

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 535.32

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-158-167>

Поступила в редакцию 14.09.2022

Received 14.09.2022

А. Б. Сотский, Е. А. Чудаков

*Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова, Могилев, Республика Беларусь*

## СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ

**Аннотация.** Путем анализа волновых уравнений обосновано совпадение энергетических коэффициентов отражения и пропускания для волн  $s$ - и  $p$ -поляризации при их падении на интерференционное покрытие со встречных направлений. Покрытие может характеризоваться произвольным пространственным профилем показателя преломления, ограничивающим условием является отсутствие в покрытии оптических потерь. Получены соотношения взаимности для энергетических коэффициентов отражения и прохождения естественного света для структуры в виде плоскопараллельной диэлектрической пластины с интерференционными покрытиями на ее противоположных сторонах. Показано, что при освещении структуры с поглощающей пластиной во встречных направлениях энергетические коэффициенты отражения могут различаться, а энергетические коэффициенты прохождения всегда совпадают. Использование соотношений взаимности для упрощения вычислений проиллюстрировано на примере расчета широкополосных просветляющих интерференционных покрытий, состоящих из чередующихся слоев  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  и  $\text{SiO}_2$ , нанесенных на пластину из поликарбоната. В результате подтверждена корректность этих соотношений и показано, что оптимизированное просветляющее двухстороннее интерференционное покрытие обеспечивает примерно в 5 раз меньший по величине средний энергетический коэффициент отражения по сравнению с оптимизированным односторонним покрытием.

**Ключевые слова:** интерференционное покрытие, соотношения взаимности, просветляющее покрытие

**Для цитирования.** Сотский, А. Б. Соотношения взаимности для интерференционных покрытий / А. Б. Сотский, Е. А. Чудаков // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2023. – Т. 59, № 2. – С. 158–167. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-158-167>

Alexander B. Sotsky, Evgeny A. Chudakov

*Mogilev State A. Kuleshov University, Mogilev, Republic of Belarus*

## RECIPROCITY RELATIONS FOR INTERFERENCE COATINGS

**Abstract.** By analyzing the wave equations, the coincidence of the energy reflection and transmission coefficients for the  $s$ - and  $p$ -polarization waves is herein substantiated when they are incident on the interference coating from opposite directions. The coating can be characterized by an arbitrary spatial profile of the refractive index, the limiting condition is the absence of optical losses in it. Reciprocity relations are obtained for the energy reflection and transmission coefficients of natural light for a structure in the form of a plane-parallel dielectric plate with interference coatings on its opposite sides. It is shown that when a structure with an absorbing plate is illuminated in opposite directions, the energy reflection coefficients can differ, while the energy transmission coefficients always coincide. Reciprocity relations are applied to the calculation of broadband antireflective interference coatings consisting of alternate layers  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  and  $\text{SiO}_2$  deposited on a polycarbonate plate. As a result, their correctness is confirmed and it is shown that the optimized antireflection two-sided interference coating provides approximately a five times lower averaged energy reflection coefficient compared to the optimized one-sided coating.

**Keywords:** interference coating, reciprocity relations, antireflection coating

**For citation.** Sotsky A. B., Chudakov E. A. Reciprocity relations for interference coatings. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 158–167 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-2-158-167>

**Введение.** Интерференционные покрытия на различных поверхностях широко используются в оптических антибликовых, зеркальных и делительных системах [1, 2]. Актуальными являются вопросы оптимального проектирования таких покрытий, предназначенных для работы в широком спектральном диапазоне и диапазоне углов падения света на структуру [1, 2]. Решение соответствующих многопараметрических оптимизационных задач требует значительных объемов вычислений и осложнено проблемой наличия множества локальных экстремумов целевых

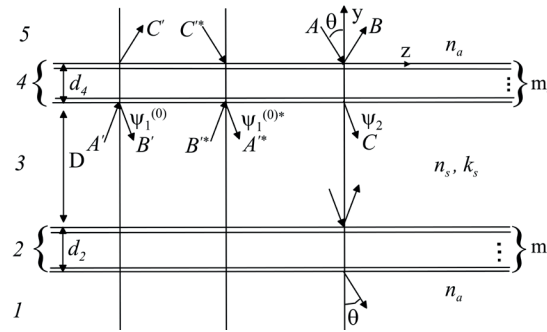


Рис. 1. Интерференционные покрытия на плоскопараллельной подложке и система координат

Fig. 1. Interference coatings on a plane-parallel substrate and a coordinate system

функций [3]. Упрощение анализа возможно путем использования ограничений на параметры покрытий, вытекающих из их электродинамических свойств. В настоящей работе получены общие соотношения взаимности, связывающие между собой коэффициенты отражения, либо прохождения света через диэлектрические интерференционные покрытия, освещаемые с противоположных сторон. Они позволяют упростить вычисление целевых функций и объясняют отмеченные в ряде работ при исследовании конкретных структур [4–7] преимущества двухсторонних интерференционных покрытий. Представлены примеры использования установленных соотношений для синтеза оптимизированных просветляющих покрытий на плоскопараллельной диэлектрической пластине.

**Соотношения взаимности.** Рассмотрим однородную плоскопараллельную диэлектрическую пластину 3 толщины  $D$  с показателями преломления и поглощения  $n_s$  и  $k_s$ , занимающую область 3 (рис. 1).

На противоположных сторонах пластины имеются диэлектрические интерференционные покрытия (неоднородные слои) 2 и 4 с суммарными толщинами  $d_2$  и  $d_4$ . Покрытия могут характеризоваться либо непрерывными распределениями показателей преломления  $n(y)$  и поглощения  $k(y)$ , либо состоять из последовательности однородных слоев с толщинами  $\delta_{lj}$ , показателями преломления  $n_{lj}$  и поглощения  $k_{lj}$ , где  $l$  – номер покрытия,  $j = \overline{1, m_l}$  – номер слоя в данном покрытии (нумерация слоев осуществляется снизу вверх). Со сторон областей 1 и 5 структура окружена однородной прозрачной средой с показателем преломления  $n_a$ . Она освещается плоской волной, падающей под углом  $\theta$ . Волна создается удаленным широкополосным источником света. Регистрация отраженного либо прошедшего через структуру излучения на длине волны  $\lambda$  осуществляется с выделением интервала длин волн  $\Delta\lambda$ , удовлетворяющего условию  $\Delta\lambda / \lambda \ll 1$ . В этом случае структура может быть охарактеризована энергетическими коэффициентами отражения  $R_{\delta\kappa}^{(\alpha)}(\theta, \lambda)$  и пропускания  $T_{\delta\kappa}^{(\alpha)}(\theta, \lambda)$ . Здесь и далее  $\alpha = 0$  для волн  $s$ -поляризации,  $\alpha = 1$  для волн  $p$ -поляризации;  $\delta = 5, \kappa = 1$  если волна падает из области 5 и проходит в область 1 (см. рис. 1);  $\delta = 1, \kappa = 5$  если волна распространяется в противоположном направлении. При использовании естественного света аналогичную роль играют средние энергетические коэффициенты [2]

$$R_{\delta\kappa}(\theta, \lambda) = 0,5 \left[ R_{\delta\kappa}^{(0)}(\theta, \lambda) + R_{\delta\kappa}^{(1)}(\theta, \lambda) \right], \quad (1)$$

$$T_{\delta\kappa}(\theta, \lambda) = 0,5 \left[ T_{\delta\kappa}^{(0)}(\theta, \lambda) + T_{\delta\kappa}^{(1)}(\theta, \lambda) \right]. \quad (2)$$

В большинстве приложений толщины  $d_2$  и  $d_4$  сопоставимы с  $\lambda$ , а  $D$  удовлетворяет неравенству  $D \gg \lambda^2 (4\pi\Delta\lambda \operatorname{Re}\chi_s)^{-1}$ , где  $\chi_s = \sqrt{\varepsilon_s - n_a^2 \sin^2 \theta}$ ,  $\varepsilon_s = (n_s - ik_s)^2$  (обычно  $D$  имеет миллиметровый порядок). Как показано в [8], при указанных условиях

$$R_{\delta\kappa}^{(\alpha)}(\theta, \lambda) = \left| r_{\delta 3}^{(\alpha)} \right|^2 + \left| r_{3\kappa}^{(\alpha)} t_{3\delta}^{(\alpha)} t_{\delta 3}^{(\alpha)} \right|^2 E \left( 1 - \left| r_{3\delta}^{(\alpha)} r_{3\kappa}^{(\alpha)} \right|^2 E \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$T_{\delta\kappa}^{(\alpha)}(\theta, \lambda) = \left| t_{\delta 3}^{(\alpha)} t_{3\kappa}^{(\alpha)} \right|^2 \sqrt{E} \left( 1 - \left| r_{3\delta}^{(\alpha)} r_{3\kappa}^{(\alpha)} \right|^2 E \right)^{-1}, \quad (4)$$

где  $E = \exp[-4n_s k_s k_0 D(\operatorname{Re} \chi_s)^{-1}]$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  – волновое число вакуума;  $r_{53}^{(\alpha)}$ ,  $t_{53}^{(\alpha)}$  – амплитудные коэффициенты отражения и прохождения для монохроматической плоской волны, падающей на слой 4 со стороны области 5 и проходящей в область 3;  $r_{35}^{(\alpha)}$ ,  $t_{35}^{(\alpha)}$  – такие же коэффициенты в случае падения плоской волны на данный слой со стороны пластины. Коэффициенты  $r_{31}^{(\alpha)}$ ,  $t_{31}^{(\alpha)}$ ,  $r_{13}^{(\alpha)}$ ,  $t_{13}^{(\alpha)}$  для слоя 2 имеют аналогичный смысл.

Рассмотрим вычисление коэффициентов  $r_{53}^{(\alpha)}$ ,  $t_{53}^{(\alpha)}$ ,  $r_{35}^{(\alpha)}$ ,  $t_{35}^{(\alpha)}$  для слоя 4. В случае волн  $s$ -поляризации оно сводится к интегрированию в пределах слоя и примыкающих к нему однородных средах уравнения [8]:

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi^{(0)} + k_0^2 [\varepsilon(y) - n_a^2 \sin^2 \theta] \psi^{(0)} = 0, \quad (5)$$

где  $\varepsilon(y)$  – диэлектрическая проницаемость слоистой среды,  $\psi^{(0)}$  – составляющая электрического поля, ортогональная плоскости падения.

Коэффициенты  $r_{35}^{(0)}$ ,  $t_{35}^{(0)}$  относятся к решению уравнения (5), которое мы обозначим через  $\psi_1^{(0)}(y)$ . Это решение соответствует падению на нижнюю границу слоя  $y = -d_4$  из области 3 плоской волны с амплитудой  $A'$  и в примыкающих к слою однородных средах описывается функциями

$$\psi_1^{(\alpha)} = A' \exp[-i\chi_s k_0 (y + d_4)] + B' \exp[i\chi_s k_0 (y + d_4)] \quad (y \leq -d_4), \quad (6)$$

$$\psi_1^{(\alpha)} = C' \exp(-i\chi_a k_0 y) \quad (y \geq 0), \quad (7)$$

где  $\alpha = 0$ ,  $\chi_a = n_a \cos \theta$ ,

$$B' = r_{35}^{(s)} A', \quad (8)$$

$$C' = t_{35}^{(s)} A'. \quad (9)$$

При записи (5)–(7) предполагается, что зависимость электромагнитного поля от времени  $t$  и координаты  $z$  описывается фактором  $\exp(ik_0 c t - ik_0 n_a z \sin \theta)$ , где  $c$  – скорость света. В этом случае решение  $\psi_1^{(0)}$  может быть проиллюстрировано диаграммой, приведенной на рис. 1, где стрелки указывают направления векторов рефракции плоских волн.

Допустим, что функция  $\varepsilon(y)$  в (5) и коэффициент  $\chi_s$  в (6) являются вещественными. Тогда, взяв от уравнения (5) комплексное сопряжение (далее оно обозначено звездочкой), заключаем, что и функция  $\psi_1^{(0)*}(y)$ , для которой

$$\psi_1^{(0)*} = A'^* \exp[i\chi_s k_0 (y + d_4)] + B'^* \exp[-i\chi_s k_0 (y + d_4)] \quad (y \leq -d_4),$$

$$\psi_1^{(0)*} = C'^* \exp(i\chi_a k_0 y) \quad (y \geq 0),$$

является его решением. Диаграмма векторов рефракции для этого решения представлена на рис. 1.

Для решения уравнения (5)  $\psi_2^{(0)}$ , соответствующего коэффициентам  $r_{53}^{(0)}$ ,  $t_{53}^{(0)}$  (см. диаграмму на рис. 1), можем записать

$$\psi_2^{(0)} = A \exp(i\chi_a k_0 y) + B \exp(-i\chi_a k_0 y) \quad (y \geq 0), \quad (10)$$

$$\psi_2^{(0)} = C \exp[i\chi_s k_0 (y + d_4)] \quad (y \leq -d_4), \quad (11)$$

где  $A$  – амплитуда плоской волны, падающей из области 5,

$$B = r_{53}^{(0)} A, \quad (12)$$

$$C = t_{53}^{(0)} A. \quad (13)$$

Рассмотрим суперпозицию

$$\psi^{(0)}(y) = \psi_1^{(0)*}(y) + \psi_2^{(0)}(y), \quad (14)$$

в которой, пользуясь произволом в выборе значений  $A'$  и  $A$ , положим

$$A + C'^* = 0. \quad (15)$$

Из (6), (7), (10), (11) очевидно, что в этом случае функция (14) опять будет решением уравнения (5) типа  $\psi_1^{(0)}(y)$ . В результате

$$B = t_{35}^{(0)} B'^*, \quad (16)$$

$$A'^* + C = r_{35}^{(0)} B'^*. \quad (17)$$

Согласно (9) и (15),

$$-A = \left( t_{35}^{(0)} A' \right)^*. \quad (18)$$

Из (8), (12), (16), (18) заключаем, что

$$-\frac{B}{A} = -r_{53}^{(0)} = \frac{t_{35}^{(0)}}{t_{35}^{(0)*}} \left( \frac{B'}{A'} \right)^* = \frac{t_{35}^{(0)}}{t_{35}^{(0)*}} r_{35}^{(0)*}.$$

Следовательно,

$$\left| r_{35}^{(0)} \right|^2 = \left| r_{53}^{(0)} \right|^2. \quad (19)$$

Заметим также, что в соответствии с (8), (13), (17)–(19)

$$t_{35}^{(0)*} t_{53}^{(0)} = 1 - \left| r_{35}^{(0)} \right|^2 = 1 - \left| r_{53}^{(0)} \right|^2.$$

Аналогичное рассмотрение слоя 2 дает

$$\left| r_{31}^{(0)} \right|^2 = \left| r_{13}^{(0)} \right|^2, \quad (20)$$

$$t_{31}^{(0)*} t_{13}^{(0)} = 1 - \left| r_{31}^{(0)} \right|^2 = 1 - \left| r_{13}^{(0)} \right|^2. \quad (21)$$

Вычисление коэффициентов  $r_{53}^{(1)}$ ,  $t_{53}^{(1)}$ ,  $r_{35}^{(1)}$ ,  $t_{35}^{(1)}$  для волн  $p$ -поляризации сводится к рассмотрению уравнения [8]

$$\varepsilon(y) \frac{d}{dy} \frac{1}{\varepsilon(y)} \frac{d}{dy} \psi^{(1)} + k_0^2 \left[ \varepsilon(y) - n_a^2 \sin^2 \theta \right] \psi^{(1)} = 0, \quad (22)$$

где  $\psi^{(1)}$  – составляющая магнитного поля, ортогональная плоскости падения. Анализ уравнения (22) по представленной выше схеме приводит к соотношениям, подобным (19)–(21).

Таким образом, для интерференционных покрытий 2 и 4 с произвольными вещественными функциями профилей диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(y)$  имеют место следующие соотношения взаимности:

$$\left| r_{31}^{(\alpha)} \right|^2 = \left| r_{13}^{(\alpha)} \right|^2, \quad (23)$$

$$t_{31}^{(\alpha)*} t_{13}^{(\alpha)} = 1 - \left| r_{31}^{(\alpha)} \right|^2 = 1 - \left| r_{13}^{(\alpha)} \right|^2, \quad (24)$$

$$\left| r_{35}^{(\alpha)} \right|^2 = \left| r_{53}^{(\alpha)} \right|^2, \quad (25)$$

$$t_{35}^{(\alpha)*} t_{53}^{(\alpha)} = 1 - \left| r_{35}^{(\alpha)} \right|^2 = 1 - \left| r_{53}^{(\alpha)} \right|^2, \quad (26)$$

которые справедливы для волн как  $s$ -, так и  $p$ -поляризации.

Заметим, что в соответствии с энергетическим балансом для составляющей вектора Пойнтинга  $S_y$ ,

$$|t_{\kappa 3}^{(\alpha)}|^2 = \left(1 - |r_{\kappa 3}^{(\alpha)}|^2\right) \chi_a \varepsilon_s^\alpha (\chi_s \varepsilon_a^\alpha)^{-1}, \quad (27)$$

$$|t_{3\kappa}^{(\alpha)}|^2 = \left(1 - |r_{3\kappa}^{(\alpha)}|^2\right) \chi_s \varepsilon_a^\alpha (\chi_a \varepsilon_s^\alpha)^{-1}, \quad (28)$$

где  $\kappa$  может принимать значения 1 либо 5. Согласно (23), (25), (27), (28), величины  $|t_{\kappa 3}^{(\alpha)}|^2$  и  $|t_{3\kappa}^{(\alpha)}|^2$  в общем случае различаются. Они совпадают, если только интерференционные покрытия 2 или 4 с обеих сторон контактируют с одинаковыми средами ( $n_a^2 = \varepsilon_s$ ). Заметим, что соотношения (27) и (28) находятся в согласии с (24) и (26).

С учетом (23)–(28) выражения (3), (4) упрощаются, так как содержат только 2 коэффициента отражения:

$$R_{51}^{(\alpha)}(\theta, \lambda) = \left( |r_{53}^{(\alpha)}|^2 + |r_{13}^{(\alpha)}|^2 E - 2 |r_{13}^{(\alpha)}|^2 |r_{53}^{(\alpha)}|^2 E \right) \left( 1 - |r_{13}^{(\alpha)} r_{53}^{(\alpha)}|^2 E \right)^{-1}, \quad (29)$$

$$R_{15}^{(\alpha)}(\theta, \lambda) = \left( |r_{13}^{(\alpha)}|^2 + |r_{53}^{(\alpha)}|^2 E - 2 |r_{13}^{(\alpha)}|^2 |r_{53}^{(\alpha)}|^2 E \right) \left( 1 - |r_{13}^{(\alpha)} r_{53}^{(\alpha)}|^2 E \right)^{-1}, \quad (30)$$

$$T_{51}^{(\alpha)}(\theta, \lambda) = T_{15}^{(\alpha)}(\theta, \lambda) = \left( 1 - |r_{13}^{(\alpha)}|^2 \right) \left( 1 - |r_{53}^{(\alpha)}|^2 \right) \sqrt{E} \left( 1 - |r_{13}^{(\alpha)} r_{53}^{(\alpha)}|^2 E \right)^{-1}. \quad (31)$$

Формулы (29)–(31) представляют собой соотношения взаимности для пластины с интерференционными покрытиями на ее противоположных сторонах. Как следует из (1), (2), (29)–(31), совпадение энергетических коэффициентов отражения света от пластины при ее освещении с противоположных сторон, т. е. функций  $R_{51}^{(\alpha)}(\theta, \lambda)$  и  $R_{15}^{(\alpha)}(\theta, \lambda)$ , а значит, и функций  $R_{51}(\theta, \lambda)$  и  $R_{15}(\theta, \lambda)$ , имеет место либо если интерференционные покрытия 2 и 4 идентичны ( $|r_{53}^{(\alpha)}|^2 = |r_{13}^{(\alpha)}|^2$ ), либо если поглощение света в пластине пренебрежимо мало ( $E \rightarrow 1$ ). В то же время энергетические коэффициенты пропускания  $T_{51}^{(\alpha)}(\theta, \lambda)$  и  $T_{15}^{(\alpha)}(\theta, \lambda)$ , так же как и  $T_{51}(\theta, \lambda)$  и  $T_{15}(\theta, \lambda)$ , всегда совпадают.

Как ясно из их вывода, соотношения взаимности (23)–(31) справедливы при произвольных пространственных профилях показателей преломления интерференционных покрытий. Ограничивающим условием при их получении было лишь допущение о вещественности диэлектрических проницаемости покрытий и примыкающих к ним сред. Такая модель приемлема для тонких диэлектрических покрытий (см. ниже). В то же время выражения (29)–(31) содержат множитель  $E$ , учитывающий поглощение света в материале диэлектрической пластины, обладающей значительной толщиной. Корректность полученных соотношений проиллюстрирована в следующем разделе, где выполнен расчет просветляющих интерференционных покрытий.

**Оптимизация просветляющих покрытий.** Рассмотрим актуальную проблему минимизации функций  $R_{\delta\kappa}(\theta, \lambda)$  за счет выбора параметров покрытий [1, 2]. Основной практический интерес представляет решение данной проблемы в случае протяженных углового  $0 \leq \theta \leq \theta_m$  и спектрального  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  диапазонов [1, 2]. В такой ситуации в качестве подлежащих минимизации целевых функций естественно взять интегралы

$$\bar{R}_{\delta\kappa} = \theta_m^{-1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \int_0^{\theta_m} d\theta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda R_{\delta\kappa}(\theta, \lambda). \quad (32)$$

Согласно (1), (3), вычисление  $\bar{R}_{\delta\kappa}$  предполагает расчет коэффициентов  $r_{3\kappa}^{(\alpha)}$ ,  $r_{\kappa 3}^{(\alpha)}$ ,  $t_{3\kappa}^{(\alpha)}$ ,  $t_{\kappa 3}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 0, 1$ ;  $\kappa = 1, 5$ ). С этой целью представим решение уравнений (3), (20) в пределах слоя 4 в форме [9]:

$$\begin{pmatrix} \psi^{(\alpha)}(y) \\ \psi'^{(\alpha)}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(\alpha)}(y) & L_{12}^{(\alpha)}(y) \\ L_{21}^{(\alpha)}(y) & L_{22}^{(\alpha)}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^{(\alpha)} \\ \psi_0'^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где  $\psi_0^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(-d_4)$ ,  $\psi_0'^{(\alpha)} = \psi'^{(\alpha)}(-d_4)$ ,  $\psi'^{(\alpha)} = \varepsilon^{-\alpha} d\psi^{(\alpha)} / dy$ ,  $\mathbf{L}^{(\alpha)}$  – матрица фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения (5) либо (22) на интервале  $0 \geq y \geq -d_4$ . Учитывая непрерывность функций  $\psi^{(\alpha)}(y)$  и  $\psi'^{(\alpha)}(y)$  на границах раздела сред и выражений (6)–(13), (33), находим

$$r_{53}^{(\alpha)} = \frac{i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(0) - L_{21}^{(\alpha)}(0) - \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(0) - i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(0)}{i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(0) + L_{21}^{(\alpha)}(0) - \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(0) + i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(0)},$$

$$r_{35}^{(\alpha)} = -\frac{i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(0) + L_{21}^{(\alpha)}(0) + \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(0) - i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(0)}{i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(0) + L_{21}^{(\alpha)}(0) - \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(0) + i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(0)},$$

$$t_{53}^{(\alpha)} = \left(1 + r_{53}^{(\alpha)}\right) \left[ L_{11}^{(\alpha)}(0) + i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(0) \right]^{-1},$$

$$t_{35}^{(\alpha)} = L_{11}^{(\alpha)}(0) \left(1 + r_{35}^{(\alpha)}\right) - i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(0) \left(1 - r_{35}^{(\alpha)}\right).$$

Аналогичные формулы для коэффициентов слоя 2 имеют вид

$$r_{31}^{(\alpha)} = \frac{i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(-d_4 - D) - L_{21}^{(\alpha)}(-d_4 - D) - \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(-d_4 - D) - i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(-d_4 - D)}{i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(-d_4 - D) + L_{21}^{(\alpha)}(-d_4 - D) - \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(-d_4 - D) + i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(-d_4 - D)},$$

$$r_{13}^{(\alpha)} = -\frac{i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(-d_4 - D) + L_{21}^{(\alpha)}(-d_4 - D) + \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(-d_4 - D) - i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(-d_4 - D)}{i\chi_s \varepsilon_s^{-\alpha} L_{11}^{(\alpha)}(-d_4 - D) + L_{21}^{(\alpha)}(-d_4 - D) - \chi_s \chi_a \varepsilon_s^{-\alpha} n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(-d_4 - D) + i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{22}^{(\alpha)}(-d_4 - D)},$$

$$t_{31}^{(\alpha)} = \left(1 + r_{31}^{(\alpha)}\right) \left[ L_{11}^{(\alpha)}(-d_4 - D) + i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(-d_4 - D) \right]^{-1},$$

$$t_{13}^{(\alpha)} = L_{11}^{(\alpha)}(-d_4 - D) \left(1 + r_{13}^{(\alpha)}\right) - i\chi_a n_a^{-2\alpha} L_{12}^{(\alpha)}(-d_4 - D) \left(1 - r_{13}^{(\alpha)}\right).$$

В данном случае выражение (33) рассматривается при  $-d_4 - D \geq y \geq -d_4 - D - d_2$ ,  $\psi_0^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(-d_4 - D - d_2)$ ,  $\psi_0'^{(\alpha)} = \psi'^{(\alpha)}(-d_4 - D - d_2)$ .

В случае произвольной зависимости  $\varepsilon(y)$  величины  $L_{ij}^{(\alpha)}(0)$ ,  $L_{ij}^{(\alpha)}(-d_4 - D)$  могут быть рассчитаны путем численного интегрирования уравнений (5), (22) по схеме, предложенной в [8]. Но в данной работе мы ограничимся рассмотрением интерференционных покрытий, составленных из последовательности однородных слоев. Здесь матрицы  $\mathbf{L}^{(\alpha)}(0)$  и  $\mathbf{L}^{(\alpha)}(-d_4 - D)$  могут быть представлены в явном виде произведением передаточных матриц слоев [10]:

$$\mathbf{L}^{(\alpha)}(0) = \mathbf{M}_{4m4}^{(\alpha)} \dots \mathbf{M}_{41}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L}^{(\alpha)}(-d_1 - D) = \mathbf{M}_{2m2}^{(\alpha)} \dots \mathbf{M}_{21}^{(\alpha)},$$

где

$$\mathbf{M}_{lj}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_{lj} k_0 \delta_{lj}) & \varepsilon_{lj}^{\alpha} \chi_{lj}^{-1} \sin(\chi_{lj} k_0 \delta_{lj}) \\ -\chi_{lj} \varepsilon_{lj}^{-\alpha} \sin(\chi_{lj} k_0 \delta_{lj}) & \cos(\chi_{lj} k_0 \delta_{lj}) \end{pmatrix}, \quad \chi_{lj} = \sqrt{\varepsilon_{lj} - n_a^2 \sin^2 \theta}, \quad \varepsilon_{lj} = (n_{lj} - i k_{lj})^2.$$

Известно, что при проектировании просветляющих покрытий, предназначенных для работы в широких угловом и спектральном диапазонах, покрытия 2 и 4 должны состоять из чередующихся высоко- и низкопреломляющих слоев [1, 2]. На этом основании положим  $\varepsilon_{41} = \varepsilon_{43} = \dots$ ,  $\varepsilon_{42} = \varepsilon_{44} = \dots$ .

Пусть  $m_2 = m_4 = m$ , но в общем случае  $d_2 \neq d_4$  (см. рис. 1). Кроме того, допустим, что  $\varepsilon_{2m-j+1} = \varepsilon_{4j}$  ( $j = \overline{1, m}$ ). В качестве материалов слоев покрытий выберем  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  и  $\text{SiO}_2$ , допускающих электронно-лучевое напыление [1], а в качестве материала диэлектрической пластины – поликарбонат (PC). Дисперсионные характеристики названных материалов в видимом диапазоне ( $\lambda_1 = 440$  нм,  $\lambda_2 = 680$  нм) иллюстрирует рис. 2, где номер  $l$  в покрытии 4 отнесен к слою из  $\text{Nb}_2\text{O}_5$ , а номер  $2 - k$  слою из  $\text{SiO}_2$ . Зависимости  $n_{41}(\lambda)$ ,  $k_{41}(\lambda)$ ,  $n_{42}(\lambda)$  – интерполяция полиномами третьей

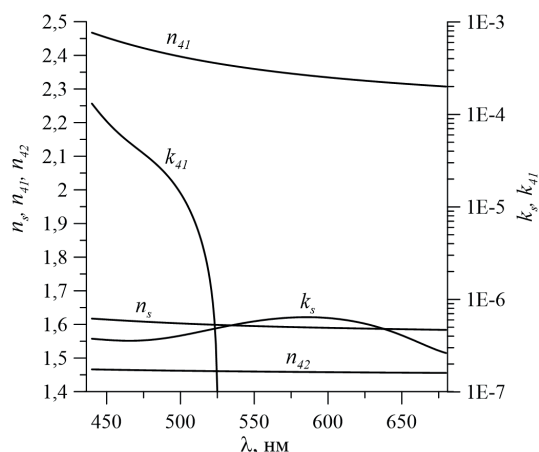


Рис. 2. Дисперсионные характеристики материалов пластины с интерференционными покрытиями

Fig. 2. Dispersion characteristics of the materials of the plate with interference coatings

степени литературных данных [11] (коэффициент поглощения  $\text{SiO}_2$   $k_{42}(\lambda)$  пренебрежимо мал, поэтому его график находится вне поля рис. 2). Кривые  $n_s(\lambda)$  и  $k_s(\lambda)$  – полиномы шестых степеней для показателей преломления и поглощения поликарбоната. Эти полиномы получены в результате обработки методом, предложенным в [8], спектров энергетических коэффициентов отражения и пропускания пластин РС, применяемых в качестве экранов компьютерных мониторов. Данные спектры измерены с использованием спектрофотометра Photon RT («ЭссентОптикс», Беларусь)<sup>1</sup>.

Допустим, что РС-пластина толщины  $D = 4,9$  нм с интерференционными покрытиями 2 и 4 (см. рис. 1) окружена воздухом ( $n_a = 1,0003$ ). Поскольку значения  $\varepsilon_{lj}$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $n_a$ ,  $D$  заданы, аргументами функций (32) являются только толщины слоев в покрытиях. Далее будут рассматриваться односторонние ( $d_4 \neq 0$ ,  $d_2 = 0$ ) либо симметричные двухсторонние ( $d_2 = d_4$ ,  $\delta_{2m-j+1} = \delta_{4j}$ , где  $j = \overline{1, m}$ ) покрытия. Таким образом, варьируемыми параметрами в (32) являются  $\delta_{4j}$ .

Ниже приведены результаты решения оптимизационной задачи при  $m = 4$ . Данные, представленные в таблице, – это результаты численного отыскания глобальных минимумов функций (32) в диапазонах  $0 \text{ нм} \leq \delta_{4j} \leq 300 \text{ нм}$  ( $j = \overline{1, 4}$ ). Вычисления проведены в 2 этапа. На первом осуществлялась грубая прогонка интеграла в (32) по 4-мерной области, где подынтегральная функция рассчитывалась на основании (1) и упрощенных формул (29), (30). На втором этапе найденные приближенные координаты глобального минимума уточнялись градиентным методом [12] с использованием формул (1), (3) либо (1), (29), (30).

#### Оптимальные параметры интерференционных покрытий

##### Optimal parameters of interference coatings

Тип покрытия	Выражения	$\delta$ , к	$\delta_{41}$ , нм	$\delta_{42}$ , нм	$\delta_{43}$ , нм	$\delta_{44}$ , нм	$\bar{R}_{\delta k} \cdot 100$
Одностороннее	(29)	5, 1	13,185	34,118	120,334	97,688	6,043
	(3)	5, 1	13,186	34,121	120,340	97,690	6,042
	(30)	1, 5	13,198	34,192	120,560	97,690	6,623
	(3)	1, 5	13,198	34,192	120,560	97,690	6,623
Симметричное двухстороннее	(29), (30)	1, 5; 5, 1	13,130	33,859	120,023	97,908	1,287
	(3)	1, 5; 5, 1	13,130	33,858	120,024	97,909	1,287
	(34)	1, 5; 5, 1	13,137	33,882	120,013	98,005	1,312

Как видно из таблицы, результаты решения оптимизационной задачи с использованием соотношений взаимности (формулы (29), (30)) практически не отличаются от строгих (формула (3)), несмотря на заметное поглощение света в  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  в коротковолновой части спектра (см. рис. 2). Минимальные значения  $\bar{R}_{15}$  и  $\bar{R}_{51}$  для одностороннего покрытия существенно различаются,

<sup>1</sup> Экспериментальные данные предоставлены К. Н. Кривецким и Н. И. Стаськовым.

а для двухстороннего покрытия совпадают, что находится в согласии с отмеченными выше следствиями формул (29), (30) при наличии поглощения в РС-пластине. Кроме того, минимум функции (32) для двухстороннего покрытия примерно в 5 раз меньше, чем для одностороннего. Это является результатом просветления обеих сторон пластины, который очевиден из (23), (25). Отметим также, что табличные значения толщин слоев в одно- и двухстороннем покрытиях весьма близки между собой и с результатом минимизации функции (32) при условии, что

$$R_{\delta\kappa}^{(\alpha)}(\theta, \lambda) = 0,5(1 + E) \left| r_{53}^{(\alpha)} \right|^2 \quad (34)$$

(см. последнюю строку таблицы). Эта особенность легко объяснима для двухстороннего покрытия. Действительно, вблизи оптимальных условий  $\left| r_{53}^{(\alpha)} \right|^2 \rightarrow 0$  во всей области интегрирования в (32). Тогда в соответствии с (29), (30), (1) можно записать приближение (34). Его использование целесообразно на наиболее трудоемком этапе прогонки функции (32).

Детально судить об отражении и пропускании РС-пластины с оптимизированными одно-, двухсторонним покрытиями и без них позволяет рис. 3, где сопоставлены спектральные и угловые зависимости энергетических коэффициентов отражения и пропускания структуры.

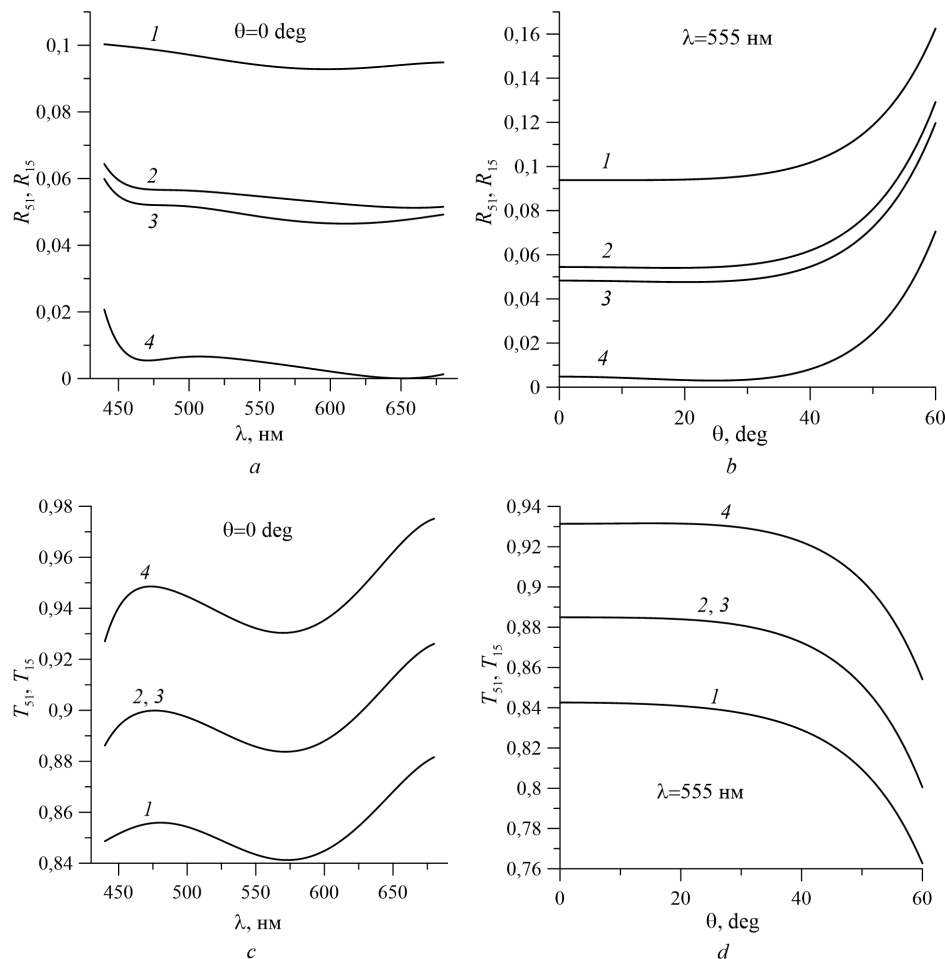


Рис. 3. Спектральные и угловые зависимости энергетических коэффициентов отражения (a, b) и прохождения (c, d) естественного света для РС-пластины без интерференционных покрытий – кривые 1 ( $R_{51}$ ,  $R_{15}$ ,  $T_{51}$ ,  $T_{15}$ ), с оптимальным односторонним покрытием – кривые 2 ( $R_{51}$ ,  $T_{51}$ ), 3 ( $R_{15}$ ,  $T_{15}$ ) и с оптимальными двухсторонними покрытиями – кривые 4 ( $R_{51}$ ,  $R_{15}$ ,  $T_{51}$ ,  $T_{15}$ )

Fig. 3. Spectral and angular dependences of the energy reflection (a, b) and transmission (c, d) coefficients of natural light illuminating the PC plate without interference coatings – curves 1 ( $R_{51}$ ,  $R_{15}$ ,  $T_{51}$ ,  $T_{15}$ ), with the optimal one-sided coating – curves 2 ( $R_{51}$ ,  $T_{51}$ ), 3 ( $R_{15}$ ,  $T_{15}$ ) and with optimal double-sided coatings – curves 4 ( $R_{51}$ ,  $R_{15}$ ,  $T_{51}$ ,  $T_{15}$ )

Графики на рис. 3 соответствуют найденным оптимальным значениям толщин слоев  $\delta_{4j}$ . Кривые, рассчитанные по точным формулам (3), (4) и с использованием соотношений взаимности (формулы (29)–(31)) визуально не различимы, поэтому для них использована единая нумерация. Таким образом, рис. 3 полностью подтверждает корректность соотношений взаимности, несмотря на наличие поглощения в слоях тонкого интерференционного покрытия.

Заметим, что в полном согласии со сделанным выше выводом в случае одностороннего интерференционного покрытия графики для коэффициентов  $R_{51}$  и  $R_{15}$  существенно различаются, тогда как аналогичные графики для  $T_{51}$  и  $T_{15}$  полностью совпадают. Это – результат поглощения света в РС-пластине. Следствием данного поглощения является и волнообразный вид кривых на рис. 3, с, который инверсно согласуется с видом кривой  $k_s(\lambda)$  на рис. 2. Рис. 3, так же, как и таблица, демонстрирует очевидные преимущества использования двухсторонних просветляющих интерференционных покрытий.

**Заключение.** В результате анализа волновых уравнений для волн  $s$ - и  $p$ -поляризации обосновано совпадение энергетических коэффициентов отражения при освещении интерференционного покрытия с произвольным пространственным профилем показателя преломления во встречных направлениях. Ограничивающим условием для этого совпадения является отсутствие оптических потерь в покрытии. Получены соотношения взаимности для энергетических коэффициентов отражения и прохождения естественного света в структуре в виде плоскопараллельной диэлектрической пластины с интерференционными покрытиями на ее противоположных сторонах. Показано, что для поглощающей пластины с односторонним интерференционным покрытием, освещаемой в противоположных направлениях, энергетические коэффициенты отражения различаются, а энергетические коэффициенты пропускания совпадают. Это означает, что такая структура является невзаимным оптическим элементом по отражению и взаимным по пропусканию света. Использование полученных соотношений взаимности для упрощения вычислений проиллюстрировано на примере исследования оптимизированных просветляющих интерференционных покрытий, состоящих из слоев  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  и  $\text{SiO}_2$ , нанесенных на пластину из поликарбоната. Расчетами подтверждена корректность полученных соотношений и показано, что просветляющее двухстороннее интерференционное покрытие обеспечивает примерно в 5 раз меньший по величине средний энергетический коэффициент отражения по сравнению с односторонним покрытием.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Фотоника и электроника для инноваций».

**Acknowledgements.** This work was financially supported by the State Program of Scientific Research of the Republic of Belarus “Photonics and Electronics for Innovations”.

### Список использованных источников

1. Broadband antireflection coatings for visible and infrared ranges / F. Lemarquis [et al.] // CEAS Space J. – 2019. – Vol. 11, № 4. – P. 567–568. <https://doi.org/10.1007/s12567-019-00266-8>
2. Multilayer thin film structures for multifunctional glass: Self-cleaning, antireflective and energy-saving properties / C. Garlisi [et al.] // Appl. Energy. – 2020. – Vol. 264. – P. 114697 (32 p). <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.114697>
3. Tikhonravov, A. V. Optical coating design approaches based on the needle optimization technique / A. V. Tikhonravov, M. K. Trubetskov, G. W. Debell // Appl. Opt. – 2007. – Vol. 46, № 5. – P. 704–710. <https://doi.org/10.1364/AO.46.000704>
4. Plasma-chemical deposition of anti-reflection and protective coating for infrared optics / A. S. Grenaderov [et al.] // Russ. Phys. J. – 2020. – Vol. 62, № 11. – P. 2112–2120. <https://doi.org/10.1007/s11182-020-01954-3>
5. Optimal Optical Properties–Hardness Ratio of Antireflection Coating Produced from a Silica Sol with Hexadecyltrimethylammonium Bromide on Silicate Glass / B. B. Troitskii [et al.] // Russ. J. Appl. Chem. – 2020. – Vol. 93, № 2. – P. 232–237. <https://doi.org/10.1134/S1070427220020111>
6. Fabrication and performances of double-sided  $\text{HfO}_2$  anti-reflection films with ultra-high infrared transmittance // J. Gua [et al.] // J. Alloys Compd. – 2021. – Vol. 858. – P. 158337 (7 p). <https://doi.org/10.1016/j.clinph.2020.09.023>
7. Hülya, K. M. Analysis of the Anti-Reflection Coated Eyeglass Used in Turkey / K. M. Hülya, E. Naci // Int. J. Eastern Anatolia Sci. Eng. Des. – 2021. – Vol. 3, № 1. – P. 157–166. <https://doi.org/10.47898/ijeased.865312>
8. Спектроскопия слоев на плоскопараллельных подложках / А. Б. Сотский [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 2020. – Т. 128, № 8. – С. 1133–1143. <https://doi.org/10.21883/OS.2020.08.49711.79-20>
9. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. / Э. Камке. – М.: Лань, 2003. – 576 с.

10. Борн, М. Основы оптики: пер. с англ. / М. Борн, Э. Вольф. – 2-е изд., испр. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 719 с.
11. Gao, L. Exploitation of multiple incidences spectrometric measurements for thin film reverse engineering / L. Gao, F. Lemarchand, M. Lequime // *Opt. Express*. – 2012. – Vol. 20, № 14. – P. 15734–15751. <https://doi.org/10.1364/OE.20.015734>
12. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн. – 2-е изд., перераб. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 832 с.

## References

1. Lemarquis F., Begou T., Moreau A., Lumeau J. Broadband antireflection coatings for visible and infrared ranges. *CEAS Space Journal*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 567–568. <https://doi.org/10.1007/s12567-019-00266-8>
2. Garlisi C., Trepici E., Li X., Sakka R. A., Ali K. A., Nogueria R. P., Zheng L., Azar E., Palmisano G. Multilayer thin film structures for multifunctional glass: Self-cleaning, antireflective and energy-saving properties. *Applied Energy*, 2020, vol. 264, p. 114697 (32 p.). <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.114697>
3. Tikhonravov A. V., Trubetskov M. K., Debell G. W. Optical coating design approaches based on the needle optimization technique. *Applied Optics*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 704–710. <https://doi.org/10.1364/AO.46.000704>
4. Grenaderov A. S., Oskomov K. V., Solovyev A. A., Selivanova A. V., Konishchev M. E. Plasma-chemical deposition of anti-reflection and protective coating for infrared optics. *Russian Physics Journal*, 2020, vol. 62, no. 11, pp. 2112–2120. <https://doi.org/10.1007/s11182-020-01954-3>
5. Troitskii B. B., Lokteva A. A., Novikova M. A., Lopatina T. I., Fedyushkin I. L. Optimal Optical Properties–Hardness Ratio of Antireflection Coating Produced from a Silica Sol with Hexadecyltrimethylammonium Bromide on Silicate Glass. *Russian Journal of Applied Chemistry*, 2020, vol. 93, no. 2, pp. 232–237. <https://doi.org/10.1134/S1070427220020111>
6. Gu J., Weib H., Renb F., Fanb Q., Xub G., Chenb X., Songa S., Doub S., Zhaoa J., Lib Y. Fabrication and performances of double-sided HfO<sub>2</sub> anti-reflection films with ultra-high infrared transmittance. *Journal of Alloys and Compounds*, 2021, vol. 858, p. 158337 (7 p.) <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2020.158337>
7. Hülya K. M., Naci E. Analysis of the Anti-Reflection Coated Eyeglass Used in Turkey. *International Journal of Eastern Anatolia Science Engineering and Design*, 2021, vol. 3, no. 1, pp. 157–166. <https://doi.org/10.47898/ijeased.865312>
8. Sotsky A. B., Mikheev S. S., Stas'kov N. I., Sotskaya L. I. Spectrophotometry of Layers on Plane Parallel Substrates. *Optics and Spectroscopy*, 2020, vol. 128, no. 8, pp. 1155–1166. <https://doi.org/10.1134/S0030400X20080354>
9. Kamke E. *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 2012. XXVI, 670 p. (in German). <https://doi.org/10.1007/978-3-663-05925-7>
10. Born M., Wolf E. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 2019. 719 p. <https://doi.org/10.1017/9781108769914>
11. Gao L., Lemarchand F., Lequime M. Exploitation of multiple incidences spectrometric measurements for thin film reverse engineering. *Optics Express*, 2012, vol. 20, no. 4, pp. 15734–15751. <https://doi.org/10.1364/OE.20.015734>
12. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York [et al.], McGraw-Hill Book Company, 1968. XVII, 1130 p. <https://doi.org/10.1002/zamm.19690490921>

## Информация об авторах

**Сотский Александр Борисович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики и компьютерных технологий, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова (ул. Космонавтов, 1, 212022, Могилев, Республика Беларусь). E-mail: [ab\\_sotsky@mail.ru](mailto:ab_sotsky@mail.ru)

**Чудаков Евгений Александрович** – аспирант, младший научный сотрудник, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова (ул. Космонавтов, 1, 212022, Могилев, Республика Беларусь). E-mail: [kenni\\_mark@bk.ru](mailto:kenni_mark@bk.ru)

## Information about the authors

**Alexander B. Sotsky** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Physics and Computer Technologies, Mogilev State A. Kuleshov University (1, Kosmonavtov Str., 212022, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: [ab\\_sotsky@mail.ru](mailto:ab_sotsky@mail.ru)

**Evgeny A. Chudakov** – Postgraduate Student, Junior Researcher, Mogilev State A. Kuleshov University (1, Kosmonavtov Str., 212022, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: [kenni\\_mark@bk.ru](mailto:kenni_mark@bk.ru)