ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-7-14

Поступила в редакцию 01.02.2024
Received 01.02.2024

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

РЕАЛИЗАЦИЯ АСИНХРОННОГО РЕЖИМА В ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ЛЕВЫМ НИЖНИМ БЛОКОМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с периодической матрицей коэффициентов и программным управлением. Матрица при управлении постоянная, прямоугольная (число столбцов не превосходит числа строк), и ее ранг не является максимальным, т. е. меньше числа столбцов. Предполагается, что управление является периодическим, при этом модуль его частот, т. е. наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, включающая все показатели Фурье этого управления, содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов. Ставится задача построить такое управление из допустимого множества, которое переводит систему в асинхронный режим, т. е. у системы должны появиться периодические решения, такие что пересечение модулей частот решения и матрицы коэффициентов тривиально. Поставленная задача названа задачей синтеза асинхронного режима. Решение сформулированной задачи существенным образом зависит от структуры среднего значения матрицы коэффициентов. В частности, ее решение известно для систем с нулевым средним, также найдены условия ее разрешимости в случае, когда у матрицы при управлении есть нулевые строки, усреднение матрицы коэффициентов приводится к виду с левым верхним диагональным блоком и нулевыми остальными блоками. В данной работе рассматривается более общий случай с нетривиальным левым нижним блоком. В предположении неполного столбцового ранга матричной функции, составленной из строк осциллирующей части матрицы коэффициентов, построено в явном виде управляющее воздействие, переводящее систему в асинхронный режим.

Ключевые слова: периодические линейные системы управления, среднее значение, асинхронный режим

Для цитирования. Деменчук, А. К. Реализация асинхронного режима в линейной периодической системе с нетривиальным левым нижним блоком усреднения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 1. – С. 7–14. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-7-14

Aleksandr K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

IMPLEMENTATION OF ASYNCHRONOUS MODE IN A LINEAR PERIODIC SYSTEM WITH THE NONTRIVIAL LOWER LEFT BLOCK OF AVERAGING OF THE COEFFICIENT MATRIX

Abstract. A linear control system with a periodic matrix of coefficients and program control is considered. The matrix under control is constant, rectangular (the number of columns does not exceed the number of rows) and its rank is not maximum, i. e. less than the number of columns. It is assumed that the control is periodic, and the module of its frequencies, i. e. the smallest additive group of real numbers, including all Fourier exponents of this control, is contained in the frequency module of the coefficient matrix. The following task is posed: to construct such a control from an admissible set that switches the system to asynchronous mode, i. e. the system must have periodic solutions such that the intersection of the frequency moduli of the solution and the coefficient matrix is trivial. The problem posed is called the problem of synthesis of asynchronous mode. The solution to the formulated problem significantly depends on the structure of the average value of the coefficient matrix. In particular, its solution is known for systems with zero average. In addition, solvability conditions were obtained in the case when the matrix under control has zero rows, the averaging of the coefficient matrix is reduced to the form with upper left diagonal block and with zero remaining blocks. In this paper we consider a more general case with a nontrivial left lower block.

Assuming an incomplete column rank of the matrix function composed from the rows of oscillation path of the coefficient matrix, we construct the control explicitly. This control switches the system to asynchronous mode.

Keywords: periodic linear control systems, average value, asynchronous mode

For citation. Demenchuk A. K. Implementation of asynchronous mode in a linear periodic system with the nontrivial lower left block of averaging of the coefficient matrix. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 1, pp. 7–14 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-7-14

Введение и постановка задачи. Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица, B – постоянная $(n \times r)$-матрица, $r \leq n$, u – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах в предположении совпадения частот решения и коэффициентов самой системы (см., напр., [1, 2] и др.).

Вместе с тем, как вытекает из [3, 4] и других работ, система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. Позднее такого рода решения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными. Отметим, что в периодическом случае нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и системы.

Задача построения периодических дифференциальных систем, функционирующих в асинхронном режиме, т. е. обладающих сильно нерегулярными решениями, была сформулирована в [5] как задача управления асинхронным спектром. В монографии [6, гл. III] исследована разрешимость такой задачи для некоторых классов линейных периодических систем с линейной по фазовым переменным периодической обратной связью.

В данной работе в качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых $\mathrm{Exp}(u)$ содержится в модуле частот $\mathrm{Mod}(A)$ матрицы коэффициентов $A(\cdot)$. Тогда применительно к системе (1) задача синтеза асинхронного режима состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = U(t) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение.

Вопросы разрешимости задачи управления асинхронным спектром для системы (1) с программным управлением и нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в [7], а с невырожденным средним – в [8]. Случай максимального ранга матрицы при управлении, который равен числу ее столбцов, изучен в [9]. В [10] приведены условия существования решения задачи управления асинхронным спектром для системы (1) с нулевыми строками матрицы при управлении, при этом среднее значение матрицы коэффициентов преобразуется к виду с вырожденным левым верхним диагональным блоком и нулевыми остальными блоками. В настоящей работе рассматриваем более общий случай с нетривиальным левым нижним блоком. В предположении неполного столбцового ранга матричной функции, составленной из строк осциллирующей части матрицы коэффициентов, строится в явном виде управляющее воздействие, переводящее систему (1) в асинхронный режим.

Предварительные обозначения и необходимые сведения. Пусть $P = (p_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, – некоторая матрица и $1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq n$, $1 \leq l_1 < \ldots < l_q \leq m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Через $P_{k_1 \ldots k_s}^{l_1 \ldots l_q}$ обозначим $(s \times q)$-матрицу, образованную из элементов матрицы P, стоящих на пересечении строк с номерами $k_1, \ldots, k_s$ и столбцов с номерами $l_1, \ldots, l_q$:

$$P_{k_1\ldots k_s}^{l_1\ldots l_q} = \begin{pmatrix} p_{k_1 l_1} & \cdots & p_{k_1 l_q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k_s l_1} & \cdots & p_{k_s l_q} \end{pmatrix}.$$

Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной матрицы (вектора) $F(t)$ определим ее среднее значение

$$\hat{F} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} F(t)dt$$

и осциллирующую часть

$$\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}.$$

Пусть $\mathrm{Mod}(F)$ – модуль частот матрицы $F(t)$, т. е. множество всевозможных линейных комбинаций с целыми коэффициентами показателей Фурье этой матрицы. Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ – наибольшее число ее линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг – $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}F$. Как показывает следующий пример, в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать. Действительно, для матрицы вида

$$F(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \sin t \\ \cos t & \cos t \end{pmatrix}$$

столбцовый ранг равен единице, в то время как строчный ранг равен двум. Будем говорить, что $F(t)$ – матрица неполного столбцового ранга, если ее столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Принимая во внимание основной результат работы [9], далее считаем, что ранг постоянной матрицы B не является максимальным, т. е. меньше числа ее столбцов, и строки с номерами $k_1,\ldots,k_d$, $1 \le k_1 < \ldots < k_d \le n$ нулевые:

$$\mathrm{rank}\, B = r_1 < r, \quad B_{k_1\ldots k_d}^{1\ldots r} = 0 \quad (d = n - r_1). \tag{4}$$

Последнее ограничение не является потерей общности рассуждений, так как этого можно добиться с помощью линейного неособенного преобразования системы (1), используя алгоритмы элементарных преобразований строк матрицы [12, с. 20]. Пусть $k_{d+1},\ldots,k_n$, $1 \le k_{d+1} < \ldots < k_n \le n$ – номера ненулевых строк матрицы B. Для краткости положим

$$B_{11} = B_{k_1\ldots k_d}^{1\ldots r}, \quad B_{21} = B_{k_{d+1}\ldots k_n}^{1\ldots r}.$$

Из условия (4) вытекает, что $(d \times r)$-матрица B_{11} нулевая, а $(r_1 \times r)$-матрица B_{21} $(r_1 < r)$, составленная из ненулевых строк матрицы B с номерами $1 \le k_{d+1} < \ldots < k_n \le r$, имеет максимальный ранг, равный числу ее строк, т. е.

$$\mathrm{rank}\, B_{21} = r_1.$$

Основное предположение настоящей работы состоит в том, что в рассматриваемом случае среднее значение матрицы коэффициентов представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_{k_1\ldots k_d}^{k_1\ldots k_d} & \hat{A}_{k_1\ldots k_d}^{k_{d+1}\ldots k_n} \\ \hat{A}_{k_{d+1}\ldots k_n}^{k_1\ldots k_d} & \hat{A}_{k_{d+1}\ldots k_n}^{k_{d+1}\ldots k_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{k_1\ldots k_d}^{k_1\ldots k_d} & 0 \\ \hat{A}_{k_{d+1}\ldots k_n}^{k_1\ldots k_d} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$
$$\hat{A}_{k_1\ldots k_d}^{k_1\ldots k_d} = \mathrm{diag}\,(\hat{a}_{k_1 k_1},\ldots,\hat{a}_{k_d k_d}), \quad \hat{A}_{k_{d+1}\ldots k_n}^{k_1\ldots k_d} \ne 0.$$

Заметим, что в нашем случае, в отличие от рассматриваемого в работе [10], левый нижний блок усреднения матрицы коэффициентов нетривиален. Пусть среди элементов левого верхнего блока $\hat{A}_{k_{d+1}\ldots k_n}^{k_{d+1}\ldots k_n}$ имеются нулевые. Без ограничения общности можно считать, что эти элементы стоят в начале диагонали, т. е.

$$\hat{a}_{k_j,\,k_j} = 0, \quad j = \overline{1,m}, \quad 1 \le m < d, \tag{6}$$

а остальные элементы ненулевые. В противном случае этого можно добиться с помощью линейного невырожденного преобразования системы (1), равносильного перестановке первых ее d уравнений в требуемом порядке.

С учетом нумерации нулевых и ненулевых строк матрицы B для упрощения записи положим

$$A_{11}(t) = A_{k_1\ldots k_d}^{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{12}(t) = A_{k_1\ldots k_d}^{k_{d+1}\ldots k_n}(t), \quad A_{21}(t) = A_{k_{d+1}\ldots k_n}^{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{22}(t) = A_{k_{d+1}\ldots k_n}^{k_{d+1}\ldots k_n}(t),$$

$$x' = \operatorname{col}(x_{k_1},\ldots,x_{k_d}), \quad x'' = \operatorname{col}(x_{k_{d+1}},\ldots,x_{k_n}).$$

Если у некоторой матрицы (вектора) $(\cdot)$ произвольным образом поменять местами ее строки, то через $\operatorname{ord}_{\text{row}}(\cdot)$ обозначим обратную процедуру упорядочивания строк по возрастанию их номеров. Тогда, в частности, будем иметь $\operatorname{ord}_{\text{row}}\left(\operatorname{col}(x',x'')\right) = x$.

Через $\tilde{A}_{11}^{(1)}(t)$ обозначим $(d \times m)$-матрицу, составленную из первых m столбцов $(d \times d)$-блока $\tilde{A}_{11}(t)$ осциллирующей части $\tilde{A}(t)$ матрицы коэффициентов $A(t)$, а через $\tilde{A}_{11}^{(2)}(t)$ – $((d-m) \times m)$-матрицу, составленную из остальных $d-m$ столбцов этого блока. Образуем $(d \times (m + r_1))$-матрицу

$$A_*(t) = \left[\,\tilde{A}_{11}^{(1)}(t) \;\; A_{12}(t)\,\right]. \tag{7}$$

Будем считать, что матрица (7) имеет неполный столбцовый ранг, т. е. выполняется неравенство

$$\operatorname{rank}_{\text{col}} A_*(t) = k < n. \tag{8}$$

В настоящей статье для описанного класса систем (1) выполним синтез управляющего воздействия, переводящего систему в асинхронный режим.

Основной результат. Пусть для линейной системы (1) выполнены условия (4)–(8). Искомое программное управление из допустимого множества будем искать в виде

$$u = U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t).$$

Из [11] следует, что в смысле существования сильно нерегулярных периодических решений $x = x(t)$ система (3) эквивалентна следующей системе, состоящей из двух подсистем:

$$\dot{x} = \hat{A}x + B\hat{U}, \quad \tilde{A}(t)x + B\tilde{U}(t) = 0. \tag{9}$$

Поэтому поставленная задача сводится к построению вектор-функции $U(t)$ из допустимого множества непрерывных на вещественной оси периодических r-вектор-функций, множество показателей Фурье которой $\operatorname{Exp}(U)$ содержится в модуле частот $\operatorname{Mod}(A)$ матрицы коэффициентов $A(\cdot)$, такой, чтобы система (9) имела сильно нерегулярное периодическое решение.

В принятых ранее обозначениях система (9) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \hat{U},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ \tilde{A}_{21}(t) & \tilde{A}_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \tilde{U}(t) = 0,$$

откуда в силу условий (4), (5) получаем следующую систему:

$$\dot{x}' = \hat{A}_{11}x' + \hat{A}_{12}x'', \quad \dot{x}'' = \hat{A}_{21}x' + \hat{A}_{22}x'' + B_{21}\hat{U},$$

$$\tilde{A}_{11}(t)x' + \tilde{A}_{12}(t)x'' = 0, \quad \tilde{A}_{21}(t)x' + \tilde{A}_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.$$

С учетом предположений (5), (6) о структуре усреднения $\hat{A}$ матрицы коэффициентов, полученная система запишется в виде

$$\begin{gathered}\dot{x}' = \operatorname{diag}(0,\ldots,0,\hat{a}_{k_{m+1}k_{m+1}},\ldots,\hat{a}_{k_d k_d})x', \quad \dot{x}'' = \hat{A}_{21}x'' + B_{21}\hat{U}, \\ \tilde{A}_{11}(t)x' + A_{12}(t)x'' = 0, \quad \tilde{A}_{21}(t)x' + A_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Представим вектор x' в виде

$$x' = \operatorname{col}\left(x'_{(1)}, x'_{(2)}\right), \tag{11}$$

где векторы $x'_{(1)}$ и $x'_{(2)}$ составлены соответственно из первых m и последних $d-m$ компонент вектора x'. Пусть $\hat{A}_{21}^{(1)}$ и $\hat{A}_{21}^{(2)}$ – блоки, образованные первыми m и последними $d-m$ столбцами матрицы $\hat{A}_{21}$ и $\tilde{A}_{21}^{(1)}(t)$, $\tilde{A}_{21}^{(2)}(t)$ – аналогичное разбиение матрицы $\tilde{A}_{21}(t)$, а $\tilde{A}_{11}^{(1)}(t)$, $\tilde{A}_{11}^{(2)}(t)$ – такое же разбиение матрицы $\tilde{A}_{11}(t)$. В совокупности с (11) использование этих разбиений позволит представить систему (10) следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{x}'_{(1)} = 0, \\ \dot{x}'_{(2)} = \operatorname{diag}(\hat{a}_{k_{m+1}k_{m+1}},\ldots,\hat{a}_{k_d k_d})x'_{(2)}, \\ \dot{x}'' = \hat{A}_{21}^{(1)}x'_{(1)} + \hat{A}_{21}^{(2)}x'_{(2)} + B_{21}\hat{U}, \\ \left[\tilde{A}_{11}^{(1)}(t)\ \tilde{A}_{11}^{(2)}(t)\ A_{12}(t)\right]\operatorname{col}(x'_{(1)}, x'_{(2)}, x'') = 0, \\ \tilde{A}_{21}^{(1)}(t)x'_{(1)} + \tilde{A}_{21}^{(2)}(t)x'_{(2)} + A_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Как видим, система (12) состоит из пяти подсистем. Поскольку числа $\hat{a}_{k_{m+1}k_{m+1}},\ldots,\hat{a}_{k_d k_d}$ вещественны и отличны от нуля, то периодическое решение второй подсистемы из (12) является тривиальным

$$x'_{(2)} = x'_{(2)}(t) \equiv 0, \tag{13}$$

что позволяет свести систему (12) к системе

$$\begin{gathered}\dot{x}'_{(1)} = 0, \quad x'_{(2)} = x'_{(2)}(t) \equiv 0, \\ \dot{x}'' = \hat{A}_{21}^{(1)}x'_{(1)} + B_{21}\hat{U}, \\ \left[\tilde{A}_{11}^{(1)}(t)\ \ A_{12}(t)\right]\operatorname{col}\left(x'_{(1)}, x''\right) = 0, \\ \tilde{A}_{21}^{(1)}(t)x'_{(1)} + A_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Рассмотрим более подробно четвертую подсистему, которая, принимая во внимание равенство (7), запишется в виде

$$A_*(t)\operatorname{col}(x'_{(1)}, x'') = 0. \tag{15}$$

Обозначим через $A_*^{(1)}(t),\ldots, A_*^{(m)}(t)$, $A_*^{(m+1)}(t),\ldots, A_*^{(m+r_1)}(t)$ столбцы матрицы $A_*(t)$. В силу оценки (8) они, как вектор-функции, линейно зависимы. Это означает, что найдутся вещественные постоянные $c_1,\dots,c_m,c_{m+1},\dots,c_{m+r_1}$, среди которых имеются ненулевые, такие, что линейная комбинация $c_1A_*^{(1)}(t)+\dots+c_{m+r_1}A_*^{(m+r_1)}(t)$ тождественно обращается в нуль, т. е.

$$A_*(t)\,\mathrm{col}(c_1,\dots,c_m,c_{m+1},\dots,c_{m+r_1})\equiv 0,\quad \mathrm{col}(c_1,\dots,c_m,c_{m+1},\dots,c_{m+r_1})\neq 0.$$

Следовательно, функциональная линейная однородная система (15), равно как и четвертая подсистема из (14), имеет нетривиальное, по меньшей мере стационарное решение

$$x'_{(1)}=x'_{(1)}(t)=\mathrm{col}(c_1,\dots,c_m),\quad x''=x''(t)=\mathrm{col}(c_{m+1},\dots,c_{m+r_1}). \tag{16}$$

Кроме этого, как несложно убедиться, вектор $x'_{(1)}(t)=\mathrm{col}(c_1,\dots,c_m)$ удовлетворяет и первой подсистеме из (14). Поэтому система (14) редуцируется к системе равенств

$$\begin{aligned}&x'_{(1)}=x'_{(1)}(t)=\mathrm{col}(c_1,\dots,c_m),\\&x'_{(2)}=x'_{(2)}(t)\equiv 0,\\&x''=x''(t)=\mathrm{col}(c_{m+1},\dots,c_{m+r_1}),\end{aligned}$$

$$0=\hat{A}_{21}^{(1)}\,\mathrm{col}(c_1,\dots,c_m)+B_{21}\hat{U}=B_{21}\hat{U}+H(c_1,\dots,c_m),$$

$$\tilde{A}_{21}^{(1)}(t)\mathrm{col}(c_1,\dots,c_m)+A_{22}(t)\mathrm{col}(c_{m+1},\dots,c_{m+r_1})+B_{21}\tilde{U}(t)=B_{21}\tilde{U}(t)+G(t,c_1,\dots,c_{m+r_1})=0. \tag{17}$$

Остается выяснить, при каких условиях на компоненты управления найденные выше векторы $x'_{(1)}, x'_{(2)}, x''$ будут удовлетворять последним двум соотношениям из (14) или, что то же самое, из (17). Для этого рассмотрим комбинированное линейное неоднородное матричное уравнение

$$B_{21}[\hat{Y}\ \ \tilde{Y}]+[H(c_1,\dots,c_m)\quad G(t,c_1,\dots,c_{m+r_1})]=0, \tag{18}$$

относительно неизвестных постоянного r-вектора $\hat{Y}$ и ω-периодической r-векторной функции $\tilde{Y}=\tilde{Y}(t)$ с нулевым средним значением. Так как матричный коэффициент B_{21} уравнения (18) имеет максимальный ранг, равный числу ее строк, и это число меньшее числа ее столбцов, то этот ранг не изменится при добавлении к матрице B_{21} произвольных столбцов. Значит, выполняется ранговое условие

$$\mathrm{rank}\,B_{21}=\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}\ [B_{21}\ H\ G].$$

Поэтому система (18) с постоянной коэффициентной матрицей разрешима, и ее решение строится стандартными методами линейной алгебры. Поскольку первая компонента решения выражается через константы, то она будет стационарной. Покажем, что и вторая компонента решения имеет требуемое свойство. Действительно, вектор $\tilde{Y}$ линейно выражается через элементы ω-периодических матриц $\tilde{A}_{21}^{(1)}(t), A_{22}(t)$, первая из которых имеет нулевое среднее по определению, а вторая – в силу условия (5). Тогда и вектор $\tilde{Y}$ будет обладать такими же свойствами.

Пусть $\hat{Y}=\hat{Y}_0,\ \tilde{Y}=\tilde{Y}_0(t)$ – некоторое решение из указанного выше класса матричного уравнения (18). Тогда нетрудно видеть, что векторы

$$\hat{U}=Y_0,\quad \tilde{U}(t)=\tilde{Y}_0(t) \tag{19}$$

будут удовлетворять последним двум соотношениям системы (17).

Следовательно, построены компоненты (19) управления $U(t)$ такие, что система (10) будет иметь решение (13), (16), записав которое в виде

$$x(t)=\mathrm{ord}_{\mathrm{row}}\left(\mathrm{col}\,(x'_{(1)}(t),\ x'_{(2)}(t),\ x''(t)\right),$$

получим искомое решение как системы (9), так и системы (3).

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а. *Стационарная и осциллирующая компоненты решения задачи управления асинхронным спектром для системы* (1), (4)–(8) *имеют вид* (19).

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Беларуси по заданию 1.2.01 «Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем» ГПНИ «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы») в рамках гранта Президента Республики Беларусь.

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus under assignment 1.2.01 “Development of constructive and asymptotic methods for studying complex controllable differential and discrete systems” of the State Scientific Research Program “Convergence-2025” (subprogram “Mathematical models and methods”) within the framework of a grant from the President of the Republic of Belarus.

Список использованных источников

1. Зубов, В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

2. Макаров, Е. К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.

3. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, № 1. – P. 37–45.

4. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. мат. журн. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.

5. Деменчук, А. К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.

6. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrucken: Lambert Academic Publ., 2012. – 186 с.

7. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 31–34.

8. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным средним значением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Тр. Ин-та математики. – 2020. – Т. 28, № 1–2. – С. 11–16.

9. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга / А. К. Деменчук // Тр. Ин-та математики. – 2019. – Т. 27, № 1–2. – С. 23–28.

10. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с вырожденным левым верхним диагональным блоком среднего значения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Тр. Ин-та математики. – 2023. – Т. 31, № 1–2. – С. 44–49.

11. Грудо, Э. И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо, А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 409–416.

12. Хорн, Р. Матричный анализ: пер. с англ. / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Наука, 1989. – 655 с.

References

1. Zubov V. I. *Lectures on Control Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1975. 495 p. (in Russian).

2. Makarov E. K, Popova S. N. *Controllability of Asymptotic Invariants of Nonstationary Linear Systems*. Minsk, Belaruskaya nauka Publ., 2012. 407 p. (in Russian).

3. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bol. de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.

4. Kurzweil J., Vejvoda O. On periodic and almost periodic solutions of the ordinary differential systems. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian). https://doi.org/10.21136/cmj.1955.100152

5. Demenchuk A. K. The control problem of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).

6. Demenchuk A. K. *Asynchronous Oscillations in Differential Systems. Conditions of Existence and Control*. Saarbrucken, Lambert Academic Publ., 2012. 186 p. (in Russian).

7. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with zero mean value of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 31–34 (in Russian).

8. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with a non-degenerate mean value of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2020, vol. 28, no. 1–2, pp. 11–16 (in Russian).

9. Demenchuk A. K. Asynchronous spectrum control of linear systems with a matrix under maximum rank control. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2019, vol. 27, no. 1–2, pp. 23–28 (in Russian).

10. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with a degenerate diagonal upper left block of the averaging of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 31, no. 1–2, pp. 44–49 (in Russian).

11. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On Periodic Solutions with Incommensurable Periods of Linear Nonhomogeneous Periodic Differential Systems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).

12. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985. 662 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511810817

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Information about the author

Aleksandr K. Demenchuk – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganov Str., Minsk, 220072, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by