*УДК 539.12*

*В. В. КИСЕЛЬ, Е. М. ОВСИЮК, О. В. ВЕКО, В. М. РЕДЬКОВ*

# ВКЛАД КАЛИБРОВОЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ В СТРУКТУРУ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ СО СПИНОМ 2

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
[2]*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина*
[3]*Гимназия г. Калинковичи*
[4]*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 28.04.2015)*

**Введение.** Теория массивного и безмассового полей со спином 2, начиная с работ В. Паули и М. Фирца [1, 2], всегда присутствовала в литературе (см. [3]). Бóльшая часть работ выполнена в рамках формализма волновых уравнений второго порядка. Известно, что много путаницы в рамках такого подхода возникает из-за неоднозначностей в порядке написания производных. Эти неоднозначности отсутствуют, если с самого начала использовать формализм уравнений первого порядка.

По-видимому, первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено в работах Ф. И. Федорова и его учеников [4]. Оказалось, что частица со спином 2 требует для своего описания в таком подходе 30-компонентной волновой функции. Ф. И. Федоровым было инициировано развитие еще одной, 50-компонентной теории частицы со спином 2. В литературе специально исследовался вопрос о связях между этими двумя вариантами. Было показано, что 50-компонентное волновое уравнение для заряженной частицы со спином 2 во внешнем электромагнитном поле может быть сведено к виду 30-компонентного уравнения, но с дополнительным членом взаимодействия, интерпретируемым как аномальный магнитный момент.

Известно, что в теории безмассового поля со спином 1 (электромагнитный случай) существует калибровочная симметрия, при этом решения градиентного типа не дают вклада в тензор энергии-импульса. В настоящей работе исследуется более сложная ситуация с вкладом калибровочных степеней свободы в тензор энергии-импульса для поля со спином 2 (гравитона). Известно [1, 2], что для уравнения безмассового поля со спином 2 также существует некоторая калибровочная симметрия, приводящая к тому, что есть подкласс решений (обобщенного) градиентного типа. Однако до настоящего времени вопрос о вкладе этих калибровочных степеней свободы в тензор энергии-импульса поля со спином 2 не исследовался.

**1. Безмассовое поле со спином 1.** Напомним описание ситуации в случае поля со спином 1, с тем чтобы затем обобщить это рассмотрение на случай поля со спином 2. При исследовании обоих случаев (для спина 1 и спина 2) будем пользоваться известными фактами из теории релятивистских волновых уравнений первого порядка [4, 5].

Тензор энергии-импульса векторного поля (применяем матричный формализм Даффина – Кеммера) задается равенством (используем метрику с мнимой единицей)

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left\{ \bar{\Psi}\beta_\mu(\partial_\nu\Psi) - (\partial_\nu\bar{\Psi})\beta_\mu\Psi \right\}, \tag{1}$$

где матрицы Даффина – Кеммера определяются как [4]

$$\beta_\mu = e^{\rho,[\rho\mu]} + e^{[\rho\mu],\rho}.$$

Из (1) следует представление тензора энергии-импульса в виде

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left\{\bar{\Psi}_\rho(\partial_\nu \Psi_{[\rho\mu]}) + \bar{\Psi}_{[\rho\mu]}(\partial_\nu \Psi_\rho) - (\partial_\nu \bar{\Psi}_\rho)\Psi_{[\rho\mu]} - (\partial_\nu \bar{\Psi}_{[\rho\mu]})\Psi_\rho\right\}, \quad (2)$$

где

$$\bar{\Psi}_\mu = \Psi_\mu, \qquad \bar{\Psi}_{[\mu\nu]} = -\Psi_{[\mu\nu]}. \quad (3)$$

С учетом (2) из (3) получаем явное выражение для тензора $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \Psi_{[\rho\mu]}\left(\partial_\nu \Psi_\rho\right) - \psi_\rho(\partial_\nu \Psi_{[\rho\mu]}). \quad (4)$$

Согласно калибровочной симметрии, если набор полей $\Psi_\rho, \Psi_{[\mu\nu]}$ является решением уравнений, то решением уравнений будет также и набор полей

$$\Psi'_\rho = \Psi_\rho + \partial_\rho \Lambda, \quad \Psi'_{[\mu\nu]} = \Psi_{[\mu\nu]}, \quad (5)$$

где $\Lambda(x)$ – произвольная вещественная функция координат. Для тензора энергии-импульса нового решения (5) уравнений получаем представление

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \left\{\Psi_{[\rho\mu]}\left(\partial_\rho\partial_\nu\Lambda\right) - (\partial_\rho\Lambda)\left(\partial_\nu \Psi_{[\rho\mu]}\right)\right\} \equiv T_{\mu\nu} + \Xi_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Добавка $\Xi_{\mu\nu}$ к тензору (6) может быть представлена как 4-дивергенция:

$$\Xi_{\mu\nu} = \partial_\rho\left\{\Psi_{[\rho\mu]}(\partial_\nu\Lambda) - \Lambda\left(\partial_\nu \Psi_{[\rho\mu]}\right)\right\}. \quad (7)$$

Это означает, что при интегрировании эта добавка дает нулевой вклад.

Проведем аналогичный анализ для безмассового вещественного поля со спином 2.

**2. Безмассовый случай, калибровочная симметрия.** Исходим из системы уравнений первого порядка 30-компонентной теории поля со спином 2 [4, 5].

Массивный случай:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\Phi_\mu + M\Phi_0 = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\partial_\nu\Phi_{(\mu\nu)} + M\Phi_\mu = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\partial_\rho\Phi_\sigma + \partial_\sigma\Phi_\rho - \frac{1}{2}\delta_{\rho\sigma}\partial_\nu\Phi_\nu\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\mu\Phi_{\rho[\sigma\mu]} + \partial_\mu\Phi_{\sigma[\rho\mu]}\right) + M\Phi_{(\rho\sigma)} = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\beta\Phi_{(\eta\gamma)} - \partial_\gamma\Phi_{(\beta\eta)} + \frac{1}{3}\delta_{\eta\gamma}\partial_\rho\Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3}\delta_{\eta\beta}\partial_\rho\Phi_{(\rho\gamma)}\right) + M\Phi_{\eta[\gamma\beta]} = 0.
\end{gathered} \quad (8)$$

Безмассовый случай:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\Phi_\mu = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\partial_\nu\Phi_{(\mu\nu)} + \Phi_\mu = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\partial_\rho\Phi_\sigma + \partial_\sigma\Phi_\rho - \frac{1}{2}\delta_{\rho\sigma}\partial_\nu\Phi_\nu\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\mu\Phi_{\rho[\sigma\mu]} + \partial_\mu\Phi_{\sigma[\rho\mu]}\right) = 0, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\beta\Phi_{(\eta\gamma)} - \partial_\gamma\Phi_{(\beta\eta)} + \frac{1}{3}\delta_{\eta\gamma}\partial_\rho\Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3}\delta_{\eta\beta}\partial_\rho\Phi_{(\rho\gamma)}\right) + \Phi_{\eta[\gamma\beta]} = 0.
\end{gathered} \quad (9)$$

В безмассовом случае известно существование калибровочной симметрии и соответствующих простейших решений уравнений [4, 5]:

$$\begin{gathered}
\Phi_0^{(0)} = \partial_\rho\partial_\rho\Lambda, \qquad \Phi_\mu{}^{(0)} = 0, \quad \Phi_{\mu[\nu\lambda]}^{(0)} = 0, \\
\Phi_{(\mu\nu)}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\rho\right)\Lambda,
\end{gathered} \quad (10)$$

где $\Lambda(x)$ – произвольная вещественная функция. Это означает, что если набор функций $\Phi = \left(\Phi_0, \Phi_\mu, \Phi_{(\mu\nu)}, \Phi_{\rho[\eta\sigma]}\right)$ является решением системы уравнений (9), то решением является и набор функций $\Phi' = \Phi + \Phi^{(0)}$.

**3. Тензор энергии-импульса для поля со спином 2.** Исходим из общего выражения для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left\{\bar{\Phi}\Gamma_\mu(\partial_\nu\Phi) - (\partial_\nu\bar{\Phi})\Gamma_\mu\Phi\right\}; \tag{11}$$

в данном случае матрицы $\Gamma_\mu$ задаются с помощью элементов полной матричной алгебры следующим образом:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{0,\mu} + e^{\mu,0}\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(e^{\rho,(\mu\rho)} - e^{(\mu\rho),\rho}\right) - \sqrt{2}\left(e^{(\nu\rho),\nu[\mu\rho]} + e^{\nu[\mu\rho],(\nu\rho)}\right). \tag{12}$$

Учитывая явный вид матриц из (12), находим представление для тензора $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Big\{ &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{\Phi}_0(\partial_\nu\Phi_\mu) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{\Phi}_\mu(\partial_\nu\Phi_0) - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\bar{\Phi}_\rho(\partial_\nu\Phi_{(\mu\rho)}) + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\bar{\Phi}_{(\mu\rho)}(\partial_\nu\Phi_\rho) - \\ &-\sqrt{2}\,\bar{\Phi}_{(\lambda\rho)}(\partial_\nu\Phi_{\lambda[\mu\rho]}) - \sqrt{2}\,\bar{\Phi}_{\lambda[\mu\rho]}(\partial_\nu\Phi_{(\lambda\rho)}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\partial_\nu\bar{\Phi}_0)\Phi_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\bar{\Phi}_\mu)\Phi_0 + \\ &+\sqrt{\frac{2}{3}}\,(\partial_\nu\bar{\Phi}_\rho)\Phi_{(\mu\rho)} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,(\partial_\nu\bar{\Phi}_{(\mu\rho)})\Phi_\rho + \sqrt{2}(\partial_\nu\bar{\Phi}_{(\lambda\rho)}\Phi_{\lambda[\mu\rho]} + \sqrt{2}(\partial_\nu\bar{\Phi}_{\lambda[\mu\rho]}\Phi_{(\lambda\rho)}\Big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Потребуется явный вид матрицы инвариантной билинейной формы [4, 5]

$$\begin{aligned} \eta = -e^{0,0} + \left(e^{a,a} - e^{4,4}\right) + \left(e^{(ab),(ab)} - 2e^{(a4),(a4)} + e^{(44),(44)}\right) + \\ +\left(-e^{a[bc],a[bc]} - 2e^{4[4a],4[4a]} + 2e^{a[4b],a[4b]} + e^{4[ab],4[ab]}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} \eta\Gamma_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{0,4} + e^{4,0}\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(e^{a,(4a)} + e^{(4a),a}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(e^{4,(44)} + e^{(44),4}\right) - \sqrt{2}\left(e^{(ab),a[4b]} + e^{a[4b],(ab)}\right) + \\ +\sqrt{2}\left(e^{(a4),4[4a]} + e^{4[4a],(4b)}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

получаем нужное для анализа соотношения (13) тождество

$$(\eta\Gamma_4)^+ = \eta\Gamma_4. \tag{16}$$

С учетом вещественности (незаряженности) безмассового поля со спином 2 (напоминаем, что в пространстве Минковского используется метрика *ict*) находим явный вид компонент функции $\bar{\Phi}$:

$$\begin{aligned} &\bar{\Phi}_0 = -\Phi_0^* = -\Phi_0, \qquad \bar{\Phi}_\mu = (\Phi_a, -i\Phi_0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\Phi_a, \Phi_4) = \Phi_\mu, \\ &\bar{\Phi}_{(\mu\nu)} = \left(\Phi^*_{(ab)}, (i\Phi_{(a0)})^*, \Phi^*_{(44)}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi_{(\mu\nu)}, \\ &\bar{\Phi}_{\mu[\nu\rho]} = \left(\Phi^*_{a[bc]}, \Phi^*_{4[4a]}, \Phi^*_{a[4b]}, \Phi^*_{4[ab]}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\Phi_{\mu[\nu\rho]}. \end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая (17), из равенства (13) находим явное выражение для тензора энергии-импульса поля со спином 2:

$$T_{\mu\nu} = -\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_0(\partial_\mu\Phi_\nu)\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_\mu(\partial_\nu\Phi_0) - \right.$$

$$\left. -\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_\rho(\partial_\nu\Phi_{(\mu\rho)}) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{(\mu\rho)}(\partial_\nu\Phi_\rho) - \sqrt{2}\Phi_{(\lambda\rho)}(\partial_\nu\Phi_{\lambda[\mu\rho]}) + \sqrt{2}\Phi_{\lambda[\mu\rho]}(\partial_\nu\Phi_{(\lambda\rho)}) \right\}. \tag{18}$$

Теперь выясним, какую добавку к этому тензору энергии-импульса вносит простейшее решение $\Phi^{(0)}$, связанное с калибровочными степенями свободы (см. (10)). После необходимых вычислений для соответствующей добавки $\Xi_{\nu\mu}$ (см. (6)) получаем следующее явное выражение:

$$\Xi_{\nu\mu} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\Big\{\big[(\partial_\rho\partial_\rho)(\partial_\nu\Phi_\mu) - (\partial_\nu(\partial_\rho\partial_\rho))\Lambda\Phi_\mu\big] +$$

$$+\big[(\partial_\nu\partial_\mu\partial_\rho\Lambda)\Phi_\rho - (\partial_\mu\partial_\rho\Lambda)(\partial_\mu\Phi_\rho)\big] -$$

$$-\sqrt{3}\big[(\partial_\nu\partial_\lambda\partial_\rho\Lambda)\,\Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda\partial_\rho\Lambda)\,(\partial_\nu\partial_{\lambda[\mu\rho]})\big]\Big\}. \tag{19}$$

Преобразуем отдельные слагаемые в (19). Имеем три равенства:

$$(\partial_\rho\partial_\rho)(\partial_\nu\Phi_\mu) - (\partial_\nu(\partial_\rho\partial_\rho))\Lambda\Phi_\mu = \partial_\rho\left\{(\partial_\rho\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\mu) - (\partial_\nu\partial_\rho\Lambda)\Phi_\mu\right\} -$$

$$-(\partial_\rho\Lambda)(\partial_\rho\partial_\nu\Phi_\mu) + (\partial_\nu\partial_\rho\Lambda)(\partial_\rho\Phi_\mu); \tag{20}$$

$$(\partial_\nu\partial_\mu\partial_\rho\Lambda)\Phi_\rho - (\partial_\mu\partial_\rho\Lambda)(\partial_\mu\Phi_\rho) = \partial_\rho\left\{(\partial_\nu\partial_\mu\Lambda)\Phi_\rho - (\partial_\mu\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\rho)\right\} =$$

$$= -(\partial_\nu\partial_\mu\Lambda)(\partial_\rho\Phi_\rho) + (\partial_\mu\Lambda)(\partial_\rho\partial_\nu\Phi_\rho); \tag{21}$$

$$(\partial_\nu\partial_\lambda\partial_\rho\Lambda)\,\Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda\partial_\rho\Lambda)\,(\partial_\nu\partial_{\lambda[\mu\rho]}) = \partial_\rho\left\{(\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda)\Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda\Lambda)(\partial_\nu\Phi_{\lambda[\mu\rho]})\right\} -$$

$$-(\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda)(\partial_\rho\Phi_{\lambda[\mu\rho]} + (\partial_\lambda\Lambda)(\partial_\rho\partial_\nu\Phi_{\lambda[\mu\rho]}). \tag{22}$$

Учитывая эти тождества, выражение для добавки $\Xi_{\nu\mu}$ приводим к виду

$$\Xi_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu}\,, \tag{23}$$

где

$$D_{\mu\nu} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\Big\{\big[\,(\partial_\rho\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\mu) - (\partial_\nu\partial_\rho\Lambda)\Phi_\mu\,\big] +$$

$$+\big[\,(\partial_\nu\partial_\mu\Lambda)\Phi_\rho - (\partial_\mu\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\rho)\,\big] - \sqrt{3}\big[\,(\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda)\Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda\Lambda)(\partial_\nu\Phi_{\lambda[\mu\rho]}\,\big]\Big\}, \tag{24}$$

а

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\Big\{-(\partial_\lambda\Lambda)\partial_\nu\Big[\partial_\lambda\Phi_\mu + \sqrt{3}\partial_\rho\Phi_{\lambda[\mu\rho]}\Big] + (\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda)\Big[\partial_\lambda\Phi_\mu + \sqrt{3}\partial_\rho\Phi_{\lambda[\mu\rho]}\Big]\Big\}. \tag{25}$$

Правая часть равенства (23) содержит дивергентную часть $D_{\nu\mu}$ и недивергентную $\Delta_{\nu\mu}$.

Покажем, что недивергентная часть обращается в нуль (при учете уравнений движения). Для этого действуем на четвертое уравнение в (9) оператором $\sqrt{3}\partial_\beta$:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\partial_\beta\partial_\beta\Phi_{(\eta\gamma)} - \partial_\beta\partial_\gamma\Phi_{(\beta\eta)} + \frac{1}{3}\delta_{\eta\gamma}\partial_\beta\partial_\rho\Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3}\delta_{\eta\beta}\partial_\beta\partial_\rho\Phi_{(\rho\gamma)}\right) + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\eta[\gamma\beta]} = 0\,;$$

заменяем индексы $\gamma \longrightarrow \mu,\ \eta \longrightarrow \lambda$, получим

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\partial_\beta\partial_\beta\Phi_{(\lambda\mu)} - \partial_\beta\partial_\mu\Phi_{(\beta\lambda)} + \frac{1}{3}\delta_{\lambda\mu}\partial_\beta\partial_\rho\Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3}\partial_\lambda\partial_\rho\Phi_{(\rho\mu)}\right) + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]} = 0. \tag{26}$$

Теперь на второе уравнение в (9) действуем оператором $\partial_\lambda$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\lambda\partial_\mu\Phi_0-\sqrt{\frac{2}{3}}\,\partial_\lambda\partial_\rho\Phi_{(\rho\mu)}+k\partial_\lambda\Phi_\mu=0\,,$$

с учетом чего предыдущее уравнение (26) преобразуем к виду

$$k\left(\partial_\lambda\Phi_\mu+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]}\right)+$$
$$+\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\partial_\rho\partial_\rho\Phi_{(\lambda\mu)}-\partial_\rho\partial_\mu\Phi_{(\rho\lambda)}-\partial_\rho\partial_\lambda\Phi_{(\rho\mu)}+\frac{1}{3}\delta_{\lambda\mu}\partial_\rho\partial_\beta\Phi_{(\rho\beta)}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\lambda\partial_\mu\Phi_0\right\}=0. \qquad (27)$$

Выражение в фигурных скобках в (27) симметрично по индексам $\lambda-\mu$; следовательно, такой же симметрией обладает и первое слагаемое

$$\partial_\lambda\Phi_\mu+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]}=\partial_\mu\Phi_\lambda+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]}. \qquad (28)$$

Теперь воспользуемся третьим уравнением системы (9)

$$\partial_\lambda\Phi_\mu+\partial_\mu\Phi_\lambda+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]}+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]}=0,$$

что после перегруппировки дает

$$(\partial_\lambda\Phi_\mu+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]})+(\partial_\mu\Phi_\lambda+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]})=0. \qquad (29)$$

Очевидно, что с учетом (28) из (29) следует равенство

$$(\partial_\lambda\Phi_\mu+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]})=(\partial_\mu\Phi_\lambda+\sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]})=0. \qquad (30)$$

Следовательно, недивергентная добавка (23) обращается в нуль. Другими словами, выполняется равенство

$$T'_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}+D_{\mu\nu},$$

где

$$D_{\mu\nu}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\Big\{\Big[(\partial_\rho\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\mu)-(\partial_\nu\partial_\rho\Lambda)\Phi_\mu\Big]+$$
$$+\Big[(\partial_\nu\partial_\mu\Lambda)\Phi_\rho-(\partial_\mu\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\rho)\Big]-\sqrt{3}\Big[(\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda)\Phi_{\lambda[\mu\rho]}-(\partial_\lambda\Lambda)(\partial_\nu\Phi_{\lambda[\mu\rho]}\Big]\Big\}. \qquad (31)$$

Таким образом, известный результат, что электромагнитные решения типа градиента от произвольной скалярной функции дают нулевой вклад в тензор энергии-импульса, обобщается на случай безмассового поля со спином 2. Показано, что в пространстве Минковского градиентные решения 30-компонентного волнового уравнения для безмассового поля со спином 2 дают вклад в тензор поля в виде 4-дивергенции от тензора третьего ранга (31) и, следовательно, при интегрировании это слагаемое дает нулевой вклад.

Следует отметить, что свойства безмассового поля со спином 2, рассматриваемого на фоне псевдориманового пространства-времени, оказываются существенно более сложными [6]. В частности, в произвольном пространстве-времени общековариантные уравнения для этого поля не обладают калибровочной симметрией и поэтому вопрос об устранении нефизических степеней свободы, вообще говоря, автоматически не решается.

Существования такого свойства калибровочной инвариантности можно добиться в классе пространств с нулевым тензором Риччи $R_{\alpha\beta}$, введя дополнительный член взаимодействия с помощью тензора кривизны Римана $R_{\alpha\beta\rho\sigma}$ [6]. В этой достаточно сложной для анализа ситуации вопрос о вкладе калибровочных степеней свободы в тензор энергии-импульса для поля со спином 2 остается открытым.

Работа выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф13-146).

## Литература


1. *Pauli W., Fierz M.* // Helv. Phys. Acta. 1939. Bd. 12. S. 297–300.

2. *Fierz M., Pauli W.* // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1939. Vol. 173. P. 211–232.

3. *De Broglie L.* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1941. Vol. 212. P. 657–659; *Pauli W.* // Rev. Mod. Phys. 1941. Vol. 13. P. 203–232; *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 703–733; *Фрадкин Э. Е.* // Там же. 1950. Т. 20, вып. 1. С. 27–38; *Файнберг В. Я.* // Тр. ФИАН СССР. 1955. Т. 6. С. 269–332; *Regge T.* // Nuovo Cimento. 1957. Vol. 5, N 2. P. 325–326; *Buchdahl H. A.* // Nuovo Cim. 1958. Vol. 10. P. 96–103; *Buchdahl H. A.* // Ibid. 1962. Vol. 25. P. 486–496; Velo G., Zwanziger D. // Phys. Rev. 1969. Vol. 188, N 5. P. 2218–2222; *Velo G.* // Nucl. Phys. B. 1972. Vol. 43. P. 389–401; *Hagen C. R.* // Phys. Rev. D. 1972. Vol. 6, N 4. P. 984–987; *Hagen C. R.* // Ibid. 1972. Vol. 5, N 2. P. 377–388; *Cox W.* // J. Phys. A. 1982. Vol. 15. P. 253–268; *Barut A. O, Xu B. W.* // J. Phys. A. 1982. Vol. 15, N 4. P. 207–210; *Loide R. K.* // Ibid. 1986. Vol. 19, N 5. P. 827–829; *Vasiliev M. A.* // Phys. Lett. B. 1992. Vol. 285. P. 225–234; *Buchbinder I. L., Krykhtin V. A., Pershin V. D.* // Ibid. 1999. Vol. 466. P. 216–226; *Buchbinder I. L.* et al. / // Nucl. Phys. B. 2000. Vol. 584. P. 615–640.

4. *Федоров Ф. И.* // Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. 1951. Вып. 12. С. 156–173; *Крылов Б. В., Федоров Ф. И.* // Докл. АН БССР. 1967. Т. 11, № 8. С. 681–684; *Богуш А. А., Крылов Б. В. , Федоров Ф. И.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1968. № 1. С. 74–81; *Федоров Ф. И.* // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179, № 4. С. 802–805; *Крылов Б. В.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1972. № 6. С. 82–89; *Кисель В. В.* //Там же. 1986. № 5. С. 94–99; *Федоров Ф. И, Кирилов А. А.* // Acta Phys. Pol., B. 1976. Vol. 7, N 3. P. 161–167; *Богуш А. А., Кисель В. В.* // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 8. С. 702–705; *Богуш А. А., Кисель В. В., Федоров Ф. И.* // Там же. 1984. Т. 277, № 2. С. 343–346; *Кисель В. В.* Релятивистские волновые уравнения с расширенным набором представлений: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Ин-т физики. Минск, 1984; *Богуш А. А., Кисель В. В.* // Изв. вузов МВ и ССО СССР. Физика. 1988. Т. 31, № 3. С. 11–16; *Богуш А. А., Кисель В. В.* // Изв. вузов. Физика. 1984. № 1. С. 23–27; *Богуш А. А., Кисель В. В., Федоров Ф. И.* // Докл АН СССР. 1984. Т. 277, № 2, С. 343–346.

5. *Богуш А. А., Кисель В. В., Токаревская Н. Г., Редьков В. М.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 62–67; *Кисель В. В., Редьков В. М.* // Весці БДПУ ім. Максіма Танка. Сер. 3. 2010. № 1 (63). С. 3–6; Там же. № 2 (64). С. 8–10; *Кисель В. В, Овсиюк Е. М., Редьков В. М.* // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 2. С. 18–26; *Редьков В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Минск, 2009; *Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M.* Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature. New York, 2014; *Плетюхов В. А., Стражев В. И., Редьков В. М.* Группа Лоренца и теория релятивистских волновых уравнений. Минск, 2015.

6. *Red'kov V. M., Tokarevskaya N .G., Kisel V. V.* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2003. Vol. 6, N 3. P. 772–778.



*V. V. KISEL, E. M. OVSIYUK, O. V. VEKO, V. M. RED'KOV*


**CONTRIBUTION OF GAUGE DEGREES OF FREEDOM TO THE SPIN 2 FIELD ENERGY-MOMENTUM TENSOR**

## Summary


The known result that electromagnetic solutions in the form of the gradient of an arbitrary scalar function make a zero contribution to the energy-momentum tensor is extended to a massless spin 2 field. Within the theory of 30-component first-order equations, it is shown that in Minkowski's space, the generalized gradient- type solutions for a spin 2 field make a contribution to the energy-momentum tensor in the form of a 4-divergence of a third-rank tensor; its contribution therefore vanishes during integration.