной Шварца. Запишем для каждой из функций y_1 и y_2 уравнение вида (7):

$$\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2 = -\frac{\lambda_1^2}{2}, \tag{22}$$

$$\frac{y_2'''}{y_2'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_2''}{y_2'}\right)^2 = -\frac{\lambda_2^2}{2}. \tag{23}$$

Это можно сделать, поскольку как для времени, удаленного в прошлое, так и для времени, соответствующего будущему, можно считать, что компоненты двухсолитонного решения практически не взаимодействуют друг с другом и их с хорошей точностью можно рассматривать как односолитонные решения.

Вычтем из уравнения (20) уравнение (21). Если в полученное соотношение подставить явно вычисленные производные от квадратов функций y_1 и y_2, то можно получить уравнение вида

$$\frac{4}{3}S\left[y_2\right] - \frac{1}{3}\cdot\frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_2''}{y_2} = \frac{4}{3}S\left[y_1\right] - \frac{1}{3}\cdot\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{y_1''}{y_1}. \tag{24}$$

Левая часть уравнения (24) зависит только от функции y_2, а правая – от функции y_1. Можно заключить, что левая и правая части этого уравнения равны некоторой константе. Следовательно, соотношение (24) описывает некоторую величину, инвариантную относительно перестановки индексов.

Уравнение связи между функциями y_1 и y_2. Аналитическое решение системы уравнений (20), (21) в общем случае достаточно затруднено. Однако возможен частный случай, когда некоторое упрощение может быть реализовано. Введем следующие обозначения:

$$y_1^2 = m, \quad y_2^2 = n, \quad b_1 = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \quad b_2 = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2.$$

В данных обозначениях систему уравнений (22), (23) можно представить в виде

$$m''' - 3m'\left(m + n\right) = b_1 m', \tag{25}$$

$$n''' - 3n'\left(m + n\right) = b_2 n. \tag{26}$$

Полученную систему достаточно просто исследовать при условии $b_1 = b_2 = b$. Сложим уравнения (25) и (26), тогда, если ввести новую функцию $z = m + n$, полученное уравнение можно записать следующим образом:

$$z''' - \left(3z + b\right)z' = 0. \tag{27}$$

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка вида (27) изучено достаточно хорошо [13]. В общем случае оно имеет вид

$$z''' = f\left(z\right)z', \tag{28}$$

а общее решение такого уравнения записывается следующим образом:

$$C_3 \pm x = \int \left[C_2 z + C_1 + 2\int F(z) dz \right]^{-1/2} dz,$$

где x – независимая переменная, C_i, $i = 1,2,3,$ – постоянные интегрирования, а функция $F(z)$ определяется соотношением

$$F(z) = \int f(z) dz.$$

В нашем случае $f(z) = 3z + b$, и общее решение уравнения принимает вид

$$C_3 \pm x = \int \left[C_2 z + C_1 + bz^2 + z^3 \right]^{-1/2} dz. \qquad (29)$$

Достаточно просто интеграл (29) вычисляется при $C_1 = 1$, $C_2 = b = 3$, тогда из соотношения (29) получаем

$$C_3 \pm x = \pm \frac{2}{\left(y_1^2 + y_2^2 \right)^{1/2}}. \qquad (30)$$

При указанных выше ограничениях выражение (30) описывает связь между компонентами двухсолитонного решения уравнения КдФ в тех случаях, когда время (по модулю) достаточно велико. Ясно, что в силу этих ограничений данное соотношение носит приближенный характер и дает только качественную картину поведения решения.

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
2. *Lidsey J. E.* // arXiv: astro-phys/ 1205.5641 [Electronic resource].
3. *Haret C. R.* // Mod. Phys. Lett. A. 2002. Vol. 17, N 11. P. 667–670.
4. *Faraoni V.* // Am. J. Phys. 1999. Vol. 67, N 8. P 732–734.
5. *Rosu H. C.* // Mod. Phys. Lett. A. 2000. Vol. 15, N 15. P. 979–990.
6. *Rosu H.* C. // Mod. Phys. Lett. A. 2001. Vol. 16, N 17. P. 1147–1150.
7. *Spergel D. N.* et al // Astrophys. J. Suppl. 2003. Vol. 148, N 1. P. 97–118.
8. *Khoury J., Seinhardt P. J., Turok N.* // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, N 16. 161301.
9. *Tao Geng, Wen-Rui Shan* // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 372, N 10. P. 1626–1630.
10. *Lou S. Y.* // arXiv: nlin/ 1308.589 [Electronic resource].
11. *Hille E.* Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York, 1976.
12. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М., 1983.
13. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

M. A. KNYAZEV, N. G. BLINKOVA

RELATION BETWEEN ONE-SOLITON COMPONENTS OF TWO-SOLITON SOLUTION FOR THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

Summary

The system of third-order nonlinear differential equations for components of two-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation at $t \to \pm \infty$ is constructed. The equation describing the relation between these components is derived, and a general solution of this equation is obtained for one special case.