ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.182 Поступила в редакцию 02.08.2023
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-29-33 Received 02.08.2023

М. А. Князев, Т. А. Климович

Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ТИПА КИНКА УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИСКУССТВЕННОГО АКСОНА

Аннотация. Рассмотрено (1 + 1)-мерное уравнение движения теории, описывающей динамику искусственного аксона. Искусственный аксон представляет собой структуру, подобную нейрону. Такие объекты находят широкое применение для моделирования различных задач в области биофизики, например, при описании физиологических процессов. В работе в аналитической форме построено топологически нетривиальное решение данного уравнения, описывающее состояние типа одиночного кинка. Для этой цели был использован модифицированный прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных. Рассмотрены частные случаи, соответствующие различным значениям электрического напряжения на контактах аксона.

Ключевые слова: искусственный аксон, кинк, прямой метод Хироты

Для цитирования. Князев, М. А. Новое решение типа кинка уравнения для искусственного аксона / М. А. Князев, Т. А. Климович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 1. – С. 29–33. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-29-33

Michael A. Knyazev, Tatyana A. Klimovich

Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

NEW KINK-TYPE SOLUTION OF THE EQUATION FOR ARTIFICIAL AXON

Abstract. In the paper a (1 + 1)-dimension equation of motion for the artificial axon is considered. The artificial axon is a dynamical structure like a neuron. They are widely used in biophysics, for example, in studying the physiological processes. A topological non-trivial solution of one-kink type for this equation is constructed in an analytical form. The modified direct Hirota method for solving the nonlinear partial derivatives equations is applied. The special cases are considered for different voltages on the contacts of axon.

Keywords: artificial axon, kink, the Hirota direct method

For citation. Knyazev M. A., Klimovich T. A. New kink-type solution of the equation for artificial axon. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 1, pp. 29–33 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-29-33

Введение. Искусственный аксон представляет собой динамическую синтетическую структуру, функционирующую подобно нейрону, которая формируется за счет двойного фотолипидного слоя, содержащего ионопроводящий канал, и использует электрический потенциал ионного градиента через мембрану в качестве источника энергии. Реально существующий аксон в отличие от искусственного содержит не один, а два ионопроводящих канала с градиентами в противоположных направлениях [1]. Искусственный аксон широко используется при моделировании биофизических задач [2], например, для описания в рамках теории Ходжкина – Хаксли [3] закономерностей протекания физиологических процессов.

В последнее время экспериментальному и теоретическому изучению искусственных аксонов уделяется значительное внимание. В работе [4] показана возможность формирования сети искусственных аксонов путем создания базовой единицы такой сети при помощи соединения двух возбуждаемых узлов так, что появление потенциала на одном из них индуцирует появление потенциала на другом. Те же авторы, продолжая свои экспериментальные исследования, показали, что использование двух искусственных аксонов в качестве элементов управления позволяет осуществлять перемещение к источнику света в зависимости от скорости появления электрического потенциала [5].

Экспериментальное и теоретическое исследование порога появления напряжения на искусственном аксоне было проведено в [6]. Показано, что, как и для реального нейрона, это пороговое значение зависит от критической точки бифуркации седло-узел. В работе построена модель типа модели Морриса – Лекара, согласующаяся с полученными экспериментальными результатами. Из этой модели следует, что искусственный аксон может быть использован в качестве прерывателя протекания тока при изучении физиологических процессов.

В настоящей статье теоретически показано, что, наряду с решением в виде обычного кинка, уравнение движения для искусственного аксона допускает и новые кинкоподобные решения. Простейшее уравнение движения, описывающее динамику искусственного аксона, может быть записано в виде [7]

$$V_t - V_{xx} - 4a[(1-\alpha)V + aV^2 - V^3] = 0, \tag{1}$$

где $V = V(x,t)$ – напряжение электрического поля внутри аксона, параметр $\alpha \le 1$ определяется как отношение напряжения на контактах к потенциалу Нернста, a – параметр, определяющий потенциальную энергию взаимодействия, $V_t = \partial V/\partial t$ и т. п.

Цель работы – построение в аналитической форме нового топологически нетривиального кинкоподобного решения уравнения полного (1), а также его частных случаев, соответствующих различным значениям параметров модели, и исследование возможных значений параметров решений.

Метод решения. Для решения уравнения (1) будем использовать прямой метод Хироты решения уравнений в частных производных [8], модифицированный согласно подходу, развитому в [9]. Введем новую зависимую переменную вида

$$V = \sigma F_x / F, \tag{2}$$

где $F = F(x,t)$ – новая неизвестная функция, σ – параметр, который предстоит определить, $F_x = \partial F/\partial x$ и т. п. Если подставить новую зависимую переменную в уравнение (1) и потребовать выполнения условия $\sigma^2 = \dfrac{1}{2a}$, то уравнение (1) примет следующий, как принято говорить, билинейный вид $V = \sigma F_x/F$:

$$F_{xt}F - F_xF_t - F_{xxx}F + 3F_xF_{xx} - 4a(1-\alpha)F_xF - 4a\alpha\sigma F_x^2 = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем использовать перед параметром σ знак плюс. Запишем функцию F в виде формального ряда теории возмущений:

$$F(x,t) = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots, \tag{4}$$

где $f_i = f_i(x,t)$, $i = 1,2,3,\dots$ – новые неизвестные функции, ε – вообще говоря, не малый параметр. Подставляя соотношение (4) в уравнение (1) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных, такую, что каждое последующее уравнение этой системы будет зависеть только от параметров модели и решений предыдущих уравнений. Первое уравнение системы будет однородным, а все последующие – неоднородными. Решая последовательно эту систему уравнений, можно в принципе определить все функции f_i. Выпишем первые три уравнения системы:

$$f_{1,xt} - f_{1,xxx} - 4a(1-\alpha) f_{1,x} = 0, \tag{5}$$

$$f_{2,xt} - f_{2,xxx} - 4a(1-\alpha) f_{2,x} = f_{1,x} f_{1,t} - 3 f_{1,x} f_{1,xx} + 4a\alpha\sigma f_{1,x}^2, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} f_{3,xt} - f_{3,xxx} - 4a(1-\alpha) f_{3,x} = f_{1,x} f_{2,t} - f_1 f_{2,xt} + f_{1,t} f_{2,x} + \\ + f_1 f_{2,xxx} - 3 f_{1,x} f_{2,xx} - 3 f_{1,xx} f_{2,x} + 4a(1-\alpha) f_1 f_{2,x} + 8a\alpha\sigma f_{1,x} f_{2,x}. \end{gathered} \tag{7}$$

Одиночный кинк. Для того чтобы построить решение уравнения (1), описывающее состояние типа одиночного кинка, нам понадобятся уравнения (5) и (6) – первые два уравнения вышеупомянутой системы. Будем искать f_1 в виде

$$f_1 = \exp(kx - \omega t + \eta^0), \tag{8}$$

где k и ω – параметры решения, которые следует определить; параметр η^0 характеризует начальное положение кинка (без потери общности его можно принять равным нулю). Подставив соотношение (8) в уравнение (5), получим дисперсионное соотношение вида

$$\omega = -k^2 - 4a(1-\alpha). \tag{9}$$

Для того чтобы оборвать, как это требуется в методе Хироты, ряд (4), подставим соотношение (8) в правую часть уравнения (6) и приравняем ее нулю. В результате получим

$$\omega = -3k^2 + 4a\alpha\sigma k. \tag{10}$$

Исходя из соотношений (9) и (10), можно получить уравнение для параметра k:

$$k^2 - 2a\alpha\sigma k - 2a(1-\alpha) = 0, \tag{11}$$

откуда получаем

$$k_1 = a\alpha\sigma + \sqrt{a^2\alpha^2\sigma^2 + 2a(1-\alpha)}, \quad k_2 = a\alpha\sigma - \sqrt{a^2\alpha^2\sigma^2 + 2a(1-\alpha)}.$$

Видно, что k_1 и k_2 зависят от знака параметра σ. Выберем $k = k_1$. Тогда можно найти явный вид ω. Теперь можно записать решение типа одиночного кинка:

$$V(x,t) = \sigma \frac{f_{1,x}}{1+f_1} = \frac{\sigma k}{2}\left[1 + \operatorname{th}\left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2}\right)\right]. \tag{12}$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что соотношение (12) является решением уравнения (1).

Представляет интерес рассмотреть решения типа одиночного кинка для частных случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Случай $\alpha = 0$ представляет, скорее, академический интерес, так как соответствует отсутствию напряжения на контактах аксона. При этом уравнение (1) записывается в виде

$$V_t - V_{xx} - 4aV + 4aV^3 = 0. \tag{13}$$

Используя подход, который применялся при решении уравнения (1), можно представить уравнение (13) в виде

$$F_{xt}F - F_x F_t - F_{xxx}F + 3F_x F_{xx} - 4aF_x F = 0, \tag{14}$$

при этом для параметра σ получаем то же значение, что раньше: $\sigma^2 = \dfrac{1}{2a}$. Уравнение (14) можно свести к бесконечной системе линейных уравнений в частных производных при помощи подстановки (4). Первые три уравнения этой системы имеют вид

$$f_{1,xt} - f_{1,xxx} - 4af_{1,x} = 0, \tag{15}$$

$$f_{2,xt} - f_{2,xxx} - 4af_{2,x} = f_{1,x} f_{1,t} - 3 f_{1,x} f_{1,xx}, \tag{16}$$

$$f_{3,xt} - f_{3,xxx} - 4af_{3,x} = f_{1,x} f_{2,t} - f_1 f_{2,xt} + f_{1,t} f_{2,x} + f_1 f_{2,xxx} - 3 f_{1,x} f_{2,xx} - 3 f_{1,xx} f_{2,x} + 4af_1 f_{2,x}. \tag{17}$$

Аналогично тому, как это было сделано при построении решения типа одиночного кинка для уравнения (1), получим для уравнения (13) решение в виде (12), где $k^2 = 2a$ и $\omega = 6a$. Прямая подстановка полученного соотношения в уравнение (13) показывает, что оно является решением этого уравнения.

Случай $\alpha = 1$ соответствует максимально возможному напряжению на контактах аксона. Теперь уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$V_t - V_{xx} - 4aV^2 + 4aV^3 = 0, \tag{18}$$

тогда при условии $\sigma^2 = \dfrac{1}{2a}$ уравнение для функции F примет вид

$$F_{xt}F - F_x F_t - F_{xxx}F + 3F_x F_{xx} - 4a\sigma F_x^2 = 0. \tag{19}$$

Первые два уравнения бесконечной системы линейных уравнений в частных производных, которые получаются из уравнения (19), имеют вид

$$f_{1,xt} - f_{1,xxx} = 0, \tag{20}$$

$$f_{2,xt} - f_{2,xxx} = f_{1,x} f_{1,t} - 3 f_{1,x} f_{1,xx} + 4a\sigma f_{1,x}^2. \tag{21}$$

По аналогии с предыдущими вычислениями получаем решение вида (12), где $\omega = -k^2$ и $k = 2a\sigma$. Подстановка этого соотношения в уравнение (18) показывает, что оно является решением этого уравнения.

Заключение. Полученные в работе результаты согласуются с известными теоретическими исследованиями существования в искусственном аксоне солитоноподобных состояний типа кинков [10], а также с экспериментальными исследованиями формы кривой напряжения на контактах аксона [6]. Параметры k_1 и k_2 для решения уравнения (1) принимают разные значения. Это можно рассматривать как указание на возможность построения решения, соответствующего связанным состояниям двух кинков. Для рассмотренных частных случаев такого рода решение построить не удается, так как в этих случаях параметры k_1 и k_2 различаются только знаками.

Список использованных источников

1. Ariyaratne, A. Towards a minimal artificial axon / A. Ariyaratne, G. Zocchi // J. Phys. Chem. B. – 2016. – Vol. 120, № 31. – P. 6255–6263. https://doi.org/10.1021/acs.jpcb.6b02578

2. Koch, C. Biophysics of Computation: Information Processing in Single Neurons / C. Koch. – Oxford University Press, 1999. – 558 p. https://doi.org/10.1093/oso/9780195104912.001.0001

3. Hodgkin, A. L. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A. L. Hodgkin, A. F. Huxley // J. Physiol. – 1952. – Vol. 117, № 4. – P. 500–544. https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764

4. Vasquez, H. G. Coincidences with the artificial axon / H. G. Vasquez, G. Zocchi // Europhys. Lett. – 2017. – Vol. 119, № 4. – Art. ID 48003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/119/48003

5. Vasquez, H. G. Analog control with two artificial axons / H. G. Vasquez, G. Zocchi // Bioinspiration & Biomimetics. – 2018. – Vol. 14, № 1. – Art. ID 016017. https://doi.org/10.1088/1748-3190/aaf123

6. Ziqi Pi. Critical behavior of the artificial axon [Electronic resource] / Ziqi Pi, G. Zocchi // Arxiv [Preprint]. – 2020. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/2012.00221. https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.00221

7. Chaikin, P. Principles of Condensed Matter Physics / P. Chaikin, T. Lubenski. – Cambridge University Press, 1995. – 728 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511813467

8. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 479 с.

9. Князев, М. А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М. А. Князев. – Минск: Тэхналогія, 2003. – 115 с.

10. Xinyi, Qi. Kink propagation in the frtificial axon [Electronic resource] / Qi Xinyi, G. Zocchi // Arxiv [Preprint]. – 2021. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/2108.06132. https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.06132

References

1. Ariyaratne A., Zocchi G. Towards a minimal artificial axon. *Journal of Physical Chemistry B*, 2016, vol. 120, no. 31, pp. 6255–6263. https://doi.org/10.1021/acs.jpcb.6b02578.

2. Koch C. *Biophysics of Computation: Information Processing in Single Neurons*. Oxford University Press, 1999. 558 p. https://doi.org/10.1093/oso/9780195104912.001.0001

3. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 1952, vol. 117, no. 4, pp. 500–544. https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764

4. Vasquez H. G., Zocchi G. Coincidences with the artificial axon. *Europhysics Letters*, 2017, vol. 119, no. 4, art. ID 48003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/119/48003

5. Vasquez H. G., Zocchi G. Analog control with two artificial axons. *Bioinspiration & Biomimetics*, 2018, vol. 14, no. 1, art. ID 016017. https://doi.org/10.1088/1748-3190/aaf123

6. Ziqi Pi, Zocchi G. Critical behavior of the artificial axon. *Arxiv* [Preprint], 2020. Available at: https://arxiv.org/abs/2012.00221. https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.00221

7. Chaikin P., Lubenski T. *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 1995. 728 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511813467

8. Ablowitz M. J., Segur H. *Solitons and Inverse Scattering Transform*. SLAM, 1981. 426 p. https://doi.org/10.1137/1.9781611970883

9. Knyazev M. A. *Kinks in Scalar Model with Damping.* Minsk, Tekhnalogiya Publ., 2013. 115 p. (in Russian).

10. Xinyi Qi, Zocchi G. Kink propagation in the frtificial axon. *Arxiv* [Preprint], 2021. Available at: https://arxiv.org/abs/2108.06132. https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.06132

Информация об авторах

Князев Михаил Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: maknyazev@bntu.by

Климович Татьяна Александровна – магистрант кафедры «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tanya.tatina.klimovich@mail.ru

Information about the authors

Michael A. Knyazev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: maknyazev@bntu.by

Tatyana A. Klimovich – Master's Degree Student of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tanya.tatina.klimovich@mail.ru