ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.1
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-121-129

Поступила в редакцию 01.12.2022
Received 01.12.2022

В. В. Лепин

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ЗАДАЧА О $(\{K_1,K_2\},k,l)$-УПАКОВКЕ НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА В ГРАФЕ

Аннотация. Рассматривается задача о $(\{K_1,K_2\},k,l)$-упаковке наибольшего веса в графе, которая обобщает ряд известных задач, например, о независимом множестве, максимальном индуцированном паросочетании, k-разделенном паросочетании, связном паросочетании, диссоциирующем множестве, k-упаковке. Показано, что в классе кографов $(\{K_1,K_2\},k,l)$-упаковку наибольшего веса можно найти за время $O(n + m)$. Пусть Γ – класс графов и Γ^* – класс всех простых (относительно модульной декомпозиции) порожденных подграфов из Γ. Доказано, что если задача об оптимальной $(\{K_1,K_2\},k,l)$-упаковке графа может быть решена в классе графов Γ^* за время $O(n^p)$, где $p \geq 2$ – константа, то эта задача может быть решена в классе графов Γ за время $O(n^p)$.

Ключевые слова: граф, упаковка, модульная декомпозиция, индуцированное паросочетание, k-разделенное паросочетание, k-упаковка

Для цитирования. Лепин, В. В. Задача о $(\{K_1, K_2\},k,l)$-упаковке наибольшего веса в графе / В. В. Лепин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 2. – С. 121–129. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-121-129

Victor V. Lepin

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

THE MAXIMUM WEIGHT $(\{K_1,K_2\},k,l)$-PACKING PROBLEM IN A GRAPH

Abstract. In this paper, we consider the maximum weight $(\{K_1,K_2\},k,l)$-packing problem in a graph. This problem generalizes a number of well-known problems, for example: maximum induced matching, k-separated matching, connected matching, independent set, dissociating set, k-packing. We show that in the class of cographs, a maximum weight $(\{K_1,K_2\},k,l)$-packing can be computed in $O(n + m)$ time. Let Γ be a class of graphs and Γ^* be a class of all simple (with respect to the modular decomposition) induced subgraphs from Γ. It is proven that if the maximum weight $(\{K_1,K_2\},k,l)$-packing problem can be solved in the class of graphs Γ^* in time $O(n^p)$, where $p \geq 2$ is a constant, then this problem can be solved in the class of graphs Γ in time $O(n^p)$.

Keywords: graph, packing, modular decomposition, induced matching, k-independent set, k-packing

For citation. Lepin V. V. The maximum weight $(\{K_1,K_2\},k,l)$-packing problem in a graph. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 121–129 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-121-129

Задачи об упаковке графа изучаются давно и интенсивно, что обусловлено их теоретическим и практическим значением (см., напр., обзор [1]). В некоторых таких задачах присутствуют ограничения на расстояние между упаковываемыми подграфами (напр., [2–8]).

Рассматривается задача об оптимальной $(\{K_1,K_2\},k,l)$-упаковке графа. В такой упаковке $\mathbf{S} = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ – расстояние между любыми подграфами G_i и G_j не меньше k и не больше l. Представлены алгоритмы, которые, используя модульную декомпозицию, решают эту задачу.

Далее, граф – это конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Если G – граф, то $V(G)$ – множество его вершин и $E(G)$ – множество его ребер. Множество всех вершин графа G, смежных с вершиной $v \in V(G)$, называется окружением вершины v и обозначается как $N(v)$. Множество $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ называется замкнутым окружением вершины v.

Если $U \subseteq V(G)$ и $F \subseteq E(G)$, то $G[U]$ обозначает подграф, порожденный множеством вершин U, $G[F]$ обозначает подграф, порожденный множеством ребер F, $G[(U,F)]$ обозначает подграф, порожденный парой множеств (U,F). Запись $G \cong H$ означает, что графы G и H изоморфны.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ – вершинно различные графы. *Объединением* графов G_1 и G_2 называется граф $G_1 \cup G_2$ с множеством вершин $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. *Соединением* графов G_1 и G_2 называется граф $G_1 + G_2$, получаемый из $G_1 \cup G_2$ добавлением всех ребер между вершинами V_1 и V_2.

Пусть G_1 и G_2 – графы с не пересекающимися множествами вершин, $u \in G_1$. Говорят, что граф G получен в результате *подстановки* G_2 вместо u в G_1, если выполняется следующее:

$V(G) = (V(G_1) - \{u\}) \cup V(G_2)$; $G[V(G_1) - \{u\}] = G_1 - u$; $G[V(G_2)] = G_2$;

для каждой вершины $v \in V(G_1) - \{u\}$, если v смежна (соответственно, не смежна) с вершиной u в G_1, то v смежна (соответственно, не смежна) с каждой вершиной из $V(G_2)$ в графе G.

Далее понадобится более общая подстановочная операция, чем дана выше. Будем называть ее *графовой подстановкой* и определим следующим образом. Пусть H – граф с множеством вершин $V(H) = \{v_1, \ldots, v_r\}$. Пусть $H_1, \ldots, H_r$ – графы, такие, что $V(H_i) \cap V(H_j) = \varnothing$ для $1 \le i < j \le r$.

Говорят, что граф G получен в результате *подстановки* $H_1, \ldots, H_r$ вместо $v_1, \ldots, v_r$ в H, и обозначают это как $G = H(H_1, \ldots, H_r)$, если выполняется следующее:

$V(G) = V(H_1) \cup \cdots \cup V(H_r)$;

для всех $i \in \{1, \ldots, r\}$, $G[V(H_i)] = H_i$;

для всех различных $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, если v_i смежна (соответственно, не смежна) с вершиной v_j в H, то $V(H_i)$ полностью смежна (соответственно, не смежна) с $V(H_j)$ в графе G. То есть $E(G) = E(H_1) \cup \cdots \cup E(H_r) \cup \{uv \mid u \in V(H_i),\ v \in V(H_j),\ v_i v_j \in E(G)\}$.

Отметим, что если H – полный граф, то $H(H_1, \ldots, H_r) = H_1 + \cdots + H_r$, а если H – граф без ребер, то $H(H_1, \ldots, H_r) = H_1 \cup \cdots \cup H_r$.

Подмножество вершин $U \subseteq V(G)$ называется *диссоциирующим множеством* графа G, если максимальная степень вершин в подграфе $G[U]$ не превосходит 1.

Подмножество ребер графа G называется *паросочетанием*, если никакие 2 ребра из этого множества не имеют общей концевой вершины. *Индуцированным паросочетанием* называется паросочетание $F \neq \varnothing$, в котором концы никаких двух различных ребер не смежны в графе G.

Пусть F – это семейство графов. Тогда граф называется *F-свободным*, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных графам из F. Простая цепь на n вершинах обозначается как P_n.

Расстояние $d(v_1,v_2)$ между двумя вершинами v_1 и v_2 графа G определяется как длина кратчайшей цепи, связывающей эти вершины. В том случае, когда v_1 и v_2 находятся в разных компонентах связности, полагают $d(v_1, v_2) = \infty$. Кроме того, если $v_1 = v_2$, то $d(v_1,v_2) = 0$.

Расстояние $d(G_1,G_2)$ между двумя подграфами G_1 и G_2 графа G определяется как $\min\{d(v,u) : v \in V(G_1), u \in V(G_2)\}$.

Задачи об упаковке графа. Пусть $\mathbf{H}$ – фиксированное множество попарно не изоморфных связных графов и G – произвольный граф.

Множество $\mathbf{S} = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ подграфов графа G будем называть **H**-*упаковкой* графа G, если для каждого $G_i \in \mathbf{S}$ существует такой граф $H \in \mathbf{H}$, что $G_i \cong H$ и для любых двух подграфов $G_i, G_j \in \mathbf{S}$, $i \neq j$, выполняется $d(G_i, G_j) \ge 1$.

Независимой **H**-*упаковкой* графа G называется **H**-упаковка **S**, в которой для любых двух подграфов $G_i, G_j \in \mathbf{S}$, $i \neq j$, выполняется $d(G_i, G_j) \ge 2$. То есть в независимой **H**-упаковке графа G никакие 2 подграфа упаковки не соединены ребром графа G.

Пусть k,l – целые числа и $0 \le k \le l$. Множество подграфов $\mathbf{S} = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ графа G будем называть (**H**,k,l)-*упаковкой* графа G, если для каждого $G_i \in \mathbf{S}$ существует такой граф $H \in \mathbf{H}$, что $G_i \cong H$ и для любых двух подграфов $G_i, G_j \in \mathbf{S}$, $i \neq j$, выполняется $k \le d(G_i, G_j) \le l$.

H-упаковка S графа G называется *порожденной*, если каждый подграф, входящий в S, является порожденным подграфом графа G. Отметим, что когда $\mathbf{H} \subseteq \{K_1, K_2, K_3\}$, то любая **H**-упаковка графа является порожденной.

Когда **H** состоит из одного графа H, мы вместо формально правильного термина $\{H\}$-упаковка будем писать H-упаковка. Поскольку существует естественное соответствие между ребрами графа и подграфами, изоморфными K_2, то ясно, что каждой K_2-упаковке графа G соответствует паросочетание графа G и наоборот. Аналогично, существует взаимно-однозначное соответствие между независимыми K_2-упаковками графа G и индуцированными паросочетаниями этого графа. Кроме того, независимая K_1-упаковка графа G является независимым множеством G.

Пусть граф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \to \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \to \mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{H}$ – фиксированное множество попарно не изоморфных связных графов и для каждого $H \in \mathbf{H}$ задана функция f_H, которая используется для вычисления веса подграфа $G' \subseteq G$, изоморфного H.

Пусть $S = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ – $(\mathbf{H},k,l)$-упаковка графа G. Весом упаковки S будем называть число

$$w_{k,l}(G,S) = \sum_{i=1}^{m} f_{H \cong G_i}(G_i, w_V, w_E).$$

В задаче о $(\mathbf{H},k,l)$-упаковке наибольшего веса в графе дан граф G вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \to \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \to \mathbb{R}$. Требуется для графа G найти $(\mathbf{H},k,l)$-упаковку с наибольшим весом. Задача о $(\mathbf{H},k,l)$-упаковке наибольшего веса в графе может быть эффективно решена в ряде классов графов. Одним из подтверждений этого утверждения является факт существования следующего сведения такой задачи к задаче о независимом множестве наибольшего веса в графе.

Пусть G – граф, $\mathbf{H}$ – множество графов, k,l – целые числа и $1 \le k \le l$. Построим граф $H(G,\mathbf{H},k,l)$, вершинами которого являются подграфы графа G, каждый из которых изоморфен некоторому графу из $\mathbf{H}$, и две вершины соединены ребром, когда для соответствующих им подграфов G' и G'' выполняется $d(G',G'') \notin \{k,\ldots,l\}$. Тогда $(\mathbf{H},k,l)$-упаковке графа G соответствует независимое множество вершин в графе $H(G,\mathbf{H},k,l)$ и наоборот. Если граф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \to \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \to \mathbb{R}$, то установим вес вершины $v \in V\big(H(G,\mathbf{H},k,l)\big)$ равным $w_{k,l}(v) = f_{G_v}(G_v, w_V, w_E)$, где G_v – подграф графа G, соответствующий вершине v. Тогда $(\mathbf{H},k,l)$-упаковке веса ω графа G соответствует независимое множество вершин веса ω в графе $H(G,\mathbf{H},k,l)$ и наоборот.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* $\mathbf{H}$ *– фиксированное множество попарно не изоморфных связных графов,* k,l – целые числа и $1 \le k \le l$. *Если в классе графов* Γ *граф* $H(G,\mathbf{H},k,l)$ *может быть построен за полиномиальное от размера* G *время и независимое множество наибольшего веса в графе* $H(G,\mathbf{H},k,l)$ *может быть найдено за полиномиальное время, то в классе графов* Γ *задача о* $(\mathbf{H},k,l)$*-упаковке наибольшего веса также может быть решена за полиномиальное время.*

Задача о $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке наибольшего веса. Пусть граф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах: $w_V : V(G) \to \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \to \mathbb{R}$. Пусть $S = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ – $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковка графа G. Весом упаковки S будем называть число

$$w_{k,l}(G,S) = \sum_{v \in U} w_V(v) + \sum_{e \in F} w_E(e),$$

где $U = \bigcup_{G_i \in S : G_i \cong K_1} V(G_i)$ и $F = \bigcup_{G_i \in S : G_i \cong K_2} E(G_i)$.

Будем полагать, что $w_{k,l}(G,\varnothing) = 0$.

В задаче о $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке наибольшего веса требуется найти $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковку графа G, имеющую наибольший вес $w^*_{k,l}(G) = \max_S w_{k,l}(G,S)$. Задавая пару чисел (k,l) и устанавливая определенные веса вершинам и ребрам графа G, мы можем формулировать другие задачи в виде взвешенной задачи о $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке графа G (таблица).

Множество, которому принадлежат веса вершин	Множество, которому принадлежат веса ребер	(k,l)	Критерий	Известное название задачи
{1}	{0}	$(2,\infty)$	$w_{k,l}(G,S) = \lvert U \rvert$	Независимое множество
{1}	{0}	(k,∞)	$w_{k,l}(G,S) = \lvert U \rvert$	k-упаковка
$\mathbb{R}$	{0}	$(2,\infty)$	$w_{k,l}(G,S) = \sum_{v \in U} w_V(v)$	Независимое множество наибольшего веса
$\mathbb{R}$	{0}	(k,∞)	$w_{k,l}(G,S) = \sum_{v \in U} w_V(v)$	k-упаковка наибольшего веса

Окончание табл.

Множество, которому принадлежат веса вершин	Множество, которому принадлежат веса ребер	(k,l)	Критерий	Известное название задачи
{0}	{1}	$(1,\infty)$	$w_{k,l}(G,S)=\|F\|$	Паросочетание
{0}	{1}	(1,1)	$w_{k,l}(G,S)=\|F\|$	Связное паросочетание
{0}	$\mathbb{R}$	$(1,\infty)$	$w_{k,l}(G,S)=\sum_{e\in F} w_E(e)$	Паросочетание наибольшего веса
{0}	{1}	$(2,\infty)$	$w_{k,l}(G,S)=\|F\|$	Индуцированное паросочетание
{0}	$\mathbb{R}$	$(2,\infty)$	$w_{k,l}(G,S)=\sum_{e\in F} w_E(e)$	Индуцированное паросочетание наибольшего веса
{0}	{1}	(k,∞)	$w_{k,l}(G,S)=\|F\|$	*k*-разделенное паросочетание
{0}	$\mathbb{R}$	(k,∞)	$w_{k,l}(G,S)=\|F\|$	*k*-разделенное паросочетание наибольшего веса
{1}	{2}	$(2,\infty)$	$w_{k,l}(G,S)=\|U\|+2\|F\|$	Диссоциирующее множество
{1}	{1}	$(1,\infty)$	$w_{k,l}(G,S)=\|U\|+\|F\|$	$\{K_1,K_2\}$-упаковка
{1}	{1}	$(2,\infty)$	$w_{k,l}(G,S)=\|U\|+\|F\|$	Независимая $\{K_1,K_2\}$-упаковка

Модульная декомпозиция. Модульная декомпозиция была введена Т. Галлаи в 1960-х гг. [9]. *Модульная декомпозиция* неориентированного графа – это рекурсивное разбиение его множества вершин на подмножества, называемые модулями. Подмножество вершин называется *модулем*, если внешнее окружение одной вершины подмножества совпадает с внешним окружением любой другой вершины этого же подмножества, т. е. подмножество вершин $M \subseteq V(G)$ является модулем, если $\forall u,\ v \in M$,

$$\{x \in V(G)\setminus M : xu \in E(G)\} = \{x \in V(G)\setminus M : xv \in E(G)\}.$$

Пустое множество, множество всех вершин $V(G)$ и каждое одновершинное подмножество $\{v\}$, $v \in V(G)$, являются модулями и называются *тривиальными модулями* графа G. Граф называется *простым,* если все его модули являются тривиальными.

Модуль M называется *сильным модулем* графа G, если для любого модуля M' графа G выполняется $M \cap M' = \varnothing$, либо $M \subseteq M'$ или $M' \subseteq M$. Сильный модуль M, максимальный по включению и отличный от $V(G)$, называется *максимальным сильным модулем*. Модульная декомпозиция графов основана на следующей декомпозиционной теореме.

Теорема 1 [9]. *Пусть G – граф с не менее чем двумя вершинами. Тогда точно одно из следующих условий выполняется:*

1) G не является связным, и поэтому может быть декомпозирован на компоненты связности;

2) $\overline{G}$ не является связным, и поэтому G может быть декомпозирован на ко-компоненты связности;

3) G является связным и ко-связным; существует подмножество вершин $U \subseteq V(G)$ и единственное разбиение P множества $V(G)$ такое, что

(а) $|U| > 3$,

(б) $G[U]$ – это максимальный простой порожденный подграф графа G,

(в) каждый класс S разбиения P является модулем графа G и $|S \cap U| = 1$.

Следуя теореме 1, при модульной декомпозиции графа, используют следующие декомпозиционные операции.

0-операция. Если G – несвязный граф, то декомпозировать его на его связные компоненты $G_1,\ldots,G_r$. Пусть G^* – граф без ребер на r вершинах, тогда $G = G^*(G_1,\ldots,G_r)$.

1-операция. Если $\overline{G}$ – несвязный граф, то декомпозировать G на $G_1,\ldots,G_r$, где $\overline{G}_1,\ldots,\overline{G}_r$ – связные компоненты $\overline{G}$. Пусть G^* – полный граф на r вершинах, тогда $G = G^*(G_1,\ldots,G_r)$.

2-о п е р а ц и я. Если G связный и ко-связный граф, то его максимальные сильные модули попарно не пересекаются и образуют разбиение множества вершин $V(G)$. Найти максимальные сильные модули $V_1,\dots,V_r$ графа G. Декомпозировать G на подграфы $G[V_1],\dots,G[V_r]$. Стянуть вершины каждого максимального модуля V_i $(1 \le i \le r)$ к одной вершине v_i, получить граф G^*, который называется *характеристическим графом* графа G.

Отметим, что характеристический граф G^* связного и одновременно ко-связного графа G является простым и выполняется следующее: $G = G^*(G[V_1],\dots,G[V_r])$, $G^* \cong G[\{u_1,\dots,u_r\}]$, где $u_1,\dots,u_r$ – вершины, выбранные по одной из каждого максимального модуля $V_1,\dots,V_r$.

Структуру модульной декомпозиции графа можно представить в виде (корневого) дерева. Из декомпозиционной теоремы следует, что для каждого графа G такое дерево T является единственным. *Дерево модульной декомпозиции* n-вершинного графа G имеет n листьев. Каждому листу однозначно соответствует вершина графа G. Внутренним узлам дерева T приписаны метки 0, 1 или 2, которые указывают операцию, соответствующую узлу. Таким образом, каждый узел дерева декомпозиции – это либо 0-узел (другое называние – *параллельный узел*), либо 1-узел (другое называние – *последовательный узел*), либо 2-узел (другое называние – *простой узел*), либо лист.

Каждому узлу *дерева модульной декомпозиции* графа G приписан сильный модуль, корню – $V(G)$, листьям – одновершинные подмножества $\{v\}$, $v \in V(G)$.

Каждый узел x дерева T задает поддерево, состоящее из x и всех достижимых из него узлов (при ориентации дуг дерева от корня к листьям). Это поддерево имеет корень x. Пусть $M(x)$ – множество вершин графа G, приписанных листьям этого поддерева. Множество $M(x)$ образует сильный модуль в G. Кроме того, узлу x соответствует подграф $G(x) = G[M(x)]$ графа G, порожденный множеством $M(x)$.

Каждый 0-узел x имеет m_x сыновей, где m_x – число компонент связности в графе $G(x)$. Каждому такому сыну y_i $(1 \le i \le m_x)$ соответствует компонента связности $G(y_i)$ графа $G(x)$. При движении по дереву сверху вниз эти компоненты получаем в результате применения 0-операции к графу $G(x)$, а при движении снизу вверх граф $G(x)$ получаем в результате применения операции объединения, или подстановки: $G(x) = G(y_1) \cup \dots \cup G(y_{m_x}) = G^*(x)\big(G(y_1),\dots,G(y_{m_x})\big)$, где $G^*(x)$ – граф без ребер на m_x вершинах.

Каждый 1-узел x имеет m_x сыновей, где m_x – число компонент связности в графе $\overline{G}(x)$. Каждому такому сыну y_i $(1 \le i \le m_x)$ соответствует ко-компонента связности $G(y_i)$ графа $G(x)$. При движении по дереву сверху вниз эти ко-компоненты получаем в результате применения 1-операции к графу $G(x)$, а при движении снизу вверх граф $G(x)$ получаем в результате применения операции соединения, или подстановки: $G(x) = G(y_1) + \dots + G(y_{m_x}) = G^*(x)\big(G(y_1),\dots,G(y_{m_x})\big)$, где $G^*(x)$ – полный граф на m_x вершинах.

Каждому 2-узлу x дополнительно приписан характеристический граф $G^*(x)$ графа $G(x)$. Такой узел x имеет $m_x = |V\big(G^*(x)\big)| > 3$ сыновей. Отметим, что m_x равно числу максимальных сильных модулей в графе $G(x)$. Каждому такому сыну y_i $(1 \le i \le m_x)$ соответствует подграф $G(y_i) = G[V_i]$. При движении по дереву сверху вниз модули $V_1,\dots,V_{m_x}$, подграфы $G[V_1],\dots,G[V_{m_x}]$ и характеристический граф $G^*(x)$ графа $G(x)$ получаем в результате применения 2-операции к графу $G(x)$, а при движении снизу вверх граф $G(x)$ получаем в результате применения операции графовой подстановки $G(x) = G^*(x)\big(G(y_1),\dots,G(y_{m_x})\big)$.

Первый полиномиальный алгоритм для построения дерева модульной декомпозиции графа был опубликован в 1972 г. [10]. Впоследствии было показано, что такое дерево можно построить за линейное время [11].

Решение задачи о ($\{K_1,K_2\}k,l$)-упаковке наибольшего веса для кографов. Множество кографов можно определить рекурсивно следующим образом:

(1) одновершинный граф является кографом;

(2) объединение различных кографов является кографом;

(3) соединение различных кографов является кографом.

Эквивалентное определение класса кографов получим, если условие (3) заменим на следующее условие:

(3′) дополнение кографа является кографом.

Следующее утверждение дает несколько характеризаций кографов.

Утверждение 2. *Следующее эквивалентно для графа G:*

(i) G является кографом;

(ii) G является P_4-свободным графом;

(iii) для каждого подмножества вершин $X \subseteq V(G)$, $(|X|>1)$ либо порожденный подграф $G[X]$ является несвязным, либо его дополнение является несвязным.

В частности, любой граф *G,* который сам и его дополнение являются связными, должен содержать индуцированный подграф, изоморфный P_4.

Много NP-трудных задач в классе кографов решаются за линейное время, например, наименьшая раскраска, наименьшее покрытие кликами, взвешенные варианты задач о независимом множестве, клике, доминирующем множестве. Однако для задач, подобных задаче о паросочетании наибольшего веса и гамильтоновой цепи (цикле) наибольшего веса, таких алгоритмов не разработано (хотя они решаются за полиномиальное время в этом классе). Интуитивно это можно объяснить тем, что операция соединения добавляет слишком много ребер, и потенциально все эти ребра могут иметь различные веса.

Дерево модульной декомпозиции для кографа называют *кодеревом*. Таким образом, *кодерево n*-вершинного кографа *G* имеет *n* листьев. Каждому листу однозначно соответствует вершина графа *G*. Каждому внутреннему узлу дерева *T*(*G*) приписана метка 0 или 1, которая указывает операцию, соответствующую узлу.

Лемма. *Пусть кограф G задан вместе с весовыми функциями на вершинах и ребрах:* $w_V : V(G) \to \mathbb{N}$ *и* $w_E E(G) \to \mathbb{N}$. *Пусть T – кодерево для кографа G. Пусть* $k \ge 2$.

(i) Если x – лист дерева T, то $w^*\left(G(x),k,l\right) = w_V(v)$, *где v – единственная вершина G*(*x*), *т. е. вершина графа G, приписанная узлу x.*

(ii) Если x – 0-*узел дерева T, имеющий сыновей* $y_1,\ldots,y_{m_x}$, *то*

$$w^*\left(G(x),k,l\right) = \sum_{i=1}^{m_x} w^*\left(G(y_i),k,l\right). \tag{1}$$

(iii) Если x – 1-*узел дерева T, имеющий сыновей* $y_1,\ldots,y_{m_x}$, *то*

$$\begin{aligned} w^*\left(G(x),k,l\right) = \max\Big\{ &\max\left\{ w_E(vu) : v \in V\left(G(y_i)\right), u \in V\left(G(y_j)\right), 1 \le i < j \le m_x \right\}, \\ &w^*\left(G(y_1),k,l\right),\ldots,w^*\left(G(y_{m_x}),k,l\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) следуют из определения веса ($\{K_1,K_2\}k,l$)-упаковки графа. Покажем, что верно (iii). Пусть (U^*,F^*) – ($\{K_1,K_2\}k,l$)-упаковка наибольшего веса в графе *G*(*x*).

Поскольку для любого ребра $vu \in E\left(G(x)\right)$ такого, что $v \in V\left(G(y_i)\right)$ и $u \in V\left(G(y_j)\right)$, где $i \ne j$ и для любой вершины $w \in V\left(G(x)\right)$ выполняется $d(vu,w)=1$, то если такого вида ребро $v'u'$ входит в *F,* то $(U^*,F^*) = (\varnothing,\{v'u'\})$.

Расстояние между любыми вершинами *v, u* такими, что $v \in V\left(G(y_i)\right)$ и $u \in V\left(G(y_j)\right)$, где $i \ne j$, равно 1. Если в F^* не входит ни одного ребра $vu \in E\left(G(x)\right)$ такого, что $v \in V\left(G(y_i)\right)$ и $u \in V\left(G(y_j)\right)$, где $i \ne j$, то (U^*,F^*) является ($\{K_1,K_2\}k,l$)-упаковкой наибольшего веса в графе $G(y_i)$ для некоторого сына y_i узла *x*. Поэтому утверждение (iii) верно. Лемма доказана.

Алгоритм $PacCograph_{k,l}$ решает задачу нахождения оптимальной по критерию $\max_S w_{k,l}(G,S)$ ($\{K_1,K_2\}k,l$)-упаковки взвешенного кографа, когда $k \ge 2$.

Алгоритм PacCograph$_{k,l}$ (G,w$_V$,w$_E$).

Вход: кограф *G* с функциями весов $w_V : V(G) \to \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \to \mathbb{R}$.

Выход: пара (U^*,F^*), задающая ($\{K_1,K_2\}k,l$)-упаковку наибольшего веса в *G*.

Шаг 1. Если $|V(G)|=1$, то положить $(U^*,F^*) = \left(V(G),\varnothing\right)$. Перейти на шаг 8.

Шаг 2. Если G не связен, то разбить его на компоненты связности $H_1,\ldots,H_p$. Для $i \in \{1,\ldots,p\}$ вычислить $(U_i, F_i) = PacCograph_{k,l}(H_i, w_V, w_E)$. Положить $U^* = \bigcup_{i=1}^{p} U_i$; $F^* = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$. Перейти на шаг 4.

Шаг 3. Если $\overline{G}$ не связен, то разбить G на подграфы $H_1,\ldots,H_p$, где $\overline{H}_1,\ldots,\overline{H}_p$ – это компоненты связности $\overline{G}$. Для $i \in \{1,\ldots,p\}$ вычислить $(U_i, F_i) = PacCograph_{k,l}(H_i, w_V, w_E)$. Положить $a = \max\{PacCograph_{k,l}(H_i, w_V, w_E) : i \in \{1,\ldots,p\}\}$ и $b = \max\{w_E(vu) : v \in V(M_i), u \in V(M_j), 1 \le i < j \le p\}$. Если $a > b$, то вычислить $(U^*, F^*) = \arg\max\{PacCograph_{k,l}(H_i, w_V, w_E) : i \in \{1,\ldots,p\}\}$. Если $a \le b$, положить $U^* = \varnothing$; $F^* = \{\arg\max\{w_E(vu) : v \in V(M_i), u \in V(M_j), 1 \le i < j \le p\}\}$.

Шаг 4. Выдать (U^*, F^*). STOP.

Конец алгоритма.

Теорема 2. *Если $l > k \ge 2$, то взвешенная задача о $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке графа может быть решена в классе кографов за время $O(n + m)$, где n – число вершин и m – число ребер графа.*

Доказательство. Корректность алгоритма $PacCograph_{k,l}$ следует из леммы. Установим трудоемкость алгоритма. Пусть G – кограф, имеющий n вершин и m ребер. Кодерево $T(G)$ может быть построено за время $O(n + m)$ [10]. Рекурсивные вызовы осуществляются в узлах $T(G)$. Все узлы обрабатываются в порядке от листьев к корню.

Если граф, соответствующий текущему узлу x, не связен (это 0-узел), то подзадача для этого узла решается на шаге 2 алгоритма за время $O(\deg(x))$.

Если граф, соответствующий текущему узлу x, связен, а $\overline{G}$ не связен (это 1-узел), то подзадача для этого узла решается на шаге 3 алгоритма за время $O(\deg(x))$. Отметим, что при выполнении алгоритма каждое ребро графа G рассматривалось при вычислении параметров b для всех 1-узлов только один раз.

Суммируя по всем внутренним узлам дерева $T(G)$, получаем, что на вычисления, производимые в 0-узлах, будет затрачено $O(|V(T(G))|)$ времени, а на вычисления, производимые в 1-узлах, будет затрачено $O(|E(G)|)$ времени.

Поскольку число листьев дерева $T(G)$ равно n, а число внутренних узлов не превосходит $n - 1$, то получаем, что трудоемкость алгоритма равна $O(n + m)$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим случай, когда граф G не является кографом. Тогда его дерево модульной декомпозиции содержит 2-узлы. Пусть узлу x соответствует граф G_x, тогда он и $\overline{G}_x$ – оба связные графы.

Важным свойством максимальных сильных модулей является то, что если G и $\overline{G}$ – оба связные графы, то максимальные сильные модули G попарно не пересекаются. Кроме того, если U и W – максимальные сильные модули, то либо каждая вершина U смежна с каждой вершиной W, либо не существует ни одного ребра между ними. Это свойство позволяет свести задачу об оптимальной $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке графа от графа G к графу H, полученного из G стягиванием каждого максимального сильного модуля в одну вершину. Такой граф H называется *фактор-графом* графа G.

Представим рекурсивный алгоритм $Pac_{k,l}(G,w_V,w_E)$ для решения задачи о $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке наибольшего веса в произвольном графе, где $l > k \ge 2$.

Алгоритм $\boldsymbol{Pac_{k,l}(G,w_V,w_E)}$.

Вход: граф G с функциями весов $w_V : V(G) \to \mathbb{R}$ и $w_E : E(G) \to \mathbb{R}$.

Выход: пара (U^*,F^*), задающая $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковку наибольшего веса в G.

Шаг 1. Если $|V(G)| = 1$, то положить $(U^*, F^*) = (V(G), \varnothing)$. Перейти на шаг 8.

Шаг 2. Если G не связен, то разбить его на компоненты связности $H_1,\ldots,H_p$. Для $i \in \{1,\ldots,p\}$ вычислить $(U_i, F_i) = Pac_{k,l}(H_i, w_V, w_E)$. Положить $U^* = \bigcup_{i=1}^{p} U_i$; $F^* = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$. Перейти на шаг 8.

Шаг 3. Если $\overline{G}$ не связен, то разбить G на подграфы $H_1,\ldots,H_p$, где $\overline{H}_1,\ldots,\overline{H}_p$ – это компоненты связности $\overline{G}$. Для $i \in \{1,\ldots,p\}$ вычислить $(U_i, F_i) = Pac_{k,l}(H_i, w_V, w_E)$. Положить $a = \max\{Pac_{k,l}(H_i, w_V, w_E) : i \in \{1,\ldots,p\}\}$ и $b = \max\{w_E(vu) : v \in V(M_i), u \in V(M_j), 1 \le i < j \le p\}$. Если $a > b$, то вычислить $(U^*, F^*) = \arg\max\{Pac_{k,l}(H_i, w_V, w_E) : i \in \{1,\ldots,p\}\}$. Если $a \le b$, то положить $U^* = \varnothing$; $F^* = \{\arg\max\{w_E(vu) : v \in V(M_i), u \in V(M_j), 1 \le i < j \le p\}\}$. Перейти на шаг 8.

Шаг 4. Если G и $\overline{G}$ являются связными, то разбить G на максимальные модули $M_1,\ldots,M_p$.

Шаг 5. Для $i \in \{1,\ldots,p\}$ вычислить $(U_i, F_i) = Pac_{k,l}(G[M_i], w_V, w_E)$.

Шаг 6. Построить взвешенный граф H из G, стянув каждое M_j $(j = 1,\ldots,p)$ в одну вершину j (получим $V(H) = \{1,\ldots,p\}$). Назначить каждой вершине $j \in V(H)$ вес $w'_V(j) = w_G(U_j, F_j)$. Назначить каждому ребру $(i,j) \in E(H)$ вес $w'_E(i,j) = \max\{w_E(xy) : x \in M_i, y \in M_j\}$. Положить $\mathrm{Edge}(i,j) = \arg\max\{w_E(xy) : x \in M_i, y \in M_j\}$.

Шаг 7. Для графа H, имеющего весовые функции на вершинах и ребрах w'_V и w'_E, решить взвешенную задачу о $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке. Пусть (A,B) – оптимальное решение задачи. Положить $U^* = \cup_{j\in A} U_j$, $F^* = (\cup_{j\in A} F_j) \bigcup \left(\cup_{ij \in B} \mathrm{Edge}(i,j)\right)$.

Шаг 8. Выдать (U^*,F^*). STOP.

Конец алгоритма.

Отметим, что фактор-граф H, который строится на шаге 6 алгоритма, является простым графом. Поэтому при выполнении такого шага решается задача для простого порожденного подграфа исходного графа. Следующая теорема дает ответ на вопрос о сложности предложенного алгоритма.

Т е о р е м а 3. *Пусть* Γ – *класс графов и* Γ^* – *класс всех простых порожденных подграфов из* Γ. *Если взвешенная задача о* $(\{K_1,K_2\}k,l)$-*упаковке графа может быть решена в классе графов* Γ^* *за время* $O(n^p)$, *где* $p \geq 2$ – *константа, то эта задача может быть решена в классе графов* Γ *за время* $O(n^p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – граф из Γ, имеющий n вершин и m ребер. Дерево модульной декомпозиции $T(G)$ может быть построено за время $O(n + m)$ [10]. Здесь мы полагаем, что листьям дерева $T(G)$ соответствуют вершины графа G, а каждому внутреннему узлу x соответствует порожденный подграф $G(x)$ с по крайней мере двумя вершинами.

Рассмотрим внутренний узел x дерева $T(G)$. Этому узлу соответствуют порожденный подграф $G(x)$ графа G и характеристический граф $G^*(x)$ графа $G(x)$. Пусть узел x имеет r сыновей: $x_1,\ldots,x_r$.

Если x – 0-узел, то $G^*(x)$ – граф без ребер на r вершинах. Подзадача для этого узла решается на шаге 2 алгоритма за время $O\left(|V(G^*(x))\right|$.

Если x – 1-узел, то $G^*(x)$ – полный граф на r вершинах. Подзадача для такого узла решается на шаге 3 алгоритма за время $O\left(|V\left(G^*(x)\right)| + |E\left(G^*(x)\right)|\right)$.

Если x – 2-узел, то $G^*(x)$ – изоморфен простому порожденному подграфу графа G. Веса для вершин и ребер графа $G^*(x)$ вычисляются на шагах 5 и 6 алгоритма. Подзадача для такого узла – это взвешенная задача о независимой $(\{K_1,K_2\}k,l)$-упаковке простого графа $G^*(x)$. Эта задача, по нашему предположению, решается на шаге 7 алгоритма за время $O\left(|V\left(G^*(x)\right)|^q\right)$.

Суммируя время, затраченное на решение подзадач для всех внутренних узлов дерева $T(G)$, получаем, что трудоемкость решения задачи для графа G ограничена $O\left(\sum_x |V\left(G^*(x)\right)|^q\right)$.

Отметим, что суммарное число вершин во всех графах $G^*(x)$, соответствующих внутренним узлам $x \in V\left(T(G)\right)$, равно числу ребер дерева $T(G)$, т. е. $|V\left(T(G)\right)| - 1$. Поскольку число листьев дерева $T(G)$ равно n, а число внутренних узлов не превосходит $n - 1$, то получаем, что

$$\sum_x |V\left(G^*(x)\right)|^q \leq (\sum_x |V\left(G^*(x)\right)|)^q \leq (2n-2)^q = O(n^q).$$

Теорема 3 доказана.

Список использованных источников

1. Yuster, R. Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition / R. Yuster // Comput. Sci. Rev. – 2007. – Vol. 1, № 1. – P. 12–26. https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2007.07.002

2. Joos, F. Equality of distance packing numbers / F. Joos, D. Rautenbach // Discrete Math. – 2015. – Vol. 338, № 12. – P. 2374–2377. https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.06.003

3. Brandstädt, A. On distance-3 matchings and induced matchings. / A. Brandstädt, R. Mosca // Discrete Appl. Math. – 2011. – Vol. 159, № 7. – P. 509–520. https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.05.022

4. Computational complexity of maximum distance-(k,l) matchings in graphs / N. Brauner [et al.] // Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии: материалы Междунар. науч. конгресса, Минск, 31 окт. – 3 нояб. 2011 г.: в 2 ч. – Минск, 2011. – Ч. 1. – С. 341–346.

5. Kartynnik, Yu. On Minimum Maximal Distance-k Matchings / Y. Kartynnik, A. Ryzhikov // Electron. Notes Discrete Math. – 2016. – Vol. 56. – P. 71–76. https://doi.org/10.1016/j.endm.2016.11.011

6. Topp, J. On packing and covering numbers of graphs / J. Topp, L. Volkmann // Discrete Math. – 1991. – Vol. 96, № 3. – P. 229–238. https://doi.org/10.1016/0012-365x(91)90316-t

7. Meir, A. Relations between packing and covering numbers of a tree / A. Meir, J. W. Moon // Pacific J. Math. – 1975. – Vol. 61, № 1. – P. 225–233. https://doi.org/10.2140/pjm.1975.61.225

8. The complexity of dissociation set problems in graphs / Yu. Orlovich [et al.] // Discrete Appl. Math. – 2011. – Vol. 159, № 13. – P. 1352–1366. https://doi.org/10.1016/j.dam.2011.04.023

9. Gallai, T. Transitiv orienterbare graphe / T. Gallai // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1967. – Vol. 18, № 1–2. – P. 25–66. https://doi.org/10.1007/bf02020961

10. James, L. O. Graph decomposition for undirected graphs / L. O. James, R. G. Stanton, D. D. Cowan // Proc. of the Third Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Florida Atlantic University, Boca Raton, Feb. 28 – March 2, 1972. – Florida, 1972. – P. 281–290.

11. Simpler linear-time modular decomposition via recursive factorizing permutations / M. Tedder [et al.] // Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2008). – Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. – P. 634–645. – (Lecture Notes in Computer Science, vol 5125). https://doi.org/10.1007/978-3-540-70575-8_52

References

1. Yuster R. Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition. *Computer Science Review*, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 12–26. https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2007.07.002

2. Joos F., Rautenbach D. Equality of Distance Packing Numbers. *Discrete Mathematics*, 2015, vol. 338, no. 12, pp. 2374–2377. https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.06.003

3. Brandstädt A., Mosca R. On distance-3 matchings and induced matchings. *Discrete Applied Mathematics*, 2011, vol. 159, no. 7, pp. 509–520. https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.05.022

4. Brauner N., Finke G., Jost V., Kovalyov M. V., Orlovich Yu. L., Pronin P. V., Waserhole A. Computational complexity of maximum distance-(k,l) matchings in graphs. *Mezhdunarodnyi kongress po informatike: informatsionnye sistemy i tekhnologii: materialy mezhdunarodnogo nauchnogo kongressa, Minsk, 31 oktyabrya – 3 noyabrya 2011 g.* [International Congress on Informatics: Information Systems and Technologies: Proceedings of the International Scientific Congress, Minsk, October 31 – November 3, 2011]. Minsk, 2011, part 2, pp. 341–346.

5. Kartynnik Yu., Ryzhikov A. On Minimum Maximal Distance-k Matchings. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2016, vol. 56, pp. 71–76. https://doi.org/10.1016/j.endm.2016.11.011

6. Topp J., Volkmann L. On packing and covering numbers of graphs. *Discrete Mathematics*, 1991, vol. 96, no. 3, pp. 229–238. https://doi.org/10.1016/0012-365x(91)90316-t

7. Meir A., Moon J. W. Relations between packing and covering numbers of a tree. *Pacific Journal of Mathematics*, 1975, vol. 61, no. 1, pp. 225–233. https://doi.org/10.2140/pjm.1975.61.225

8. Orlovich Yu., Dolgui A., Finke G., Gordon V., Werner F. The complexity of dissociation set problems in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2011, vol. 159, no. 13, pp. 1352–1366. https://doi.org/10.1016/j.dam.2011.04.023

9. Gallai T. Transitiv orienterbare graphe. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1967, vol. 18, no. 1–2, pp. 25–66. https://doi.org/10.1007/bf02020961

10. James L. O., Stanton R. G., Cowan D. D. Graph decomposition for undirected graphs. *Proceedings of the Third Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Florida Atlantic University, Boca Raton, Februaru 28 – March 2, 1972.* Florida, 1972, pp. 281–290.

11. Tedder M., Corneil D., Habib M., Paul C. Simpler linear-time modular decomposition via recursive factorizing permutations. *Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2008). Lecture Notes in Computer Science, vol 5125.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, pp. 634–645. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70575-8_52

Информация об авторе

Лепин Виктор Васильевич – кандидат физико-математических наук, ученый секретарь, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lepin@im.bas-net.by

Information about the author

Victor V. Lepin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Scientific Secretary, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lepin@im.bas-net.by