ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-279-290

Поступила в редакцию 19.01.2023
Received 19.01.2023

М. М. Чуйко[1], О. М. Королёва[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Аннотация. Исследуется устойчивость по начальным данным в равномерной норме неявной разностной схемы, аппроксимирующей нелинейное уравнение переноса. Для реализации разностной схемы использован итерационный процесс. Доказана сходимость итерационного процесса и устойчивость разностной схемы в случае начальных данных, гарантирующих отсутствие ударных волн. В случае возникновения ударных волн получены оценки роста пространственных производных на каждом временном слое. Построен адаптивный вычислительный алгоритм решения уравнения переноса при формировании ударных волн.

Ключевые слова: устойчивость, разностная схема, итерационный процесс, ударная волна

Для цитирования. Чуйко, М. М. Исследование устойчивости неявной разностной схемы для нелинейного уравнения переноса / М. М. Чуйко, О. М. Королёва // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 279–290. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-279-290

Mikhail M. Chuiko[1], Olga M. Korolyova[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

STABILITY INVESTIGATION OF AN IMPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR A NONLINEAR TRANSPORT EQUATION

Abstract. In this paper, we investigate the stability with respect to initial data in the uniform norm of an implicit difference scheme approximating a nonlinear transport equation. An iterative process is used to implement the difference scheme. The convergence of the iterative process and the stability of the difference scheme are proven in the case of initial data guaranteeing the absence of shock waves. In the case of the occurrence of shock waves, estimates of the growth of spatial derivatives at each time layer are obtained. An adaptive computational algorithm for solving the transfer equation during the formation of shock waves is built.

Keywords: stability, difference scheme, iteration process, shock wave

For citation. Chuiko M. M., Korolyova O. M. Stability investigation of an implicit difference scheme for a nonlinear transport equation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 279–290 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-279-290

Введение. При исследовании разностных схем основное внимание уделяется вопросу устойчивости разностного решения относительно малого возмущения входных данных задачи. К настоящему времени наиболее полные результаты получены для вычислительных методов, аппроксимирующих линейные задачи математической физики [1–3]. Принципиальное отличие исследования устойчивости в нелинейном случае заключается в необходимости дополнительного получения априорных оценок для всех производных, входящих в нелинейную часть разностных уравнений. Первые строгие результаты по исследованию устойчивости решений разностных схем для нелинейного уравнения переноса, уравнения Бюргерса и квазилинейного уравнения теплопроводности приведены в работах [4–6]. В [7] исследовалась устойчивость по начальным данным и сходимость в равномерной норме разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений слабосжимаемой жидкости. В [8] и [9] получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностных схем, аппроксимирующих начально-краевые задачи для изоэнтропических дозвуковых и сверхзвуковых течений газа соответственно.

Вопросы устойчивости разностных схем, аппроксимирующих нелинейные гиперболические законы сохранения, рассмотрены в [10]. В [11] доказана устойчивость в норме L_1 схемы Годунова для нелинейных гиперболических систем.

В случае нелинейных неявных разностных схем для их реализации используются итерационные процессы, поэтому при доказательстве устойчивости разностных схем возникает необходимость в исследовании свойств используемого итерационного процесса. В [12] исследовалась устойчивость нелинейных неявных разностных схем для систем уравнений слабосжимаемой жидкости.

В настоящей работе для аппроксимации нелинейного уравнения переноса используется нелинейная неявная разностная схема. Доказана сходимость итерационного процесса к решению разностной задачи со скоростью геометрической прогрессии. Оценки разностного решения и его производных, полученные при исследовании сходимости итерационного процесса, использовались для доказательства устойчивости разностной схемы.

В случае образования ударных волн получены условия на величину временного шага, гарантирующие ограниченность производных решения на каждом временном слое. Доказана устойчивость разностной схемы до момента времени, совпадающего с моментом образования ударной волны.

Постановка задачи. В прямоугольнике $(x,y)\in\bar{Q}_T,\bar{Q}_T=\bar{Q}\times[0,T],\bar{Q}=\{x:0\le x\le l\}$ рассматривается следующая начально-краевая задача для нелинейного уравнений переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le l,\quad u(0,t)=\mu,\quad 0<t\le T,$$

$$0\le u_0(x)\le c_1,\quad u_0(0)=\mu,\quad \mu=\text{const}\ge 0. \tag{2}$$

Если начальные данные $u_0(x)$ являются монотонно неубывающей функцией

$$0\le u_0'(x)\le c_0, \tag{3}$$

то решением начально-краевой задачи является гладкая функция. Нарушение же условия (3) приводит к образованию ударных волн.

Исследование устойчивости разностной схемы. В области $\bar{Q}_T$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau:\bar{\omega}_h=\{x_i:x_i=ih,i=\overline{0,N},hN=l\}$, $\bar{\omega}_\tau=\{t_n:t_n=n\tau,i=\overline{0,N_0},\tau N_0=T\}=\omega_\tau\cup\{0\}$ с постоянными шагами h и τ по пространственной и временной переменной соответственно. Рассмотрим неявную разностную схему

$$y_t+\hat{y}\hat{y}_{\bar{x}}=0, \tag{4}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\bar{\omega}_h,\quad \hat{y}_0=\mu,$$

аппроксимирующую на разностной сетке $\bar{\omega}$ дифференциальную задачу (1). Здесь и далее будем использовать стандартные обозначения теории разностных схем [1]:

$$y=y_i^n=y(x_i,t_n),\ \hat{y}=y_i^{n+1}=y(x_i,t_{n+1}),\ y_{\bar{x},i}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h},\ y_{t,i}=\frac{\hat{y}_i-y_{i-1}}{\tau}.$$

Линеаризуем разностную схему (4) с помощью итерационного процесса

$$\overset{m+1}{y}_{t,i}+\overset{m}{y}_i\,\overset{m+1}{y}_{\bar{x},i}=0,\quad i=\overline{1,N},\quad \overset{m+1}{y}_0=\mu,\quad m=0,1,\dots, \tag{5}$$

$$\overset{0}{y}_i=y_i^n,\quad i=\overline{0,N}.$$

При исследовании устойчивости разностных схем для задачи (1) будем использовать каноническую форму записи двухточечных разностных схем для первой краевой задачи:

$$C_iy_i=A_iy_{i-1}+F_i,\quad i=\overline{i_0+1,i_N},\quad y_{i_0}=\mu_1. \tag{6}$$

Л е м м а. *Пусть выполнены условия* $A_i\ge 0,\ D_i=C_i-A_i>0$. *Тогда для решения задачи* (6) *имеет место априорная оценка*

$$\max_{i_0 \le i \le i_N} |y_i| \le \max\left\{ |\mu_1|, \max_{i_0 < i \le i_N} \frac{|F_i|}{D_i} \right\}.$$

Наряду с задачей (4) рассмотрим возмущенную задачу

$$\tilde{y}_t + \hat{\tilde{y}}\hat{\tilde{y}}_{\bar{x}} = 0, \tag{7}$$

$$\tilde{y}(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad \hat{\tilde{y}}_0 = \mu.$$

Пусть для возмущенных начальных данных $\tilde{u}_0(x)$ выполняются неравенства, аналогичные неравенствам (2), (3).

Вычитая уравнения (4) из соответствующих уравнений (7), получим задачу для возмущений $\delta y_i = \tilde{y}_i - y_i$:

$$\delta y_{t,i} + \hat{y}_i \delta\hat{y}_{\bar{x},i} + \hat{\tilde{y}}_{\bar{x},i}\delta\hat{y}_i = 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{8}$$

$$\delta\hat{y}_0 = 0, \quad \delta y_i^0 = \delta u_i^0, \quad i = \overline{0,N}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие сеточные нормы:

$$\|y_h\|_{C^+} = \max_{1\le i \le N} |y_{h,i}|, \qquad \|y_h\|_{C^-} = \max_{0\le i \le N} |y_{h,i}|.$$

Из вида задачи (8) для возмущений δy_i следует, что для получения априорной оценки устойчивости необходимо исследовать свойства не только приближенного решения $\hat{y}_i$, но и первой производной $\hat{\tilde{y}}_{\bar{x},i}$. Априорные оценки для $\hat{y}_i$, $\hat{\tilde{y}}_{\bar{x},i}$ получим при исследовании сходимости итерационного процесса (5).

Введем следующие обозначения для погрешности итерационного процесса:

$$\Delta \overset{m+1}{y_i} = \overset{m+1}{y_i} - \overset{m}{y_i}.$$

Вычитая из (5) соответствующие уравнения (5), записанные для предыдущей итерации, получим разностную задачу для погрешностей $\Delta \overset{m+1}{y_i}$:

$$\Delta \overset{m+1}{y_i} + \tau \overset{m}{y_i} \Delta \overset{m+1}{y}_{\bar{x},i} + \tau \overset{m}{y}_{\bar{x},i} \Delta \overset{m}{y_i} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \quad \Delta \overset{m+1}{y_0} = 0. \tag{9}$$

Из вида задачи (9) для погрешностей итерационного процесса следует необходимость получения оценок для $\overset{m}{y_i}$ и производной $\overset{m}{y}_{\bar{x},i}$. При получении указанных оценок будем использовать метод математической индукции. Пусть на n-м временном слое выполняются условия

$$y_i^n \ge 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{10}$$

$$0 \le y_{\bar{x},i}^n \le c_0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{11}$$

Так как

$$y_{\bar{x},i}^0 = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u_0'(x)dx, \quad i = \overline{1,N},$$

то из условий на начальные данные следует выполнение условий (10), (11) при $n = 0$:

$$y_i^0 \ge 0, \quad i = \overline{1,N}, \tag{12}$$

$$0 \le y_{\bar{x},i}^0 \le c_0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{13}$$

Выполнение условий вида (10), (11) на $(n + 1)$-м временном слое будет показано после исследования сходимости итерационного процесса.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено условие* (10). *Тогда для решения разностной задачи* (4) *имеют место оценки*

$$\left\|\overset{m}{y}\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^n\right\|_{\bar{C}}, \quad \overset{m}{y}_i \ge 0, \quad i=\overline{0,N}, \quad m=0,1,\dots\,. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разностную задачу (5) запишем в каноническом виде

$$\overset{m}{C}_{y,i}\,\overset{m+1}{y}_i = \overset{m}{A}_{y,i}\,\overset{m+1}{y}_{i-1} + \overset{m}{F}_{y,i}, \quad i=\overline{1,N}, \quad \overset{m+1}{y}_0 = \mu_1,$$

где

$$\overset{m}{A}_{y,i} = \gamma\,\overset{m}{y}_i, \quad \overset{m}{C}_{y,i} = 1+\overset{m}{A}_{y,i}, \quad \overset{m}{F}_{y,i} = y_i^n, \quad \gamma = \tau/h.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Из условия (10) следует, что $\overset{0}{y}_i = y_i^n \ge 0$. Тогда на первом шаге итерационного процесса имеем: $\overset{0}{A}_{y,i} = \gamma\,\overset{0}{y}_i \ge 0$, $\overset{0}{C}_{y,i} = 1+\overset{0}{A}_{y,i} > 0$, $\overset{0}{F}_{y,i} = y_i^n$. На основании леммы получаем, что $\left\|\overset{1}{y}\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^n\right\|_{\bar{C}}$, а в силу неотрицательности коэффициентов разностной схемы $\overset{1}{y}_i \ge 0$, $i=\overline{0,N}$.

Предположим, что на m-й итерации выполнено условие $\overset{m}{y}_i \ge 0$, $i=\overline{0,N}$. Из предположения индукции следует, что $\overset{m}{A}_{y,i} = \gamma\,\overset{m}{y}_i \ge 0$, $\overset{m}{C}_{y,i} = 1+\overset{m}{A}_{y,i} > 0$. Таким образом, выполнены условия леммы и имеет место неравенство $\left\|\overset{m+1}{y}\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^n\right\|_{\bar{C}}$, а в силу неотрицательности коэффициентов разностной схемы $\overset{1}{y}_i \ge 0$, $i=\overline{0,N}$. Теорема доказана.

Оценим разностные производные $\overset{m}{y}_{\bar{x},i}$. Продифференцируем первое уравнение (5) по $\bar{x}$ и, введя обозначение $\overset{m}{\xi} = \overset{m}{y}_{\bar{x}}$, получим

$$\overset{m+1}{\xi}_{t,i} + \left(\overset{m}{y}\,\overset{m+1}{\xi}\right)_{\bar{x},i} = 0, \quad i=\overline{2,N}. \tag{15}$$

Рассматривая первое уравнение (5) при $i = 1$, с учетом краевого условия $\overset{m+1}{y}_0 = \mu = \text{const}$ получим граничное условие для (15):

$$\overset{m+1}{\xi}_{t,1} = -h^{-1}\,\overset{m}{y}_1\,\overset{m+1}{\xi}_1\,. \tag{16}$$

Начальные приближения $\overset{0}{\xi}_i = y_{\bar{x},i}^n$ с учетом (11) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 \le \overset{0}{\xi}_i \le c_0, \quad i=\overline{1,N}. \tag{17}$$

Разностную схему (15), (16) запишем в каноническом виде

$$\overset{m}{C}_{\xi,i}\,\overset{m+1}{\xi}_i = \overset{m}{A}_{\xi,i}\,\overset{m+1}{\xi}_{i-1} + \overset{m}{F}_{\xi,i}, \quad i=\overline{2,N}, \quad \overset{m+1}{\xi}_1 = \frac{\xi_1^n}{1+\gamma\,\overset{m}{y}_1}, \tag{18}$$

где

$$\overset{m}{A}_{\xi,i} = \gamma\,\overset{m}{y}_{i-1}, \quad \overset{m}{C}_{\xi,i} = 1+\gamma\overset{m}{y}_i, \quad \overset{m}{F}_{\xi,i} = \xi_i^n.$$

Имеет место

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* (10), (11). *Тогда для производных решения разностной задачи* (5) *имеет место оценка*

$$\left\|\overset{m}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+} \le \left\|y_{\bar{x}}^n\right\|_{C^+} \le c_0, \quad m=0,1,\dots\,. \tag{19}$$

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 1 было показано, что $\overset{m}{y}_i \ge 0,\ i=\overline{0,N},\ m=0,1,\dots$. Отсюда следует, что $\overset{m}{A}_{\xi,i} \ge 0$. На первом шаге итерационного процесса с учетом (11) имеем $\overset{0}{A}_{\xi,i} \ge 0,\ \ \overset{0}{D}_{\xi,i} = \overset{0}{C}_{\xi,i} - \overset{0}{A}_{\xi,i} = 1+\tau \overset{0}{y}_{\bar{x},i} \ge 1.$ На основании леммы получаем, что

$$\left\|\overset{1}{\xi}\right\|_{C^+} \le \max\left\{ \frac{\left|\xi_1^n\right|}{1+\gamma \overset{0}{y}_1},\ \max_{2\le i\le N} \frac{\left|\xi_i^n\right|}{1+\tau \overset{0}{y}_{\bar{x},i}} \right\} \le \left\|\xi^n\right\|_{C^+}.$$

Так как из условий (17) имеем $\overset{0}{\xi}_i \ge 0,\ i=\overline{1,N},$ то из схемы бегущего счета (18) получим

$$\overset{1}{\xi}_1 = \frac{\overset{0}{\xi}_1}{1+\gamma \overset{0}{y}_1} \ge 0, \qquad \overset{1}{\xi}_i = \frac{\gamma \overset{0}{y}_{i-1} \overset{1}{\xi}_{i-1} + \overset{0}{\xi}_i}{1+\gamma \overset{0}{y}_i} \ge 0, \qquad i=\overline{2,N}.$$

Предположим, что на m-й итерации выполнены условия $\overset{m}{\xi}_i \ge 0,\ i=\overline{1,N}$. Из предположения индукции следует, что коэффициенты $\overset{m}{A}_{\xi,i} \ge 0,\ \ \overset{m}{D}_{\xi,i} = \overset{m}{C}_{\xi,i} - \overset{m}{A}_{\xi,i} = 1+\tau \overset{m}{y}_{\bar{x},i} \ge 1,$ и можно показать, что на $(m+1)$-й итерации $\overset{m+1}{\xi}_i \ge 0$ и для производных решения справедливы оценки

$$\left\|\overset{m+1}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+} = \left\|\overset{m+1}{\xi}\right\|_{C^+} \le \left\|\xi^n\right\|_{C^+} \le c_0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (10), (11). *Тогда для погрешности итерационного процесса имеет место неравенство*

$$\left\|\Delta \overset{m+1}{y}\right\|_{\bar{C}} \le q \left\|\Delta y^n\right\|_{\bar{C}}, \tag{20}$$

где $q=\tau c_0$.

Доказательство. Разностную задачу (9) для погрешностей $\Delta \overset{m+1}{y}_i$ запишем в каноническом виде

$$\overset{m}{C}_{\Delta,i} \Delta\overset{m+1}{y}_i = \overset{m}{A}_{\Delta,i} \Delta\overset{m+1}{y}_{i-1} + \overset{m}{F}_{\Delta,i}, \quad i=\overline{1,N}, \quad \Delta\overset{m+1}{y}_0 = 0, \tag{21}$$

где

$$\overset{m}{A}_{\Delta,i} = \gamma \overset{m}{y}_i, \quad \overset{m}{C}_{\Delta,i} = 1+\overset{m}{A}_{\Delta,i}, \quad \overset{m}{F}_{\Delta\xi,i} = -\tau \overset{m}{y}_{\bar{x},i} \Delta \overset{m}{y}_i.$$

Так как для коэффициентов разностной задачи (21) выполняются условия леммы, то с учетом полученной оценки (19) для производных решения имеем следующие оценки для погрешностей:

$$\left\|\Delta \overset{m+1}{y}\right\|_{\bar{C}} = \left\|\Delta \overset{m+1}{y}\right\|_{C^+} \le \tau \left\|\overset{m}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+} \left\|\Delta \overset{m}{y}\right\|_{C^+} \le \tau c_0 \left\|\Delta \overset{m}{y}\right\|_{C^+} = \tau c_0 \left\|\Delta \overset{m}{y}\right\|_{\bar{C}}. \tag{22}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим множество упорядоченных групп из $N+1$ действительных чисел $\overset{m}{\vec{y}} = \left(\overset{m}{y}_0, \overset{m}{y}_1, \dots, \overset{m}{y}_N\right)$ с расстоянием $\rho\left(\overset{m+1}{\vec{y}}, \overset{m}{\vec{y}}\right) = \max_{0\le i\le N}\left|\overset{m+1}{y}_i - \overset{m}{y}_i\right| = \left\|\Delta \overset{m+1}{y}\right\|_{\bar{C}}$, образующих полное метрическое пространство R^{N+1}, в котором любая фундаментальная последовательность сходится.

О п р е д е л е н и е. Последовательность $\left\{\overset{m}{\vec{y}}\right\}$ точек метрического пространства R^{N+1} является фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое M_ε, что $\rho\left(\overset{m}{\vec{y}}, \overset{m+p}{\vec{y}}\right) < \varepsilon$ для всех $m > M_\varepsilon$ и любых натуральных p.

Покажем, что последовательность итераций $\left\{\overset{m}{\vec{y}}_h\right\}$ является фундаментальной. Из теоремы 3 следует, что

$$\left\|\Delta \overset{m+1}{y}\right\|_{\bar{C}} \le q\left\|\Delta \overset{m}{y}\right\|_{\bar{C}} \le \ldots \le q^m \left\|\Delta \overset{1}{y}\right\|_{\bar{C}}.$$

Тогда

$$\rho\left(\overset{m}{\vec{y}}, \overset{m+p}{\vec{y}}\right) = \left\|\overset{m}{y} - \overset{m+p}{y}\right\|_{\bar{C}} = \max_{0\le i\le N}\left|\overset{m}{y}_i - \overset{m+1}{y}_i + \overset{m+1}{y}_i - \overset{m+2}{y}_i + \cdots + \overset{m+p-1}{y_i} - \overset{m+p}{y_i}\right| \le \left\|\Delta \overset{m+1}{y}\right\|_{\bar{C}} + \left\|\Delta \overset{m+2}{y}\right\|_{\bar{C}} + \cdots + \left\|\Delta \overset{m+p}{y}\right\|_{\bar{C}}.$$

Выберем $\tau < \tau_0 = c_0^{-1}$, тогда $q < 1$ и

$$\rho\left(\overset{m}{\vec{y}}, \overset{m+p}{\vec{y}}\right) \le \left(q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{m+p-1}\right)\left\|\Delta \overset{1}{y}\right\|_{\bar{C}} \le q^m (1 + q + \ldots + q^{p-1} + \ldots)\left\|\Delta \overset{1}{y}\right\|_{\bar{C}} \le \frac{q^m}{1-q}\left\|\Delta \overset{1}{y}\right\|_{\bar{C}}.$$

Так как из теоремы 1 следует, что $\left\|\overset{1}{y}\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^n\right\|_{\bar{C}}$, то с учетом условия (10) имеем

$$\left\|\overset{m}{y} - \overset{m+p}{y}\right\|_{\bar{C}} \le \frac{q^m}{1-q}\left\|y^n\right\|_{\bar{C}} \le \frac{q^m}{1-q} c_1. \tag{23}$$

Следовательно, последовательность $\left\{\overset{m}{\vec{y}}_h\right\}$ является фундаментальной, и в силу полноты пространства R^{N+1} существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \overset{m}{y}_i = y_i^{n+1}, \quad i = \overline{0, N}; \qquad \lim_{m\to\infty} \overset{m}{\vec{y}} = (\vec{y})^{n+1} = \left(y_0^{n+1}, y_1^{n+1}, \ldots, y_N^{n+1}\right).$$

Переходя в (23) к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\left\|\overset{m}{y} - y^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \le c_1 \frac{q^m}{1-q}.$$

Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 4. *Если при $t = t_n$ выполнены условия* (10), (11), *то при* $\tau < \tau_0 = c_0^{-1}$ *итерационный процесс* (5) *сходится к решению разностной задачи* (4) *на* (n + 1)*-м слое и имеет место оценка*

$$\left\|\overset{m}{y} - y^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \le c_1 \frac{q^m}{1-q}.$$

Покажем выполнение условий вида (10), (11) на (n + 1)-м слое. Перейдя в (14) и (19) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\left\|y^{n+1}\right\|_{\bar{C}} \le \left\|y^n\right\|_{\bar{C}}, \tag{24}$$

$$\left\|y_{\bar{x}}^{n+1}\right\|_{C^+} \le \left\|y_{\bar{x}}^{n}\right\|_{C^+}. \tag{25}$$

Из неравенств (11) и (25) имеем

$$\left\| y_{\bar{x}}^{n+1} \right\|_{C^+} \le \left\| y_{\bar{x}}^{n} \right\|_{C^+} \le c_0.$$

В силу выполнения неравенств $y_{\bar{x},i}^{n+1} \ge 0,\ i = \overline{1,N}$ получаем

$$0 \le y_{\bar{x}}^{n+1} \le \left\| y_{\bar{x}}^{n+1} \right\|_{C^+} \le c_0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Таким образом, для решения разностной задачи (4) на $(n+1)$-м временном слое имеют место следующие оценки:

$$0 \le y_i^{n+1} \le c_1, \quad i = \overline{0,N}, \tag{26}$$

$$0 \le y_{\bar{x},i}^{n+1} \le c_0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{27}$$

Применяя при исследовании итерационного процесса

$$\overset{m+1}{\tilde{y}}_{t,i} + \overset{m}{\tilde{y}}_i \overset{m+1}{\tilde{y}}_{\bar{x},i} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \quad \overset{m+1}{\tilde{y}}_0 = \mu, \quad m = 0,1,\ldots, \tag{28}$$

$$\overset{0}{\tilde{y}}_i = \tilde{y}_i^n, \quad i = \overline{0,N},$$

для возмущенной задачи (7) выкладки, приведенные выше, можно доказать его сходимость и получить следующие априорные оценки для решения $\tilde{y}^{n+1}$ и разностных производных $\tilde{y}_{\bar{x}}^{n+1}$:

$$0 \le \tilde{y}_i^{n+1} \le c_1, \quad i = \overline{0,N}, \tag{29}$$

$$0 \le \tilde{y}_{\bar{x},i}^{n+1} \le c_0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{30}$$

Полученные в ходе доказательства сходимости итерационного процесса оценки (26) для решения y^{n+1} и оценки (30) для разностных производных $\tilde{y}_{\bar{x}}^{n+1}$ будем использовать при доказательстве устойчивости разностной схемы (4).

Запишем задачу для возмущений (8) в канонической форме

$$C_{\delta,i}^n \delta y_i^{n+1} = A_{\delta,i}^n \delta y_{i-1}^{n+1} + F_{\delta,i}^n, \quad i = \overline{1,N}, \quad \delta y_0^{n+1} = 0, \tag{31}$$

где

$$A_{\delta,i}^n = \gamma y_i^{n+1}, \quad C_{\delta,i}^n = 1 + \gamma y_i^{n+1} + \tau \tilde{y}_{\bar{x},i}^{n+1}, \quad F_{\delta,i}^n = \delta y_i^n.$$

Для коэффициентов разностной схемы (31) выполняются условия леммы, и для возмущений имеем следующую оценку:

$$\left\| \delta y^{n+1} \right\|_{\bar{C}} = \left\| \delta y^{n+1} \right\|_{C^+} \le \left\| \frac{\delta y^n}{1 + \tau \tilde{y}_{\bar{x}}^{n+1}} \right\|_{C^+} \le \left\| \delta y^n \right\|_{\bar{C}}.$$

Последовательно применяя данное неравенство, получим

$$\left\| \tilde{y}^{n+1} - y^{n+1} \right\|_{\bar{C}} \le \ldots \le \left\| \tilde{y}^0 - y^0 \right\|_{\bar{C}} = \left\| \delta u_0 \right\|_{\bar{C}}.$$

Следовательно, имеет место

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (3). *Тогда при достаточно малых* $\tau < \tau_0 = c_0^{-1}$ *разностная схема* (4) *устойчива по начальным данным, и для ее решения справедлива оценка*

$$\left\| \tilde{y}^{n+1} - y^{n+1} \right\|_{\bar{C}} \le \left\| \delta u_0 \right\|_{\bar{C}}. \tag{32}$$

Таким образом, доказана устойчивость разностной схемы (4) для конечного момента времени T при выполнении условия (3), предполагающего отсутствие в процессе счета ударных волн.

Однако вне зависимости от гладкости входных данных нелинейность исходного уравнения может порождать возникновение ударных волн [13]. Поэтому интерес представляет анализ устойчивости разностной схемы (4) без указанных выше предположений (3) на производные начальных данных.

Устойчивость разностной схемы в случае образования ударных волн. В этом случае не определен как знак производной начальных данных $u_0'(x)$, так и знаки разностных производных решения $y_{\bar{x}}^n$. Рассмотрим итерационный процесс (5). Пусть $1-\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}>0.$ Тогда на первой итерации имеем

$$1+\tau\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\ge 1-\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}=1-Q_0>0,\quad i=\overline{1,N},\quad Q_0=\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}=\tau\left\|y_{\bar{x}}^n\right\|_{C^+}.$$

Следовательно, для коэффициентов разностной задачи (18) выполнены условия леммы, и для первых производных $\overset{1}{y}_{\bar{x}}$ решения разностной схемы (5) имеют место оценки

$$\left\|\overset{1}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}\le\max\left\{\frac{\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},1}\right|}{1+\gamma\overset{0}{y}_1},\max_{2\le i\le N}\frac{\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right|}{1+\tau\overset{0}{y}_{\bar{x},i}}\right\}\le\max\left\{\frac{\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},1}\right|}{1+\tau\overset{0}{y}_{\bar{x},1}},\max_{2\le i\le N}\frac{\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right|}{1+\tau\overset{0}{y}_{\bar{x},i}}\right\}\le\max_{1\le i\le N}\frac{\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right|}{1-\tau\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right|}\le\frac{\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}{1-\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}$$

или

$$\tau\left\|\overset{1}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}\le\frac{\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}{1-\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}=\frac{Q_0}{1-Q_0}=Q_1.$$

Пусть $1-Q_1>0$, тогда

$$1+\tau\overset{1}{y}_{\bar{x},i}\ge 1-\tau\left\|\overset{1}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}\ge 1-Q_1>0$$

и

$$\tau\left\|\overset{2}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}\le\tau\max\left\{\frac{\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},1}\right|}{1+\tau\overset{1}{y}_{\bar{x},1}},\max_{2\le i\le N}\frac{\left|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right|}{1+\tau\overset{1}{y}_{\bar{x},i}}\right\}\le\frac{\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}{1-\tau\left\|\overset{1}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}=\frac{Q_0}{1-Q_1}=Q_2.$$

Таким образом, можно показать выполнение неравенств

$$\tau\left\|\overset{m}{y}_{\bar{x}}\right\|_{C^+}\le\frac{\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}{1-\tau\left\|\overset{m-1}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}}=\frac{Q_0}{1-Q_{m-1}}=Q_m,\quad m=0,1,\ldots,\tag{33}$$

при условии, что $1-Q_s>0$, $s=\overline{0,m}.$ Здесь последовательность оценок Q_m для $\tau\left\|\overset{m}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+}$ задается с помощью рекуррентных соотношений

$$Q_0=\tau\left\|\overset{0}{y}_{\bar{x},i}\right\|_{C^+},\quad Q_m=\frac{Q_0}{1-Q_{m-1}},\quad m=1,2,\ldots,$$

и является последовательностью подходящих дробей [14] для непрерывной (цепной) дроби

$$Q_\infty = \cfrac{Q_0}{1-\cfrac{Q_0}{1-\cfrac{Q_0}{1-\ddots}}}. \tag{34}$$

Исследуем свойства числовой последовательности Q_m и получим условия на Q_0, при которых $1-Q_m>0,\ m=1,2,\dots$. Значение бесконечной непрерывной дроби (34) является решением квадратного уравнения $Q_\infty^2-Q_\infty+Q_0=0$, которое при $0 < Q_0 \le 0{,}25$ имеет действительные корни $Q_\infty = 0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-Q_0}$.

Так как при $1 - Q_0 > 0$

$$\Delta Q_1 = Q_1 - Q_0 = \frac{Q_0^2}{1-Q_0} > 0$$

и

$$\Delta Q_m = Q_m - Q_{m-1} = \frac{Q_0 \Delta Q_{m-1}}{(1-Q_{m-1})(1-Q_{m-2})}, \quad m = 2,3,\dots,$$

то $\Delta Q_m > 0$ при $1-Q_s>0,\ s=\overline{0,m}$. Пусть

$$Q_0^* = 0{,}25, \quad Q_m^* = \frac{Q_0^*}{1-Q_{m-1}^*}, \quad m=1,2,\dots,$$

тогда

$$0<Q_0\le Q_0^*=0{,}25, \quad Q_m=\frac{Q_0}{1-Q_{m-1}}\le\frac{Q_0^*}{1-Q_{m-1}^*}=Q_m^*, \quad m=1,2,\dots, \quad Q_\infty \le Q_\infty^* = 0{,}5.$$

Следовательно, если $0 < Q_0 \le 0{,}25$, то последовательность Q_m является монотонно возрастающей (рис. 1, *a*):

$$0<Q_0<Q_1<\dots<Q_\infty=0{,}5-\sqrt{0{,}25-Q_0},$$

откуда следует выполнение неравенств $0<1-Q_m<1,\ m=0,1,2,\dots$. При $Q_0 > 0{,}25$ последовательность Q_m не является монотонной (рис. 1, *b*).

Более общий результат сходимости для непрерывных дробей известен как критерий Ворпицкого [15]: непрерывная дробь общего вида с комплексными элементами

$$\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\ddots}}$$

сходится, если $|a_m|\le 1/4$ при всех $m=1,2,\dots,$ и в этом случае все подходящие дроби $|Q_m|\le 1/2$.

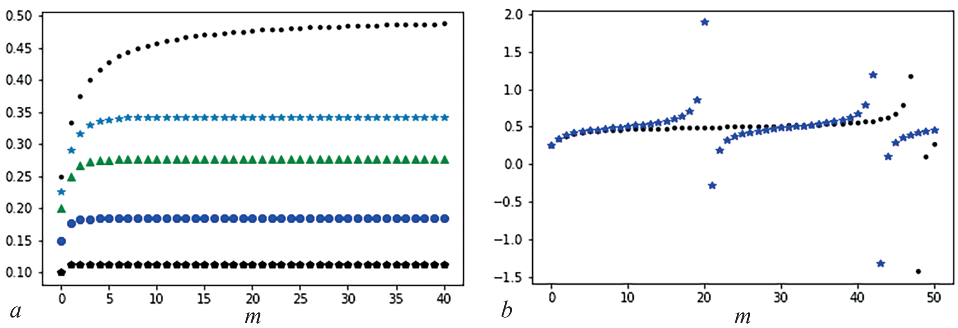

Рис. 1. Последовательности Q_m: *a* – для Q_0 = 0,1, 0,15, 0,2, 0,225, 0,25; *b* – для Q_0 = 0,251, 0,255

Fig. 1. Sequences Q_m: *a* – for Q_0 = 0.1, 0.15, 0.2, 0.225, 0.25; *b* – for Q_0 = 0.251, 0.255

В случае нарушения предположений (3) на производные начальных данных (случай образования ударных волн) имеется возможность построения адаптивных вычислительных алгоритмов, ограничивающих на каждом временном шаге рост пространственной производной решения. При этом величина временного шага выбирается из условия $Q^n = \tau_n \left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+} = \tau_0 \left\| y_{\bar{x}}^0 \right\|_{C^+} = Q^0$.

Переходя в (33) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\left\| y_{\bar{x}}^{n+1} \right\|_{C^+} \le \alpha \left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+}, \quad \alpha = \frac{1}{0,5+\sqrt{0,25-Q^0}}.$$

Выберем временные шаги τ_n из условия

$$\tau_0 = \frac{Q^0}{\left\| y_{\bar{x}}^0 \right\|_{C^+}}, \quad \tau_{n+1} = \alpha \tau_n, \quad n = 0,1,\dots .$$

Последовательность временных шагов τ_n образует бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой

$$t(Q^0) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(0,5+\sqrt{0,25-Q^0}\right)^n = \frac{\tau_0}{0,5-\sqrt{0,25-Q^0}} = \left(0,5+\sqrt{0,25-Q^0}\right) \left\| y_{\bar{x}}^0 \right\|_{C^+}^{-1}.$$

При $Q_0 \to 0$ время $t(Q^0) \to t_\infty = \left\| y_{\bar{x}}^0 \right\|_{C^+}^{-1}$, где t_∞ – момент образования ударной волны.

Для возмущений имеем следующую оценку:

$$\left\| \delta y^{n+1} \right\|_{\bar{C}} = \left\| \delta y^{n+1} \right\|_{C^+} \le \left\| \frac{\delta y^n}{1+\tau_{n+1} \tilde{y}_{\bar{x}}^{n+1}} \right\|_{C^+} \le \frac{\left\| \delta y^n \right\|_{\bar{C}}}{1-\tau_{n+1} \left\| \tilde{y}_{\bar{x}}^{n+1} \right\|_{C^+}} \le \left\| \delta y^n \right\|_{\bar{C}}.$$

Таким образом, при нарушении условия (3) разностная схема (4) устойчива по начальным данным при достаточно малых $\tau_n \le Q^0 \left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+}^{-1}$ до момента времени $t < t_\infty = \left\| y_{\bar{x}}^0 \right\|_{C^+}^{-1}$, и для ее решения справедлива оценка $\left\| \tilde{y}^{n+1} - y^{n+1} \right\|_{\bar{C}} \le \left\| \delta u_0 \right\|_{\bar{C}}$.

На рис. 2, *a* представлено решение начально-краевой задачи (1)–(3) с начальными данными $u_0(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le 1,$ и краевым условием $u(0,t) = 1$ с временными шагами, адаптирующимися к величинам пространственных производных (рис. 2, *b*). Так как $u_0'(x) = -1 < 0,$ то в момент времени $t_\infty = 1/\max\left|u_0'\right| = 1$ образуется ударная волна. Начальный временной шаг $\tau_0 = 0,1$, шаг по пространственной переменной $h = 0,0001$. На $(n+1)$-м временном слое величина шага определя-

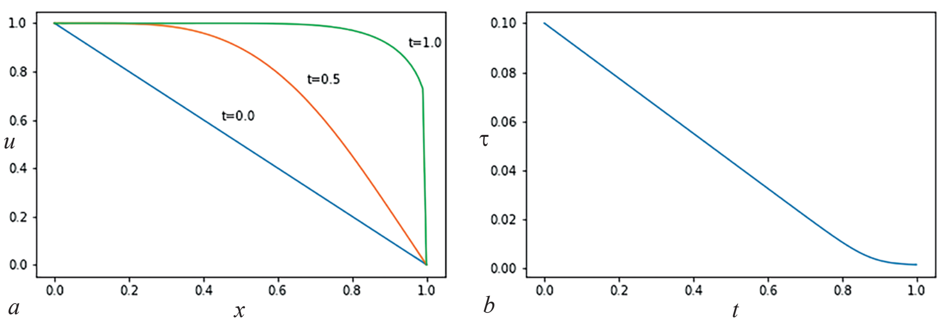

Рис. 2. Результаты применения вычислительного алгоритма:
a – решение для моментов времени $t = 0,0,\ 0,5,\ 1,0$; *b* – адаптация временного шага τ к величине $\left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+}$

Fig. 2. The results of the computational algorithm:
a – solution at $t = 0.0, 0.5, 1.0$; *b* – time step τ adaptation to value $\left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+}$

лась по величине пространственных производных на предыдущем слое $\tau_{n+1} = Q^0 \left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+}^{-1}$. Выбор параметра $Q^0 = 0{,}1$ приводит к ограничению роста пространственных производных решения на каждом временном слое

$$\left\| y_{\bar{x}}^{n+1} \right\|_{C^+} \le \frac{\left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+}}{0{,}5 + \sqrt{0{,}25 - Q^0}} \approx 1{,}127 \left\| y_{\bar{x}}^n \right\|_{C^+}.$$

Заключение. Исследована устойчивость по начальным данным неявной разностной схемы, аппроксимирующей нелинейное уравнение переноса. В силу нелинейности разностной схемы для ее реализации использован итерационный процесс. Оценки разностного решения и его производных, полученные при исследовании сходимости итерационного процесса, использованы для исследования устойчивости разностной схемы. В случае возникновения ударных волн получены оценки роста пространственных производных на каждом временном слое. Построен алгоритм решения с временными шагами, зависящими от величины пространственных производных решения.

Список использованных источников

1. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1997. – 380 с.

2. Thomée, V. Stability theory for partial difference operators / V. Thomée // SIAM Rev. – 1969. – Vol. 11, № 2. – P. 152–195. https://doi.org/10.1137/1011033

3. Tadmor, E. Stability analysis of finite-difference, pseudospectral and Fourier-Galerkin approximations for time-dependent problems / E. Tadmor // SIAM Rev. – 1987. – Vol. 29, № 4. – P. 525–555. https://doi.org/10.1137/1029110

4. Matus, P. Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. – 2003. – Vol. 3, № 2. – P. 313–329. https://doi.org/10.2478/cmam-2003-0020

5. Матус, П. П. Об устойчивости монотонной разностной схемы для уравнения Бюргерса / П. П. Матус, Г. Л. Марцинкевич // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 955–960.

6. Zhang, Q. The pointwise estimates of a conservative difference scheme for Burgers' equation / Q. Zhang, X. Wang, Z. Z. Sun // Numer. Methods Partial Diff. Equat. – 2020. – Vol. 36, № 6. – P. 1611–1628. https://doi.org/10.1002/num.22494

7. Matus, P. Stability of the difference schemes for the equations of weakly compressible liquid / P. Matus, O. Korolyova, M. Chuiko // Comput. Meth. Appl. Math. – 2007. – Vol. 7, № 3. – P. 208–220. https://doi.org/10.2478/cmam-2007-0012

8. Матус, П. П. Исследование устойчивости и сходимости разностных схем для политропного газа с дозвуковыми течениями / П. П. Матус, М. М. Чуйко // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 7. – С. 1053–1064.

9. Matus, P. Nonlinear stability of the difference schemes for equations of isentropic gas dynamics / P. Matus, A. Kolodynska // Comput. Meth. Appl. Math. – 2008. – Vol. 8, № 2. – P. 155–170. https://doi.org/10.2478/cmam-2008-0011

10. Tadmor, E. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems / E. Tadmor // Acta Numer. – 2003. – Vol. 12. – P. 451–512 https://doi.org/10.1017/S0962492902000156

11. Bressan, A. On the convergence of Godunov scheme for nonlinear hyperbolic systems / A. Bressan, H. K. Jensen // Chin. Ann. Math. – 2000. – Vol. 21, № 3. – P. 269–284. https://doi.org/10.1142/S0252959900000303

12. Королёва, О. М. Исследование устойчивости неявных разностных схем для уравнений слабосжимаемой жидкости / О. М. Королёва, М. М. Чуйко, Н. В. Денисенко. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 35–42.

13. Годунов, С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. – М.: Наука, 1971. – 392 с.

14. Джоунс, У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

15. Beardon, A. F. Worpitzky's Theorem on continued fractions / A. F. Beardon // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. 131. – P. 143–148. https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00318-6

References

1. Samarskii A. A. *Theory of Difference Schemes*. New York, Marcel Deccer Inc., 2001. 761 p. https://doi.org/10.1201/9780203908518

2. Thomée V. Stability theory for partial difference operators. *SIAM Review*, 1969, vol. 11, no. 2, pp. 152–195. https://doi.org/10.1137/1011033

3. Tadmor E. Stability analysis of finite-difference, pseudospectral and Fourier-Galerkin approximations for time-dependent problems. *SIAM Review*, 1987, vol. 29, no. 4, pp. 525–555. https://doi.org/10.1137/1029110

4. Matus P. Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2003, vol. 3, no. 2, pp. 313–329. https://doi.org/10.2478/cmam-2003-0020

5. Matus P. P., Marcinkiewicz G. L. On the stability of a monotone difference scheme for the Burgers equation. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 7, pp. 1003–1009. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0241-z

6. Zhang Q., Wang X., Sun Z. Z. The pointwise estimates of a conservative difference scheme for Burgers' equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2020, vol. 36, no. 6, pp. 1611–1628. https://doi.org/10.1002/num.22494

7. Matus P., Korolyova O., Chuiko M. Stability of the difference schemes for the equations of weakly compressible liquid. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2007, vol. 7, no. 3, pp. 208–220. https://doi.org/10.2478/cmam-2007-0012

8. Matus P. P., Chuiko M. M. Investigation of the stability and convergence of difference schemes for a polytropic gas with subsonic flows. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 7, pp. 1074–1085. https://doi.org/10.1134/S0012266109070143

9. Matus P., Kolodynska A. Nonlinear stability of the difference schemes for equations of isentropic gas dynamics. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2008, vol. 8, no. 2, pp. 155–170. https://doi.org/10.2478/cmam-2008-0011

10. Tadmor E. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems. *Acta Numerica*, 2003, vol. 12, pp. 451–512 https://doi.org/10.1017/S0962492902000156

11. Bressan A., Jensen H. K. On the convergence of Godunov scheme for nonlinear hyperbolic systems. *Chinese Annals of Mathematics*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 269–284. https://doi.org/10.1142/S0252959900000303

12. Korolyova O. M., Chuiko M. M., Denisenko N. V. Stability investigation of implicit difference schemes for equations of weakly compressible liquid. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 4, pp. 35–42 (in Russian).

13. Godunov S. K. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 391 p. (in Russian).

14. Jones W. B., Thron W. J. *Continued Fraction. Analitical Theory and Application*. Addison-Wesley Publishing Company, 1980. 428 p.

15. Beardon A. F. Worpitzky's Theorem on continued fractions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2001, vol. 131, no. 1–2, pp. 143–148. https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00318-6

Информация об авторах

Чуйко Михаил Матвеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительной математики, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mikhail.chuiko@gmail.com

Королёва Ольга Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korolyovaola@gmail.com

Information about the authors

Mikhail M. Chuiko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mikhail.chuiko@gmail.com

Olga M. Korolyova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezalezhnosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korolyovaola@gmail.com