ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.21+519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-201-212

Поступила в редакцию 19.05.2023
Received 19.05.2023

А. Д. Егоров

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО СДУ СКОРОХОДА С ХАОСОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Аннотация. Настоящая работа посвящена точному и приближенному вычислению математического ожидания нелинейных функционалов от решения линейного уравнения Скорохода с хаосами первого порядка в коэффициентах и начальном условии. Известное общее решение данного уравнения содержит неизвестный функциональный параметр, определяемый как решение некоторого вспомогательного интегрального стохастического уравнения. В статье рассматриваются частные случаи, когда решение вспомогательного уравнения находится в явном виде. Вычисляются моменты решения и рассматриваются приближенные формулы для вычисления математических ожиданий некоторых видов нелинейных функционалов от решения. Приведены численные примеры, иллюстрирующие точность полученных формул.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, уравнения Скорохода, математические ожидания функционалов от решений, приближенные формулы

Для цитирования. Егоров, А. Д. О вычислении функционалов от решения линейного СДУ Скорохода с хаосом первого порядка в коэффициентах / А. Д. Егоров // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 201–212. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-201-212

Alexandr D. Egorov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON THE CALCULATION OF FUNCTIONALS FROM THE SOLUTION OF THE LINEAR SKOROHOD SDE WITH FIRST-ORDER CHAOS IN THE COEFFICIENTS

Abstract. This article is devoted to the precise and approximate calculation of the mathematical expectation of nonlinear functionals from the solution of the linear Skorohod equation with first-order chaos in the coefficients and the initial condition. In [1–4], approximate methods for calculating the mathematical expectation of functionals from solutions of the linear Skorohod stochastic differential equation with a random initial condition and deterministic coefficient functions were proposed and investigated. This paper considers the calculation of the mathematical expectation of nonlinear functionals from the solution to the linear Skorohod equation with first-order chaos in the coefficients and the initial condition. In this case, the solution is obtained in an analytical form [5]; however, it contains an unknown random parameter, determined as the solution of an auxiliary integral stochastic equation. In this paper we investigate the cases when the solution of this integral equation is found in an explicit form and then evaluate the moments and the mathematical expectations of some types of functional from the solution of the initial Skorohod equation. The construction of approximate formulas for calculating more general nonlinear functionals from the solution is considered. Numerical examples are given to illustrate the accuracy of the obtained formulas.

Keywords: stochastic differential equations, Skorochod equation, mathematical expectations of functionals from solutions, approximate formulas

For citation. Egorov A. D. On the calculation of functionals from the solution of the linear Skorohod SDE with first-order chaos in the coefficients. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 201–212 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-201-212

Введение. В работах [1–4] были предложены и исследованы приближенные методы вычисления математического ожидания функционалов от решений линейного стохастического дифференциального уравнения Скорохода со случайным начальным условием и детерминированными коэффициентными функциями. Полученные функциональные квадратурные формулы базируются на выполнении требования их точности для полиномиальных функционалов второй и третьей степени от решения. Использовалось также то обстоятельство, что решение уравнения находится в аналитическом виде, все параметры которого явно определены. В данной статье рассматривается вычисление математического ожидания нелинейных функционалов от решения линейного уравнения Скорохода с хаосами первого порядка в коэффициенте и начальном условии. В этом случае решение также получено в аналитическом виде в [5], где рассматривается многомерный случай. Однако оно содержит неизвестный случайный параметр, определяемый диффузионным коэффициентом в виде решения вспомогательного интегрального стохастического уравнения. В нашей работе рассмотрены два частных случая, скалярный и двумерный, когда решение этого уравнения находится в явном виде. Вычислены математические ожидания некоторых видов нелинейных функционалов от решения исходных СДУ с помощью приближенных формул, построенных с использованием моментов решения. Приведены численные примеры, иллюстрирующие точность полученных формул.

Предварительные сведения. Рассмотрим d-мерное стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(A_s^0 + \int_0^1 A_{s,r}^1 dW_r \right) X_s \delta W_s, \qquad t \in [0,1], \tag{1}$$

где X_0 – квадратично интегрируемый случайный вектор с d компонентами, допускающими конечные разложения в кратные стохастические интегралы Винера (хаосы Винера), $A_s^0, A_{s,r}^1$ – коммутирующие квадратично интегрируемые вещественные матричные функции, W_t – канонический винеровский процесс, определенный на вероятностном пространстве $\Omega = C_0([0,1])$, интеграл по δW_s в правой части (1) является интегралом Скорохода, интеграл по dW_s – интеграл Ито. В [5] получено представление единственного решения этого уравнения в виде

$$X_t = \exp\left\{ \int_0^t \tau_{s,t}(A_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \tau_{s,t}(A_s)^2 ds + \int_0^t \int_s^t \tau_{s,t}(D_r A_s) D_s \left[\tau_{s,t}(A_r) \right] dr ds \right\} \tau_{0,t}(X_0), \tag{2}$$

где

$$A_s = A_s^0 + \int_0^1 A_{s,r}^1 dW_r, \;\; \tau_{s,t}(A_s) = \gamma_{s,t}$$

является решением уравнения

$$\gamma_{s,t} = A_s^0 + \int_0^1 A_{s,r}^1 dW_r - \int_s^t A_{s,r}^1 \gamma_{r,t} dr, \quad 0 \le s \le t \le 1, \tag{3}$$

D_s – оператор функциональной производной (производной Маллявэна), и для кратного интеграла Винера

$$I_n(f_n) = n! \int_0^1 \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} f_n(s_1, \dots, s_n) dW(s_1) \cdots dW(s_n), \;\; n = 1, 2, \dots,$$

где $f_n \in L_s^2([0,1]^n; R^d)$ – пространство симметрических функций, преобразование $\tau_{s,t}$ дается равенством

$$\tau_{s,t}\left(I_n(f_n)\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_{[s,t]^k} \gamma_{s_1,\tau} \dots \gamma_{s_k,\tau} I_{n-k}\left(f_n(s_1, \dots, s_k, \bullet) \right) ds_1 \dots ds_k. \tag{4}$$

Заметим, что $D_t \sum_{n \ge 1} I_n(f_n) = \sum_{n \ge 1} n I_{n-1}\left(f_n(\cdot, t) \right), \;\; t \in T$. При получении представления решений уравнений с интегралом Скорохода в [5] использовались понятия виковских произведений и S-преобразований. Виковское произведение двух кратных стохастических интегралов определяется равенством $I_n(f_n) \lozenge I_m(g_m) = I_{n+m}(f_n \hat{\otimes} g_m)$, где $f_n \hat{\otimes} g_m$ обозначает симметризацию $f_n \otimes g_m$, и продолжается по линейности на конечные суммы таких интегралов. Для функционалов $F(W_{(\bullet)}) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ имеем

$$S_h\left(F(W_{(\bullet)})\right)=E\left[F\left((W_{(\bullet)})\right)\exp\left\{i\int_0^1 h_s dW_s+\frac{1}{2}\int_0^1 h_s^2 ds\right\}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left\langle f_n,h^{\otimes n}\right\rangle,\quad h_s\in L_2[0,1].$$

В настоящей работе с целью построения приближенных формул для вычисления нелинейных функционалов от решения рассматривается два частных случая задания коэффициентов $A_s^0, A_{s,r}^1$ и начального значения X_0, где все параметры решения находятся в явном виде.

Основные результаты. Рассмотрим вначале скалярный случай $d = 1$, в котором обозначим $A_t = \sigma_t$, т. е.

$$X_t=X_0+\int_0^t\left(\sigma_s^0+\int_0^1\sigma_{s,r}^1 dW_r\right)X_s dW_s,\quad t\in[0,1],\tag{5}$$

где $\sigma_t^0\in L^2[0,1]$, $\sigma_{t,r}^1\in L^2([0,1]^2)$, X_0 – скалярная случайная величина, допускающая хаотическое разложение по кратным интегралам Винера. Решение уравнения (5) в соответствии с (2) имеет вид

$$X_t=\exp\left\{\int_0^t\tau_{s,t}(\sigma_s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\tau_{s,t}(\sigma_s)^2 ds+\int_0^t\int_s^t\tau_{s,t}(D_r\sigma_s)D_s[\tau_{s,t}(\sigma_r)]drds\right\}\tau_{0,t}(X_0),\tag{6}$$

где $\tau_{s,t}(\sigma_s)=\gamma_{s,t}$ является решением уравнения

$$\gamma_{s,t}=\sigma_s^0+\int_0^1\sigma_{s,r}^1 dW_r-\int_s^t\sigma_{s,r}^1\gamma_{r,t}dr,\tag{7}$$

а для скалярного кратного интеграла Винера $F=I_n\left(f_n\right)$ справедливо равенство

$$\tau_{s,t}(F)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\int_{[s,t]^k}\gamma_{s_1,\tau}\ldots\gamma_{s_k,\tau}I_{n-k}\left(f_n(s_1,\ldots,s_k,\bullet)\right)ds_1\ldots ds_k.\tag{8}$$

Из (7) и (8) вытекает, что

$$\tau_{s,t}(\sigma_r)=\sigma_r^0+\int_0^1\sigma_{r,\tau}^1 dW_\tau-\int_s^t\sigma_{r,s_1}^1\gamma_{s_1,t}ds_1,\quad D_s[\tau_{s,t}(\sigma_r)]=\sigma_{r,s}^1-\int_s^t D_s[\gamma_{s_1,t}]\sigma_{r,s_1}^1 ds_1,\tag{9}$$

$$D_r[\gamma_{s,t}]=\sigma_{s,r}^1-\int_s^t\sigma_{s,u}^1 D_r[\gamma_{u,t}]du.\tag{10}$$

Таким образом, для нахождения $y_{r,s,t}=D_r[\gamma_{s,t}]$ нужно решить уравнение

$$y_{r,s,t}=\sigma_{s,r}^1-\int_s^t\sigma_{s,u}^1 y_{r,u,t}du.\tag{11}$$

Рассмотрим далее частный случай уравнения (5), для которого решение находится в аналитическом виде, все параметры которого явно определены:

$$X_t=X_0+\int_0^t\left(\sigma_s^0+\int_0^1 b(r)dW_r\right)X_s dW_s,\quad t\in[0,1],\tag{12}$$

где σ_t^0 имеет интегрируемую с квадратом производную $(\sigma_t^0)'$, $b(r)\in L_2[0,1]$.

Т е о р е м а 1. *Решение уравнения* (12) *имеет вид*

$$X_t=\exp\left\{\int_0^t f_1(t,s)dW_s+\int_0^t\exp\left\{-\int_s^t b(\tau)d\tau\right\}\int_0^1 b(u)dW_u\delta W_s-\right.$$

$$\left.-\int_0^t\left(f_1(t,s)+\exp\left\{-\int_s^t b(\tau)d\tau\right\}\int_0^1 b\left(u\right)dW_u\right)^2 ds-f_2(t)\right\}\tau_{0,t}(X_0),\tag{13}$$

где

$$f_1(t,s)=\sigma_t^0\exp\left\{-\int_s^t b(\tau)d\tau\right\}-\exp\left\{-\int_0^s b(\tau)d\tau\right\}\int_s^t \exp\left\{-\int_0^s b(\tau)d\tau\right\}\left(\sigma_\tau^0\right)' d\tau,$$

$$f_2(t)=\int_0^t\left(\int_s^t b(r)dr\right)b(s)\left(1-\int_s^t \exp\left\{-\int_u^t b(\tau)d\tau\right\}b(u)du\right)ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае нетрудно показать, что решение уравнения (7) имеет вид

$$\gamma_{s,t}=\exp\left\{-\int_s^t b(\tau)d\tau\right\}\left(\sigma_t^0+I_b\right)-\exp\left\{\int_0^s b(\tau)d\tau\right\}\int_s^t \exp\left\{-\int_0^\tau b(u)du\right\}\left(\sigma_\tau^0\right)' d\tau,$$

где мы ввели обозначение $I_b=\int_0^1 b(\tau)dW_\tau$. В самом деле, подставляя данное выражение $\gamma_{s,t}$ в правую часть (7), получим

$$\sigma_s^0+I_b-\int_s^t b(r)\left[\left(\sigma_t^0+I_b\right)\exp\left\{-\int_r^t b(\tau)d\tau\right\}-\exp\left\{\int_0^r b(\tau)d\tau\right\}\int_r^t \exp\left\{-\int_0^\tau b(u)du\right\}\left(\sigma_\tau^0\right)' d\tau\right]dr=$$

$$=\sigma_s^0+I_b-\left(\sigma_t^0+I_b\right)\int_s^t \frac{d}{dr}\exp\left\{-\int_r^t b(\tau)d\tau\right\}dr+$$

$$+\int_s^t \frac{d}{dr}\left(\exp\left\{\int_0^r b(u)du\right\}\int_r^t \exp\left\{-\int_0^\tau b(u)du\right\}\left(\sigma_\tau^0\right)' d\tau\right)dr+\int_s^t\left(\sigma_\tau^0\right)' d\tau=\gamma_{s,t}.$$

Далее находим решение уравнения (10) и вычисляем другие выражения, входящие в (6):

$$D_r[\gamma_{s,t}]=b(r)\exp\left\{-\int_s^t b(\tau)d\tau\right\},\qquad \tau_{s,t}\left(D_r\sigma_s\right)=\tau_{s,t}\left(b(r)\right)=b(r),$$

$$D_s[\tau_{s,t}](\sigma_r)=b(s)\left(1-\int_s^t \exp\left\{-\int_r^t b(\tau)d\tau\right\}b(r)dr\right).$$

После подстановки полученных выражений в (6) получаем решение (13). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В силу (4) выражение $\tau_{0,t}(X_0)$ также может быть вычислено явно в случае, когда начальное условие X_0 допускает хаотическое разложение по кратным интегралам Винера. Так, в случае $X_0=\int_0^1 g(s)dW_s$, рассмотренном ниже,

$$\tau_{0,t}(X_0)=\int_0^1 g(s)dW_s-\int_0^t g(s)\left[\exp\left\{-\int_s^t b(\tau)d\tau\right\}\left(\sigma_t^0+I_b\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{\int_0^s b(\tau)d\tau\right\}\int_s^t \exp\left\{-\int_0^\tau b(u)du\right\}\left(\sigma_\tau^0\right)' d\tau\right]ds. \qquad (14)$$

Полученное представление решения будет использовано для вычисления моментов решения и построения приближенной формулы для математических ожиданий некоторых видов нелинейных функционалов от решения.

Далее нами рассмотрен случай $d=2$ уравнения (1), в котором

$$A_s^0=\begin{pmatrix} a_0(s) & 0 \\ 0 & a_0(s)\end{pmatrix},\quad A_{s,r}^1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_b & 0\end{pmatrix},\quad a_0(s)\in L^2[0,1],\quad I_b=\int\limits_0^1 b(\tau)dW_\tau,\quad X_0=\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2\end{pmatrix},\quad x_0^1\in R,$$

$$x_0^2=x_0^2(\omega)=\int\limits_0^1 g(r)dW_r,\quad g(r)\in L_2([0,1]),$$

т. е. рассмотрена система уравнений вида

$$\begin{cases} X_t^1=X_0^1+\int_0^t a_0(s)X_s^1\delta W_s, \\ X_t^2=X_0^2+\int_0^t\left(\int_0^1 b(\tau)dW_\tau\right)X_s^1\delta W_s+\int_0^t a_0(s)X_s^2\delta W_s. \end{cases} \tag{15}$$

Т е о р е м а 2. *Решение системы* (15) *имеет вид*

$$X_t^1=x_0^1\exp\left\{\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds\right\},$$

$$X_t^2=x_0^1\left(\int_0^t\left(I_b-\int_s^t a_0(r)b(r)dr\right)dW_s-\int_0^t a_0^s\left(I_b-\int_s^t a_0(r)b(r)dr\right)ds\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds\right\}+\left(\int_0^1 g(r)dW_r-\int_0^t a_0(s)g(s)ds\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds\right\}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (7) в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \gamma_{s,t}^{11} & \gamma_{s,t}^{12} \\ \gamma_{s,t}^{21} & \gamma_{s,t}^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0(s) & 0 \\ I_b & a_0(s)\end{pmatrix}-\int\limits_s^t b(r)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_{r,t}^{11} & \gamma_{r,t}^{12}\end{pmatrix}dr,$$

откуда следует, что

$$\gamma_{s,t}^{11}=a_0(s),\quad \gamma_{s,t}^{12}=0,\quad \gamma_{s,t}^{21}=I_b-\int\limits_s^t a_0(r)b(r)dr,\quad \gamma_{s,t}^{22}=a_0(s),$$

$$\tau_{s,t}(A_s)=\begin{pmatrix} a_0(s) & 0 \\ I_b-\int\limits_s^t a_0(r)b(r)dr & a_0(s)\end{pmatrix},\quad \tau_{s,t}(A_s)^2=\begin{pmatrix} a_0^2(s) & 0 \\ 2a_0(s)\left(I_b-\int\limits_s^t a_0(r)b(r)dr\right) & a_0^2(s)\end{pmatrix},$$

$$D_rA_s=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(r) & 0\end{pmatrix},\quad D_s[\tau_{s,t}(A_r)]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(s) & 0\end{pmatrix},$$

$$\tau_{s,t}(D_rA_s)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(s) & 0\end{pmatrix},\quad \tau_{s,t}(D_rA_s)D_s[\tau_{s,t}(\sigma_r)]=\mathbf{0},$$

$$X_t=\exp\left\{\int\limits_0^t\tau_{s,t}(A_s)dW_s-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\tau_{s,t}(A_s)^2ds\right\}\tau_{0,t}(X_0)=\mathrm{e}^{A_t}\tau_{0,t}(X_0),$$

где

$$A=\begin{pmatrix} A_t^{11} & 0 \\ A_t^{21} & A_t^{22}\end{pmatrix},\quad A_t^{11}=A_t^{22}=\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds,$$

$$A_t^{21} = \int_0^t \left(I_b - \int_s^t a_0(r)b(r)dr \right) dW_s - \int_0^t a_0^s \left(I_b - \int_s^t a_0(r)b(r)dr \right) ds.$$

Вычисляя экспоненту от матрицы, получаем

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t^{11} & X_t^{12} \\ X_t^{21} & X_t^{22} \end{pmatrix} \tau_{0,t} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t^{11} & X_t^{12} \\ X_t^{21} & X_t^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \tau_{0,t}\left(x_0^2\right) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где

$$X_t^{11} = X_t^{22} = \exp\left\{ \int_0^t a_0(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds \right\}, \quad X_t^{12} = 0,$$

$$X_t^{21} = x_0^1 \left(\int_0^t \left(I_b - \int_s^t a_0(r)b(r)dr \right) dW_s - \int_0^t a_0^s \left(I_b - \int_s^t a_0(r)b(r)dr \right) ds \right) \times$$
$$\times \exp\left\{ \int_0^t a_0(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds \right\}.$$

Вычисляя также

$$\tau_{0,t}(X_0) = \tau_{0,t} \begin{pmatrix} X_0^1 \\ X_0^2 \end{pmatrix} = \tau_{0,t} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = \tau_{0,t} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \int_0^1 g(r)dW_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \int_0^1 g(r)dW_r \end{pmatrix} - \int_0^t \gamma_{s,t} \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds =$$
$$= \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \int_0^1 g(r)dW_r \end{pmatrix} - \int_0^t \begin{pmatrix} a_0(s) & 0 \\ I_b - \int_s^t a(r)b(r)dr & a_0(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds =$$
$$= \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \int_0^1 g(r)dW_r \end{pmatrix} - \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ a_0(s)g(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \int_0^1 g(r)dW_r - \int_0^t a_0(s)g(s)ds \end{pmatrix},$$

из (17) получаем (16). Теорема доказана.

Решение системы (15) может быть получено также из других соображений. Решение первого из уравнений, которое в данном случае является уравнением Ито, имеет вид

$$X_t^1 = x_0^1 \exp\left\{ \int_0^t a_0(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds \right\}.$$

Подставляя его во второе уравнение, получим частный скалярный случай уравнения Скорохода, рассмотренного в [6]:

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t \psi_s \delta W_s + \int_0^t a_0(s) X_s^2 \delta W_s, \quad \psi_s = \psi_s(\omega) \in H_{2,0+}, \tag{18}$$

где $H_{2,0+}$ – некоторое расширение класса функционалов, допускающих разложение по кратным интегралам Винера. В [6] с использованием разложений по кратным интегралам Винера, виковских произведений и S-преобразований функционалов получено решение уравнения (18) в виде

$$X_t^2 = U_0^t \Diamond x_0^2 + U_0^t \Diamond \int_0^t \left(U_0^s \right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \delta W_s, \tag{19}$$

где $U_0^t = \exp\left\{ \int_0^t a_0(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds \right\}$ – решение уравнения $X_t^2 = 1 + \int_0^t a_0(s) X_s^2 \delta W_s$ (здесь оно совпадает с $X_t^2 = 1 + \int_0^t a_0(s) X_s^2 dW_s$, так как $a_0(s)$ – детерминированная функция), $(U_0^s)^{\Diamond(-1)}$ – виковский обратный оператор к U_0^s, т. е. такой оператор $F^{\Diamond(-1)}$, заданный на пространстве функционалов $F \in L_2(\Omega)$, что $F \Diamond F^{\Diamond(-1)} = F^{\Diamond(-1)} \Diamond F = 1$. В нашем случае

$$\psi_s(\omega) = x_0^1 \int_0^1 b(\tau) dW_\tau \exp\left\{ \int_0^s a_0(r) dW_r - \frac{1}{2} \int_0^s a_0^2(r) dr \right\}.$$

Далее будут использоваться соотношения (см. [5, 6]):

$$S_h(F \Diamond G) = S_h(F) S_h(G), \quad S_h\left(F^{\Diamond(-1)}\right) = S_h(F)^{-1}, \quad S_h\left(U_0^t\right) = \exp\left\{ i \int_0^t a_9(\tau) h_\tau d\tau \right\},$$

$$S_h(\psi_s) = \left(i \int_0^1 b(\tau) h_\tau d\tau + \int_0^s b(\tau) a_0(\tau) d\tau \right) \exp\left\{ i \int_0^t a_9(\tau) h_\tau d\tau \right\},$$

$$F \Diamond \int_0^1 \xi_s dW_s = \int_0^1 F \Diamond \xi_s dW_s, \quad \xi_s \in L_2(\Omega),$$

$$S_h\left(\int_0^1 F_s df_s \right) = i \int_0^1 S_h(F_s) h_s ds,$$

где

$$h_s \in L_2[0,1], \quad \int_0^1 F f(s) \delta W_s = F \int_0^1 f(s) dW_s - \int_0^1 f(s) D_s F\, ds, \quad F \in L_2(\Omega).$$

Т е о р е м а 3. *Имеет место равенство*

$$U_0^t \Diamond \int_0^t \left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \delta W_s = \left(\int_0^t \left(I_b - \int_s^t a_0(r) b(r) dr \right) \delta W_s - \int_0^t a_0(s) \left(I_b - \int_s^t a_0(r) b(r) dr \right) ds \right) \times$$
$$\times \exp\left\{ \int_0^t a_0(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a_0^2(s) ds \right\}. \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать равенство S-преобразований левой и правой частей (20). Напомним, что

$$\exp\left\{ \int_0^t a_0(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a_0^2(s) ds \right\} = U_0^t.$$

Далее непосредственным вычислением получаем для левой части (20)

$$S_h\left(U_0^t \Diamond \int_0^t \left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \delta W_s \right) = S_h\left(U_0^t\right) S_h\left(\int_0^t \left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \delta W_s \right) =$$
$$= S_h\left(U_0^t\right) S_h\left(\int_0^1 1_{[0,t]}(s) \left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \delta W_s \right) = S_h\left(U_0^t\right) S_h\left(\int_0^1 1_{[0,t]}(s) \left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \delta W_s \right) =$$
$$= i S_h\left(U_0^t\right) \int_0^1 S_h\left(1_{[0,t]}(s) \left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \right) h_s ds = i S_h\left(U_0^t\right) \int_0^t S_h\left(\left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \right) h_s ds =$$
$$= i S_h\left(U_0^t\right) \int_0^t S_h\left(\left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \Diamond \psi_s \right) h_s ds = i S_h\left(U_0^t\right) \int_0^t S_h\left(\left(U_0^s\right)^{\Diamond(-1)} \right) S_h(\psi_s) h_s ds =$$
$$= \exp\left\{ i \int_0^t a_9(\tau) h_\tau d\tau \right\} \left[i \int_0^t \left(\int_0^s b(\tau) a_0(\tau) d\tau \right) h_s ds - \left(\int_0^1 b(\tau) h_\tau d\tau \right) \int_0^t h_\tau d\tau \right]. \tag{21}$$

Для правой части (20) имеем

$$S_h\left(\exp\left\{ \int_0^t a_0(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a_0^2(s) ds \right\} \int_0^t \left(\int_0^1 b(\tau) dW_\tau - \int_s^t a_0(r) b(r) dr \right) \delta W_s \right) -$$
$$- S_h\left(\exp\left\{ \int_0^t a_0(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a_0^2(s) ds \right\} \int_0^t a_0(s) \left(\int_0^1 b(\tau) dW_\tau - \int_s^t a_0(r) b(r) dr \right) ds \right). \tag{22}$$

Вычислим отдельные слагаемые в (22). Используя приведенное выше выражение для $\int_0^1 F f(s) \delta W_s$, получаем

$$\int_0^t\left(\int_0^1 b(\tau)dW_\tau\right)\delta W_s=\int_0^1 b(\tau)dW_\tau\int_0^1 1_{[0,t]}(\tau)dW_\tau-\int_0^t b(\tau)d\tau,$$

и далее

$$S_h\left(\exp\left\{\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds\right\}\left(\int_0^1 b(\tau)dW_\tau\int_0^1 1_{[0,t]}(\tau)dW_\tau-\int_0^t b(\tau)d\tau\right)\right)=$$

$$=E\left[\exp\left\{\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds\right\}\left(\int_0^1 b(\tau)dW_\tau\int_0^1 1_{[0,t]}(\tau)dW_\tau-\int_0^t b(\tau)d\tau\right)\exp\left\{i\int_0^t h_s dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 ds\right\}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\Big|_{\substack{\lambda_1=0\\ \lambda_2=0}} E\left[\exp\left\{\int_0^1\left(1_{[0,t]}(\tau)a_0(\tau)+\lambda_1 b(\tau)+\lambda_2 1_{[0,t]}(\tau)+ih_\tau\right)dW_\tau-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t h_s^2(\tau)d\tau\right\}\right]=$$

$$=\exp\left\{i\int_0^t a_0(\tau)h_\tau d\tau\right\}\left(\int_0^t a_0(\tau)b(\tau)d\tau+\int_0^1 h_\tau b(\tau)d\tau\right)\int_0^t\left(a_0(\tau)+ih_\tau\right)d\tau.$$

Аналогично вычисляем

$$-S_h\left(\exp\left\{\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds\right\}\int_0^t\left(\int_s^t a_0(r)b(r)dr\right)\delta W_s\right)=$$

$$=-\exp\left\{i\int_0^t a_0(\tau)h_\tau d\tau\right\}\left(\int_0^t a_0(\tau)\left(\int_\tau^t a_0(r)b(r)dr\right)d\tau+\int_0^t\left(\int_\tau^t a_0(r)b(r)dr\right)h_\tau d\tau\right)$$

и

$$S_h\left(\exp\left\{\int_0^t a_0(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t a_0^2(s)ds\right\}\int_0^t a_0(s)\left(\int_0^1 b(\tau)dW_\tau\right)ds\right)=$$

$$=-\exp\left\{i\int_0^t a_0(\tau)h_\tau d\tau\right\}\left(\int_0^t a_0(\tau)b(\tau)d\tau+i\int_0^1 h_\tau b(\tau)d\tau\right)\int_0^t a_0(\tau)d\tau.$$

Суммируя полученные выражения, будем иметь для S-преобразования правой части (19) выражение, совпадающее с (20). Теорема 3 доказана.

Из (20) и теоремы 2 следует совпадение решения, найденного с использованием (18), с решением (16).

Численные результаты. Полученные представления решений применяются далее при вычислении моментов решений рассматриваемого здесь класса уравнений Скорохода и при построении приближенных формул для вычисления математических ожиданий некоторых видов нелинейных функционалов от решений.

В качестве тестового примера в скалярном случае рассмотрено уравнение

$$X_t=X_0+\int_0^t(s+\lambda W_1)X_s dW_s,\quad t\in[0,1],\quad X_0=W_1, \tag{23}$$

т. е. при $\sigma_s^0=s,\ b(s)=\lambda,\ g(s)=1;\ \lambda\le 1$ – произвольный параметр.

Решение (23) имеет вид

$$X_t=\exp\left\{f_1(\lambda,t)W_t+f_2(\lambda,t)\int_0^t e^{\lambda s}dW_s+f_3(\lambda,t)W_1+f_4(\lambda,t)W_1\int_0^t e^{\lambda s}dW_s+\right.$$
$$\left.+f_5(\lambda,t)W_1^2+f_6(\lambda,t\right\}\left(f_7(\lambda,t)W_1+f_8(\lambda,t)W\right), \tag{24}$$

где

$$f_1(\lambda,t)=-\frac{1}{\lambda},\quad f_2(\lambda,t)=\left(\frac{1}{\lambda}+t\right)e^{-\lambda t},\quad f_3(\lambda,t)=\frac{1}{2\lambda}-\frac{t}{2}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-2\lambda t},$$

$$f_4(\lambda,t)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad f_5(\lambda,t)=-\frac{\lambda}{4}(1-\mathrm{e}^{-2\lambda t}),$$

$$f_6(\lambda,t)=\frac{3}{4\lambda^3}-\lambda t-\frac{t^2}{4\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\frac{t}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}\right)+\frac{1}{4\lambda}\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)^2\mathrm{e}^{-2\lambda t}, \quad f_7(\lambda,t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

$$f_8(\lambda,t)=-\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{t}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

В этом случае решение представляет собой функцию от трех линейных функционалов от винеровского процесса

$$\left(W_t,\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda s}dW_s, W_1\right),$$

и вычисление моментов решения сводится к вычислению трехкратного интеграла по гауссовскому распределению.

Для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов от решений используем полученную в [2] приближенную формулу, точную для функциональных многочленов третьей степени:

$$E[F(X_{(\cdot)})]\approx F(0)+\sum_{j=1}^{2}A_j\Lambda F(c_jM_{(\cdot)})+0,5\int_{[0,1]^2}M_2(u_1,u_2)d^2_{u_1,u_2}\Delta F\left(1_{[0,\cdot]}(u_1)+1_{[0,\cdot]}(u_2)\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\int_{[0,1]^3}M_3(u_1,u_2,u_3)d^3_{u_1,u_2,u_3}\Lambda F\left(\sum_{j=1}^{3}1_{[0,\cdot]}(u_j)\right),$$

где в правой части стоят кратные интегралы Стилтьеса, A_1, A_2, c_1, c_2 – константы, $\Delta F(x)=0,5\left(F(x)+F(-x)\right)$, $\Lambda F(x)=0,5\left(F(x)-F(-x)\right)$.

Численные результаты рассмотрены при условиях

$$F\left(X_{(\cdot)}\right)=\sin\left(\nu X_t+\frac{\pi}{4}\right), \quad A_1=2^{-1/2}, \quad A_2=2, \quad c_1=2^{1/2}, \quad c_2=1.$$

Аппроксимирующее выражение в этом случае имеет вид

$$J\left(F(X_{(\cdot)})\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}M_2(t,t)\left(\cos(2\nu)-2\cos(\nu)+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{12}M_3(t,t,t)\left(\sin\left(3\nu\right)-3\sin(2\nu)+3\sin(\nu)\right).$$

Сравнение полученных приближенного и точного значений приведено в таблице и на рис. 1.

t	M_2	M_3	Точное значение	Приближенное значение	Относительная погрешность
0,4	2,71335	94,8132	0,6757	0,7033	0,04
0,44	3,00175	93,0241	0,6814	0,7031	0,032
0,48	3,16995	82,7799	0,6834	0,7031	0,029
0,52	3,20577	68,5151	0,6866	0,7033	0,024
0,56	3,20307	53,7748	0,6911	0,7035	0,018
0,6	3,00328	1735,33	0,703	0,679	0,034
0,64	2,74681	1430,92	0,7025	0,6837	0,027
0,68	2,443	1392,03	0,7018	0,6845	0,025
0,72	2,13448	138,933	0,7007	0,7032	0,003
0,76	1,83697	138,403	0,6996	0,7035	0,006
0,8	1,56078	138,934	0,6981	0,7037	0,008
0,84	1,31175	111,806	0,6962	0,7043	0,012
0,88	1,09237	88,9229	0,694	0,7048	0,016
0,9	0,99392	19,448	0,6928	0,706	0,019

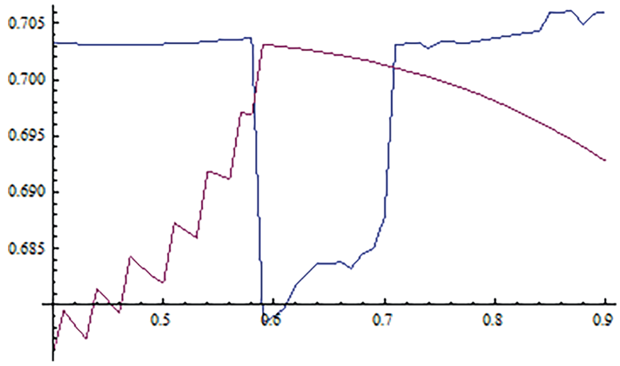
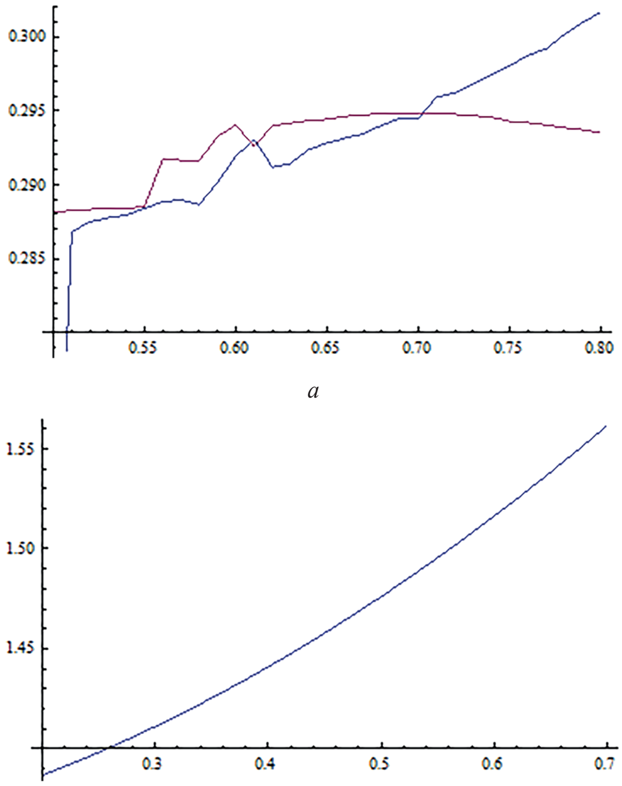


Рис. 1. Сравнение между точным (красный)
и приближенным (голубой) значениями $E[\sin(\nu X_t + \pi/4)]$

Fig. 1. Comparison between the exact (red) and the approximate (blue) values for $E[\sin(\nu X_t + \pi/4)]$



a

b

Рис. 2. Сравнение между точным (голубой) и приближенным (красный) значениями $E\left[\sin\left(\nu\left(X_t^1 - X_t^2\right)\right)\right]$ $(\lambda = 0{,}3, \nu = 0{,}3)$ (*a*) и результаты вычисления $E\left[\sqrt{\left(X_t^1\right)^2 + \left(X_t^2\right)^2}\right]$ (*b*)

Fig. 2. Comparison between the exact blue) and the approximate (red) values $E\left[\sin\left(\nu\left(X_t^1 - X_t^2\right)\right)\right]$ $(\lambda = 0.3, \nu = 0.3)$ (*a*) and the evaluation results for $E\left[\sqrt{\left(X_t^1\right)^2 + \left(X_t^2\right)^2}\right]$ (*b*)

Рассмотрены также тестовые примеры системы (24), в которых, как и в предыдущем примере, $\sigma_s^0 = s$, $b(s) = \lambda$, $x_0^1 = 1$, $g(s) = 1$; $\lambda \le 1$ – произвольный параметр. Численные результаты вычисления математических ожиданий приведены для функционалов

$$F_1\left(X_t^1, X_t^2\right) = \sin\left(\nu\left(X_t^1 - X_t^2\right)\right) \quad \left(\lambda = 0{,}3, \quad \nu = 0{,}3\right),$$

$$F_2\left(X_t^1, X_t^2\right) = \sqrt{\left(X_t^1\right)^2 + \left(X_t^2\right)^2} \qquad (\lambda = 1{,}0).$$

Аппроксимирующее выражение для вычисления $E\left[F_1\left(X_t^1, X_t^2\right)\right]$ имеет вид

$$J\left(F_1\left(X_t^1, X_t^2\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}\nu\right) + 2\sin(\nu) + \frac{1}{6}M_3(t,t,t)\left(\sin(3\nu) - 3\sin(2\nu) + 3\sin(\nu)\right),$$

где

$$M_3(t,t,t) = E\left[\left(X_t^1 - X_t^2\right)^3\right].$$

В рассматриваемых случаях решение представляет собой функцию от четырех линейных функционалов от винеровского процесса

$$W_t, \quad \int_0^t s^2 dW_s, \quad W_1, \quad \int_0^t s dW_s,$$

и вычисление ожиданий решения сводится к вычислению четырехкратных интегралов по гауссовскому распределению. При вычислении $E\left[F_2\left(X_t^1, X_t^2\right)\right]$ и $M_3(t,t,t)$ применение теоремы Гирсанова о замене меры при сдвиге позволяет уменьшить кратность интегралов до трех.

Заметим, что элементы матрицы, задающей распределение данных функционалов при значениях, близких к $t = 0$ и $t = 1$, сильно растут, что приводит к потере точности при вычислении четырехкратных интегралов, поэтому в работе рассматривались ожидания функционалов на интервалах, отстоящих от указанных значений. Результаты вычислений приведены на рис. 2.

Список использованных источников

1. Egorov, A. D. Approximate formulas of the second order of accuracy for expectation of functionals from solution to linear SDE in Skorohod sence / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2019. – Vol. 22, № 3. – P. 292–298.

2. Егоров, А. Д. Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Скорохода / А. Д. Егоров // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 198–205. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205

3. Egorov, A. D. Linear Skorohod SDE: Evaluation of expectations of functionals / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2022. – Vol. 25, № 1. – P. 82–91. https://doi.org/10.33581/1561-4085-2022-25-1-82-91

4. Egorov, A. D. On the calculation of functionals from the solution to linear SDE with first-order chaos in coefficients / A. D. Egorov // Computer Data Analysis and Modeling: Stochastic and Data Science: Proc. of the XIII Int. Conf., Minsk, Sept. 6–10, 2022. – Minsk, 2022. – P. 26–30.

5. Buckdahn, R. Linear stochastic differential equations and Wick products / R. Buckdahn, D. Nualart // Probab. Th. Rel. Fields. – 1994. – Vol. 99, № 4. – P. 501–526. https://doi.org/10.1007/bf01206230

6. Ilchenko, A. V. Cauchy formula for affine SDE with Skorohod integral / A. V. Ilchenko // Statistics, Optim. Inf. Comput. – 2019. – Vol. 7, № 4. – P. 686–694. https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-363

References

1. Egorov A. D., Zherelo A. V. Approximate formulas of the second order of accuracy for expectation of functionals from solution to linear SDE in Skorohod sence. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2019, vol. 22, no. 3, pp. 292–298.

2. Egorov A. D. Approximate formulas for the evaluation of the mathematical expectation of functionals fromthe solution to the linear Skorohod equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 198–205 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205

3. Egorov A. D., Zherelo A. V. Linear Skorohod SDE: Evaluation of expectations of functionals. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2022, vol. 25, no. 1, pp. 82–91. https://doi.org/10.33581/1561-4085-2022-25-1-82-91

4. Egorov A. D. On the calculation of functionals from the solution to linear SDE with first-order chaos in coefficients. *Computer Data Analysis and Modeling: Stochastic and Data Science. Proceedings of the XIII International Conference, Minsk, September, 6–10, 2022*. Minsk, 2022, pp. 26–30.

5. Buckdahn R., Nualart D. Linear stochastic differential equations and Wick products. *Probability Theory and RelatedFields*, 1994, vol. 99, no. 4, pp. 501–526. https://doi.org/10.1007/bf01206230

6. Ilchenko A. V. Cauchy formula for affine SDE with Skorohod integral. *Statistics, Optimization and Information Computing*, 2019, vol. 7, no. 4, pp. 686–694. https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-363

Информация об авторе

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Information about the author

Alexandr D. Egorov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), E-mail: egorov@im.bas-net.by