

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 539.3;539.42;519.217

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-106-116>

Поступила в редакцию 05.09.2023

Received 05.09.2023

**М. А. Журавков, Ю. А. Замжицкая-Чигарева**

*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

## **МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СИНТЕЗИРУЕМЫХ ПО АДДИТИВНОЙ ТЕХНОЛОГИИ**

**Аннотация.** Рассматривается задача исследования разрушения композитного макрослоя, синтезированного по аддитивной технологии на твердой подложке, с которой жестко скреплена граница нижнего микрослоя. Материалы микрослоев однородные изотропные. Управляющими параметрами синтеза являются толщина микрослоев и общая толщина макрослоя, а также физико-механические характеристики микрослоев и их сочетание в макрослое. Слой разрушается трещиной, которая может появиться в его верхнем (или любом другом) слое и продвигаться в направлении подложки или свободной поверхности, перпендикулярно границам микрослоев. Трещина может останавливаться на границах между слоями (тогда это выделяется как отдельное состояние) или проходить границы без остановок. На основе теории марковских цепей рассчитаны средний ресурс стратифицированного слоя, синтезированного на подложке по аддитивной технологии, а также дисперсия числа циклов (ресурса), характеризующая качество синтезированной конструкции. На базе материалов, доступных для синтеза слоистого покрытия, решаются задачи оптимального проектирования композитного тела, обладающего максимальным средним ресурсом, минимальной дисперсией ресурса, максимальной удельной прочностью при заданных геометрических и физико-математических ограничениях на параметры композита. Для поиска оптимальных решений применяются алгоритмы динамического программирования, реализуемые на цепях (графах) последовательного подбора сочетания материалов слоев по их синергетическим свойствам.

**Ключевые слова:** механика разрушения, модели марковских цепей, разрушение слоистых материалов, накопление повреждений в слоистых материалах, распространение трещин в слоистых структурах

**Для цитирования.** Журавков, М. А. Марковские модели разрушения неоднородных сред и проектирование слоистых конструкций, синтезируемых по аддитивной технологии / М. А. Журавков, Ю. А. Замжицкая-Чигарева // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2024. – Т. 60, № 2. – С. 106–116. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-106-116>

**Michael A. Zhuravkov, Yuliya A. Zamzhitskaya-Chigareva**

*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

## **MARKOV FRACTURE MODELS OF INHOMOGENEOUS MEDIA AND DESIGN OF LAYERED STRUCTURES SYNTHESIZED BY ADDITIVE TECHNOLOGY**

**Abstract.** We consider the problem of studying the fracture of a composite macrolayer synthesized by additive technology on a solid substrate, to which the boundary of the lower microlayer is rigidly bonded. The materials of the microlayers are homogeneous and isotropic. The thicknesses of microlayers and the total thickness of the macrolayer are the control parameters of synthesis. The physical and mechanical characteristics of the microlayers and their combination in the macrolayer are also controlling parameters. The layer is fractured by a crack, which may appear in the top layer (or any other layer) and move toward the substrate or free surface, perpendicular to the boundaries of the microlayers. The crack can stop at the boundaries between the layers (then it is treated as a separate state) or pass through the boundaries without stopping. Based on the theory of Markov chains, the average lifetime of a stratified layer synthesized on a substrate using additive technology and the variance of the number of cycles (lifetime) characterizing the quality of the synthesized structure are calculated. On the basis of the materials available for the synthesis of the layered coating, the problems of optimal design of the composite body with maximum average resource, minimum resource dispersion, maximum specific strength for given geometric and physical-mathematical constraints on the composite parameters are solved. To find optimal solutions, dynamic programming algorithms are used, implemented on circuits (graphs) of sequential selection of a combination of layer materials according to their synergistic properties.

**Keywords:** fracture mechanics, Markov chain models, fracture of laminated materials, damage accumulation in laminated materials, cracks propagation in laminated structures

**For citation.** Zhuravkov M. A., Zamzhitskaya-Chigareva Y. A. Markov fracture models of inhomogeneous media and design of layered structures synthesized by additive technology. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 2, pp. 106–116 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-106-116>

**Введение.** Модели марковских цепей активно применяются в различных областях науки, техники, экономики благодаря тому, что основные понятия, такие как «состояние» и «момент», имеют широкий (абстрактный) смысл, что и обеспечивает разнообразное использование марковских цепей (процессов) [1–3].

В механике разрушения модели марковских цепей (процессов) применяются для решения различных задач (см., напр., [4–9]). Большая часть работ посвящена моделированию роста трещин на основе марковских цепей (процессов), а также накоплению повреждений [4–9]. Трещина распространяется, проходя разные стадии развития, которые классифицируются в терминах состояний марковских цепей: возвратных, невозвратных, периодических, эргодических и т. д.

Использование марковских моделей разрушения в оптимальном проектировании изучено значительно меньше. Вместе с тем имеются работы, в которых исследуются задачи поиска экстремальных решений на графах, цепях [10]. Методом динамического программирования построены алгоритмы поиска максимального ресурса слоистого покрытия, минимальной дисперсии, максимальной прочности.

**Моделирование многостадийного процесса разрушения на основе состояний марковской цепи.** Рассмотрим композитный макрослой, синтезированный по аддитивной технологии на твердой подложке, с которой жестко скреплена граница нижнего микрослоя. Принимаем, что материалы микрослоев однородные изотропные. Толщины микрослоев и общая толщина макрослоя являются управляющими параметрами синтеза. Физико-механические характеристики микрослоев и их сочетание в макрослое также являются управляющими параметрами, информация о которых сосредоточена в базе данных. Слой разрушается трещиной, которая может появиться в его верхнем (или любом другом) слое и продвигаться в направлении подложки или свободной поверхности, перпендикулярно границам микрослоев. Последние для простоты считаем плоскими, жестко связанными между собой. Трещина может останавливаться на границах между слоями (тогда это выделяется как отдельное состояние) или проходить границы без остановок.

Отметим, что в принципе траектория трещины может быть не прямой, может возвращаться, сколько угодно долго находиться в каком-либо слое и т. д. Понятие «состояние» позволяет описать сценарии постадийного распространения усталостной трещины под действием циклической нагрузки. Как известно, в этом случае обычно рассматривают процесс разрушения как функцию (длину трещины) с дискретным временем и значениями длины, характеризуемой целочисленными значениями. Однако представляется удобным рассматривать процесс разрушения более укрупненно.

Будем характеризовать процесс разрушения как переход из одного состояния в другое под влиянием внешних воздействий. Нахождение вершины трещины в  $i$ -м слое определяем как состояние  $S_i$ . Вероятность перехода из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  за один цикл обозначим как

$$P_{ij} = P\{S_j(n+1)|S_i(n)\}, \quad (1)$$

где  $n$  – число циклов до смены состояния.

Вероятность перехода за  $k$  циклов определяется формулой

$$P_{ij}(k) = P\{S_j(n+k)|S_i(n)\}. \quad (2)$$

Состояния  $S_i$  образуют множество  $S$ , которое формируется не единственным образом [1–3].

Обозначим общую толщину макрослоя как  $L = \sum_{i=1}^n L_i$ , где  $L_i$  – толщина микрослоев. Соответственно микрослои характеризуются модулями Юнга  $E_i$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_i$  или другой парой упругих коэффициентов.

Описание процесса разрушения с помощью марковских цепей целесообразно начать с установления эквивалентности терминов.

Невозвратному состоянию  $S_i$  в цепях соответствует ситуация в процессе разрушения, когда вершина трещины продвинулась из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  так, что она больше никогда не попадает в  $S_i$ . Множество невозвратных состояний будем обозначать через  $\mathbf{T}$  ( $0 < P_{ij} < 1$ ). Поглощающему состоянию  $S_i$  соответствует ситуация, когда вершина трещины, дойдя до  $i$ -го слоя или границы, остается в этом состоянии сколь угодно долго ( $P_{ii} = 1$ ). В этом случае может быть принято решение о продолжении работы конструкции с трещиной либо об изъятии покрытия досрочно.

Траектория трещины зависит от направления действия внешней нагрузки и от структуры среды, в которой распространяется трещина [11–13]. Трещина притягивается к местам, где прочность (жесткость) среды меньше и энергия может совершить максимальную работу по образованию свободной поверхности. Марковские цепи содержат поглощающие состояния, притягивающие (захватывающие) процесс, описываемый цепью, изображаемой графом. Вычисление вероятности захвата процесса разрушения поглощающим состоянием соответствует нахождению вероятности продвижения вершины трещины в состояние, наиболее благоприятное для разрушения с точки зрения минимальных затрат энергии.

**Вычисление среднего ресурса, дисперсии, вероятности захвата.** Обозначим  $\delta_j^k$  индикаторную функцию, равную 1, если процесс разрушения после  $k$  циклов находится в состоянии  $S_j$  и равную нулю в противном случае. Пусть  $n_j$  – количество циклов до реализации конфигурации структуры среды, соответствующей состоянию  $S_j$ , которое представим в следующем виде:

$$n_j = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_j^k, \quad n_0 = \delta_j^0 = \begin{cases} 1, & 0 = j, \\ 0, & 0 \neq j. \end{cases}$$

Величина  $n_j$  на множестве реализаций сценариев разрушения является случайной. Обозначим  $M_i[n_j]$  условное среднее число циклов (времени), необходимых для перехода разрушения (длины трещины) в состояние  $S_j$  при условии, что трещина находилась в состоянии  $S_i$  [3]:

$$\{M_i[n_j]\} = \left\{ M_i \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \delta_j^k \right] \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left( (1 - P_{ij}(k)) \cdot 0 + P_{ij}(k) \cdot 1 \right) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} (P_{ij}(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = N. \quad (3)$$

В (3) матрица  $N$  определяет среднее число циклов, необходимых для перехода из невозвратного состояния  $S_i$  в невозвратное состояние  $S_j$ , причем  $S_i, S_j \in \mathbf{T}$  (напоминаем, что  $\mathbf{T}$  – множество невозвратных состояний). Величина  $Q$  – матрица, описывающая процесс до выхода из множества  $\mathbf{T}$ .

Можно получить другую форму записи для вычисления среднего числа циклов (времени), используя следующую формулу [3, 14]:

$$M_i[n_j] = \delta_{ij} + \sum_{S_k \in \mathbf{T}} P_{ik} M_k[n_j], \quad (4)$$

или в матричном виде

$$\{M_i[n_j]\} = I + Q\{M_i[n_j]\} = (I - Q)^{-1} = N. \quad (5)$$

Рассмотрим модель распространения трещины, которая может останавливаться в каком-либо слое или на внутренней границе. Это означает существование изолированных поглощающих состояний. Представим

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k, \quad Q^0 = I. \quad (6)$$

Таким образом, в соответствии с формулой (3), элементы матрицы  $N$  выражаются через матрицу  $Q$ . Знание среднего числа циклов, необходимых для перехода в состояние  $S_j$  из состояния  $S_i$ ,

позволяет решать задачи вычисления ресурса макрослоя или отдельных его частей. На множестве реализаций процесса разрушения ресурс – случайная величина, среднее значение которой вычисляется по формулам (3) или (4). Однако этого недостаточно для оценки качества технологии синтеза стратифицированного слоя, поэтому вычислим дисперсию  $D$  числа циклов перехода в состояние  $S_j$  из состояния  $S_i$ :

$$D_i[n_j] = M_i[n_j]^2 - M_i^2[n_j] = N_2, \quad S_i, S_j \in \mathbf{T}, \quad (7)$$

где  $N_2 = N(2N_{dg} - I) - N_{sq}$ ,  $\{M_i[n_j]\} = N(2N_{dg} - I)$ .

Как было указано ранее, в поглощающем состоянии процесс разрушения останавливается. В теории марковских цепей установлено [1–3], что поглощающее состояние обладает свойством притяжения (захвата). Обозначим  $b_{ij}$  вероятность того, что процесс разрушения, выйдя из состояния  $S_i$ , остановится в поглощающем состоянии  $S_j$ , т. е. трещина из невозвратного состояния  $S_i$  dorастет до состояния  $S_j$  и останавливается:

$$\{b_{ij}\} = P\{S_j = l_j | S_i = l_i\} = \mathbf{B} = \mathbf{NR}. \quad (8)$$

В (8)  $\mathbf{R}$  – матрица перехода из невозвратного состояния [3].

Процесс притяжения (захвата) развивается по следующей схеме. Выйдя из состояния  $S_i$ , через конечное число циклов ( $k \geq 1$ ) трещина захватывается состоянием  $S_j$  с вероятностью  $P_{ij}(k)$ . На первом цикле вероятность захвата равна  $P_{ij}$ , причем если на первом цикле захват состоянием  $S_j$  не произошло, то трещина может быть захвачена другим поглощающим состоянием. Например, если она не остановилась на границе первого и второго слоя, то может остановиться на границе второго и третьего слоя и т. д. Если же трещина вместо  $S_j$  «захватилась» состоянием  $S_k$ , то вероятность  $b_{ik}$  удовлетворяет следующей системе уравнений [1–3, 14]:

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{S_k \in \mathbf{T}} P_{ik} b_{kj}. \quad (9)$$

В матричном виде уравнение (9) записывается так:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R} + \mathbf{QB}. \quad (10)$$

Решение (10) записывается в виде

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{NR}. \quad (11)$$

В покомпонентной записи выражение (11) имеет вид

$$b_{ij} + \sum_{S_k \in \mathbf{T}} M_i[n_k] P_{kj}.$$

Таким образом, на основе матриц  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{B}$  могут быть решены задачи многостадийного процесса разрушения слоистого покрытия: 1) вычисление ресурса (среднее время) системы в целом или отдельных частей; 2) оценка качества синтеза покрытия методом аддитивной технологии, прогнозирование прекращения или продолжения процесса разрушения; 3) вычисление вероятности достижения некоторого эргодического состояния (если оно существует), исходя из  $S_i$ ; 4) вычисление среднего числа состояний, которые проходятся процессом разрушения до попадания в эргодическое состояние.

**Алгоритмы поиска оптимальных решений для ресурса, стабильности процесса и прочности слоистого покрытия при заданных ограничениях.** Матрице  $\mathbf{P}$  можно поставить в соответствие граф, состояния которого представляют собой рассмотренные выше состояния, т. е. возвратные, невозвратные, поглощающие, эргодические и т. д. В этом случае ребрам графа приписываем, соответственно, переходные вероятности  $P_{ij}$ . Тогда задачу проектирования и синтеза слоистого покрытия с максимальным ресурсом (поиск максимального среднего времени эксплуатации) можно сформулировать как задачу поиска длины пути на графе матрицы  $\mathbf{N}$ , имеющем максимальное значение, или пути на графе  $\mathbf{P}$ .

В качестве критерия стабильности процессов синтеза и разрушения слоистого покрытия выбираем условие минимального значения дисперсии  $D$ , характеризующей качество синтеза и разрушения. Построим граф матрицы дисперсии  $D$ , на котором решаем задачу поиска минимума пути на графе матрицы  $D$ . Сформулированные задачи рассматриваем как двухкритериальную задачу оптимизации синтеза слоистого покрытия. Третий критерий синтеза покрытия с максимальной удельной прочностью использует другие алгоритмы поиска экстремума, поэтому рассмотрим сначала алгоритмы решения двухкритериальной задачи, а затем решение для третьего критерия.

Применим для решения двух первых задач метод оптимального динамического программирования Беллмана – Калаби [10], строящего алгоритм согласно правилу «любой подпуть минимального пути на графе должен быть минимальным» [10]. Как было сказано, дуге  $(S_i S_j)$  приписываем вероятность  $P_{ij}$ . Требуется найти путь  $(S_0, S_1, \dots, S_i, \dots, S_n)$  такой, что

$$\sum P = P_{0i_1} + P_{i_1 i_2} + \dots + P_{i_{n-1} i_n} \tag{12}$$

будет минимальной.

Обозначим через  $s_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ) минимальные пути между состояниями  $S_i$  и  $S_n$ . Тогда алгоритм примет вид

$$s_i = \min_{d \in D(i)} \left[ \sum_{j=0}^{i-1} P(j|i, d) ds_j + c_{id} \right], \quad i \neq 0, \tag{13}$$

$$s_0 \equiv 0, \quad c_{id} = \sum_j c(j|i, d) P(j|i, d),$$

где  $c_{id}$  означает эффект оптимизации в результате принятия решения  $d$  в узле « $i$ ».

Решения уравнения (13) методом последовательных приближений имеют вид

$$\begin{aligned} s_i^{(0)} &= P_{ik} \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1), \quad s_n^{(0)} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ s_i^{(k)} &= \min_{d \in D(i)} \left[ \sum_{j=0}^{i-1} P^{(k-1)}(j|i, d) + c_{id}^{(k-1)} \right], \quad s_n^{(k)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Процесс вычислений заканчивается тогда, когда выполняется условие [10]

$$s_i^{(k)} = s_i^{(k-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{15}$$

Значение  $s_i^{(k)}$  будет минимальным для оптимального пути от вершины (узла)  $S_0$  до вершины  $S_n$ , при этом число итераций не превышает  $(n - 1)$ .

Для графа матрицы  $N$ , где дуге  $(S_i S_{i+1})$  приписывается значение  $M_i[n_{i+1}]$ , рекуррентный алгоритм имеет вид

$$W_i(k) = \max(W_j(k - 1) + M_i[n_{i+1}]), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad W_n(k) = 0, \tag{16}$$

где  $W_i(k)$  –  $k$ -е приближение максимального пути (времени) от состояния  $S_i$  до состояния  $S_n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

На графе для матрицы  $D$  алгоритм поиска минимума дисперсии записывается в виде

$$D_i(k) = \min(D_j(k - 1) + D_{i+1}), \quad D_n(k) = 0. \tag{17}$$

Вычисления заканчиваются при равенстве двух последующих приближений.

Таким образом, методы марковских цепей и оптимизация на графах методами динамического программирования дают решения задач проектирования ресурса и стабильности технологического процесса синтеза слоистой конструкции на твердой подложке. Отметим, что возможен

другой подход к оптимальному проектированию, основанный не на применении методов динамического программирования к средним характеристикам марковской цепи, а непосредственно применяя метод к состоянию цепи с их последующим осреднением [10].

**Проектирование максимально прочного покрытия с учетом синергии материалов.** Вероятности переходов матрицы  $P$  из одного состояния в другое выражаются через геометрические, физико-механические и силовые параметры задачи. Согласно теории смесей средние по объему реализации вычисляются по следующим формулам [15–17]:

– модули упругости  $E = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n E_i L_i$ ,

– напряжения в  $i$ -м слое  $\sigma_{ij}^{(i)} = \sigma_{ij} \frac{E_i}{E}$ ,  $\sigma_{ij} = \frac{1}{L} N_{ij}$ , где  $N_{ij}$  – усилия, приложенные к  $i$ -му слою, связанные законом Гука с деформациями формулами

$$N_{11}^{(i)} = \frac{2E_i L_i}{1 - \nu_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_{22}^{(i)} = \frac{2E_i L_i}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu_i \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_{12}^{(i)} = \frac{E_i L_i}{1 + \nu_i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (18)$$

Здесь  $u, v$  – средние перемещения,  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$  – средние по толщине покрытия деформации. Отклонения перемещений и деформаций от средних значений как величинами второго порядка малости пренебрегаем.

Наибольшее напряжение  $\sigma_{\max}^{(m)}$ , выдерживаемое покрытием, достигается при разрыве некоторого  $m$ -го слоя, согласно формуле [12],

$$\sigma_{\max}^{(m)} = \frac{1}{L} \sum_{i=m}^k L_i \sigma^{(i)}(\epsilon_m). \quad (19)$$

Здесь  $\epsilon_m$  – деформация в  $i$ -м слое.

Удельная прочность на единицу средней массы (плотность) вычисляется по формуле [16, 17]

$$\frac{\sigma_{\max}^{(m)}}{\rho} = \frac{\sum_{i=m}^k L_i \sigma^{(i)}(\epsilon_m)}{\sum_{i=1}^k L_i \rho_i}, \quad \rho = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^k \rho_i L_i. \quad (20)$$

В случае выполнения закона Гука во всех слоях выражение (20) принимает вид

$$\frac{\sigma_{\max}^{(m)}}{\rho} = \epsilon_m \frac{\sum_{i=m}^k L_i E_i}{\sum_{i=1}^k L_i \rho_i}. \quad (21)$$

Покрытие представляет собой слоистую конструкцию, создаваемую на поверхности подложки по аддитивной технологии. Причем выбор материалов слоев  $E_i$  и их толщины  $L_i$  позволяет решать задачи оптимального дизайна (проектирования, конструирования) и синтеза по определенным критериям оптимальности. Еще одним параметром оптимизации является степень взаимного влияния материалов слоев на их сочетание в качестве контактирующих слоев. Это свойство синергии слоев  $i$ -го и  $j$ -го типа можно характеризовать матрицей  $C_{ij}$  коэффициентов, задавая ее компоненты по принципу:

$$C_{ij} = 1,$$

если слои  $i$  и  $j$  синергичны (совместимы) и усиливают друг друга;

$$C_{ij} = 0 \quad (22)$$

в противном случае.

В общем случае имеется база данных физико-механических характеристик материалов, из которых может быть синтезировано оптимальное покрытие. Возможность выбора подходящих материалов реализуем с помощью вектора  $x_i$  ( $i=1, \dots, M$ ), принимающего на множестве базы данных значения по типу индикаторной функции:

$$x_i = 1,$$

если материал  $i$ -го типа используется для создания какого-то слоя покрытия;

$$x_i = 0 \tag{23}$$

в противном случае.

Таким образом, величины  $x_i$ ,  $m$  (см. (19), (20)) образуют множество, на котором вследствие их выбора решается задача оптимального проектирования прочного износостойкого покрытия. Наиболее эффективной величиной, характеризующей трещиностойкость слоистой системы, является удельная плотность (20) системы слоев, благодаря подбору подходящих материалов из базы данных в соответствии с изложенными выше предположениями.

Введем функцию удельной прочности вида

$$F(x_i, m) = \frac{\sum_{i=m}^k L_i \sigma^{(i)}(\varepsilon_m) x_i}{\sum_{i=1}^k L_i \rho_i x_i}. \tag{24}$$

Задачу оптимального проектирования покрытия сформулируем как задачу поиска максимума функции  $F(x_i, m)$  ( $m$  – число слоев, прорезанных трещиной,  $(k - m)$  – число неразрушенных слоев)

$$\max_{x_i, m} F(x_i, m) \tag{25}$$

при следующих ограничениях.

$$1) \sum_{i=m}^k L_i \sigma^{(i)}(\varepsilon_m) x_i \geq N_0. \tag{26}$$

З а м е ч а н и е. Условие (26) означает, что действующее усилие при эксплуатации не меньше заданного усилия  $N_0$ .

$$2) \sum_{i=1}^k K_c^{(i)} L_i x_i \geq K_0, K_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^k L_i K_c^{(i)}, K_c^{(i)} = K_c \frac{E_i}{E}, \tag{27}$$

где  $K_c^{(i)}$  – коэффициент интенсивности напряжений в  $i$ -м слое, вычисляемый в зависимости от геометрии системы и вида внешних нагрузок [16, 17],  $K_c$  – нормативная величина интенсивности напряжений.

3) Матрица  $C_{ij}$  имеет вид

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Условие (28) выполняется на стадии первого шага оптимизации, на основе которого создается «подбаза» материалов, обладающих относительной синергией, и в конце проектирования для поиска последовательности синтеза слоев покрытия.

4) Общая толщина покрытия не должна превышать заданное значение  $L$ :

$$\sum_{i=1}^k L_i \leq L, \tag{29}$$

где возможные ограничения на толщину всех или некоторых слоев записываются в виде

$$L_i^{(\min)} \leq L_i \leq L_i^{(\max)}. \tag{30}$$

Как было указано ранее, вероятности множества состояний, описываемых матрицей  $\mathbf{P}$ , представляют собой вероятности нахождения трещины в слое (на границе слоя) или перехода без задержки на границе в следующий слой. Эти события реализуются при достижении наибольшего напряжения  $\sigma_{\max}$ , которое выдерживается системой оставшихся неповрежденных слоев.

Тогда вероятность события, что трещина находится в  $m$ -м слое, согласно формулам (25) и (26), равна вероятности события  $\sigma_{\max}^{(m)} < \sigma_*^{(m)}$ , а события, что трещина перешла в  $(m + 1)$  слой – события  $\sigma_{\max}^{(m)} \geq \sigma_*^{(m)}$ . Эти вероятности равны, соответственно,

$$P(A) = \frac{\rho \sum_{i=1}^m L_i E_i}{\sum_{i=1}^k L_i \rho_i E_i}; \quad P(\bar{A}) = \frac{\rho \sum_{i=1}^{m+1} L_i E_i}{\sum_{i=1}^k L_i \rho_i E_i}. \tag{31}$$

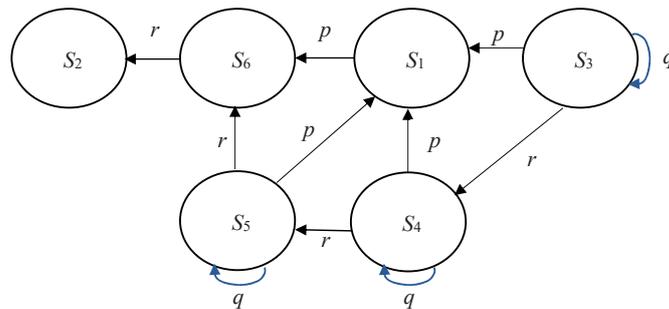
Приведем пример четырехслойной конструкции. Полагаем, что четырехслойная конструкция разрушена, если трещина прорезала все 4 слоя. Кроме того, покрытие считается непригодным к дальнейшей эксплуатации, если трещина появляется в любом из четырех слоев. Введем множество состояний, которые обозначим следующим образом:  $S_1$  – трещина в слое, прекращение эксплуатации;  $S_2$  – трещина от поверхности прорезала все 4 слоя;  $S_3$  – трещина прорезает четвертый слой в условиях эксплуатации;  $S_4$  – трещина прорезает третий слой;  $S_5$  – трещина прорезает второй слой в условиях эксплуатации;  $S_6$  – прорезан первый слой.

Введем вероятности событий: 1)  $p$  – вероятность возникновения трещины в каком-либо слое и прекращение эксплуатации; 2)  $q$  – вероятность, что трещина локализуется в слое и эксплуатация продолжается; 3)  $r$  – вероятность, что трещина переходит в соседний с рассматриваемым нижний слой при продолжающейся эксплуатации.

Матрица  $\mathbf{P}$  для данной модели имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6] \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & r & q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & r & q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & r & q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & r & q \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad p + q + r = 1. \tag{32}$$

Матрица  $\mathbf{P}$  имеет канонический вид, ее граф можно представить в виде, изображенном на рисунке.



Граф для матрицы (32)

Graph for the matrix (32)

Матрица  $N = (I - Q)^{-1}$  определяет среднее число циклов для перехода из слоя в слой:

$$N = \begin{matrix} & [S_3 & S_4 & S_5 & S_6] \\ \begin{matrix} S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} (p+r)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ r(p+r)^{-2} & (p+r)^{-1} & 0 & 0 \\ r^2(p+r)^{-3} & r(p+r)^{-2} & (p+r)^{-1} & 0 \\ r^3(p+r)^{-4} & r^2(p+r)^{-3} & r(p+r)^{-2} & (p+r)^{-1} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{IV layer} \\ \text{III layer} \\ \text{II layer} \\ \text{I layer} \end{matrix} \end{matrix}. \quad (33)$$

Нули в матрице  $N$  показывают, что трещина может продвигаться только в направлении от верхнего слоя к нижнему.

В качестве примера числовой оценки  $N$  зададим вероятности:  $p = 0,2$ ;  $q = 0,1$ ;  $r = 0,7$ . Тогда

$$N = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1,11 & 0 & 0 & 0 \\ 0,86 & 1,11 & 0 & 0 \\ 0,67 & 0,86 & 1,11 & 0 \\ 0,52 & 0,67 & 0,86 & 1,11 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{IV layer} \\ \text{III layer} \\ \text{II layer} \\ \text{I layer} \end{matrix} \end{matrix}. \quad (34)$$

Вероятность макрослоя «отработать» весь ресурс без преждевременного изъятия зависит от параметра  $t = r/(p+r)$ . Степени  $t$  определяют вероятности того, что трещина переходит в следующий слой. При этом на период нахождения трещины в слое не накладывается никаких ограничений.

Выражения для  $N_2$ ,  $\tau$ ,  $\tau_2$  записываются в виде

$$N_2 = \frac{1}{(p+r)^2} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ qt+t-t^2 & q & 0 & 0 \\ qt^2+t^2-t^4 & qt+t-t^2 & q & 0 \\ qt^3+t^3-t^6 & qt^2+t^2-t^4 & qt+t-t^2 & q \end{pmatrix},$$

$$\tau = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t^2 \\ 1-t^3 \\ 1-t^4 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} q(1-t) \\ q(1-t^2)+t-2t^2+t^3 \\ q(1-t^3)+t+t^2-4t^3+t^4+t^5 \\ q(1-t^4)+t+t^2-4t^3+6t^4+t^5+t^6+t^7 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{(p+r)^2} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1-t^2 & t^2 \\ 1-t^3 & t^3 \\ 1-t^4 & t^4 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Числовые значения соответствующих величин будут равны:

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,1 & 0 \\ 0,36 & 0,3 & 0,25 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1,15 \\ 2,05 \\ 2,75 \\ 3,25 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,04 \\ 1,22 \\ 2,54 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,40 & 0,60 \\ 0,53 & 0,47 \\ 0,63 & 0,37 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Здесь  $N_2$ , согласно формуле (7), – дисперсия времени перехода из невозвратного состояния  $S_i$  в невозвратное состояние  $S_j$ ;  $\tau$  – математическое ожидание времени  $t$ , которое процесс проводит в невозвратных состояниях;  $\tau_2$  – дисперсия времени  $t$ .

Из примера при заданных вероятностях следует, что в случае, когда трещина дошла до третьего слоя, вероятность всего слоя «доработать» штатно становится больше 0,5, а вероятность досрочной выбраковки (исчерпания ресурса) уменьшается.

Первый столбец матрицы  $\mathbf{B}$  определяет вероятности досрочного изъятия слоистого пакета в зависимости от положения вершины трещины. Второй столбец  $\mathbf{B}$  определяет вероятности штатной эксплуатации слоистого пакета в зависимости от того, в каком слое находится вершина трещины. Таким образом, при сравнительно небольшом числе слоев можно получить информацию о решении задач, сформулированных выше.

**Выводы.** 1. Дискретные механизмы продвижения трещины или накопления повреждений могут быть описаны конечными марковскими цепями, позволяющими сопоставить стадиям разрушения состояния марковской цепи. Например, поглощающее состояние описывает остановку трещины, невозвратное состояние описывает транзит трещины.

2. С помощью матрицы условных вероятностей вычисляются средние характеристики процесса: математическое ожидание, дисперсия времени перехода из одного заданного состояния в другое. Вычисленные величины имеют смысл среднего ресурса и дисперсии ресурса стратифицированного слоя, синтезированного на твердой подложке по аддитивной технологии.

3. На основе вычисленных средних характеристик решаются задачи проектирования макрослоя, синтезированного из микрослоев по аддитивной технологии и обладающего максимальным временем службы (ресурса), характеризующим стабильность процесса синтеза.

4. Задачи поиска экстремальных значений среднего ресурса и дисперсии решаются методами динамического программирования на графах, соответствующих вычисленным матрицам переходных вероятностей.

5. Проектирование трещиностойкого слоистого покрытия основано на разработке алгоритма поиска максимума прочности за счет выбора толщин отдельных слоев и макрослоя в целом, физико-механических материальных коэффициентов слоев и их совместимости, данные о которых сосредоточены в базе данных проекта.

6. В численном примере, моделирующем некоторые сценарии разрушения четырехслойной системы, покрытие штатно обрабатывает ресурс, пока не будут последовательно разрушены все 4 слоя. Другие сценарии описывают случаи возникновения трещины в каком-либо слое и возможность катастрофического разрушения всего слоя. Вычислены матрицы соответствующих вероятностей.

### Список использованных источников

1. Тиханов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тиханов, М. А. Миронов. – М.: Совет. радио, 1977. – 488 с.
2. Spitzer, F. Principles of Random Walk / F. Spitzer. – Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company, Inc., 1964. – 472 p.
3. Кемени, Дж. Конечные цепи Маркова: пер. с англ. / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – М.: Наука, 1970. – 271 с.
4. Богданов, Дж. Вероятностные модели накопления повреждений / Дж. Богданов, Ф. Козин. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
5. Cappelli, M. The evolution of multi-site small cracks under fatigue loading: PhD Thesis / M. Cappelli. – Georgia Institute of Technology, 2007.
6. Garsted, L. The Fracture Mechanical Markov Chain Fatigue Model Compared with Empirical Data [Electronic Resource] / L. Garsted, R. Brincker, L. P. Hansen. – Aalborg: Dept. of Building and Structural Engineering, Aalborg University, 1994. – Mode of access: [https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/204441130/The\\_Fracture\\_Mechanical\\_Markov\\_Chain\\_Fatigue\\_Model\\_Compared\\_with\\_Empirical\\_Data.pdf](https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/204441130/The_Fracture_Mechanical_Markov_Chain_Fatigue_Model_Compared_with_Empirical_Data.pdf).
7. Garsted, L. Fracture mechanical Markov chain of crack growth model / L. Garsted, R. Brincker, L. P. Hansen // Eng. Fract. Mech. – 1991. – Vol. 38, № 6. – P. 475–489. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(91\)90097-k](https://doi.org/10.1016/0013-7944(91)90097-k)
8. Савельев, Л. Я. Простые стохастические модели трещин / Л. Я. Савельев // Сиб. журн. индустр. математики. – 2014. – Т. 17, № 2 – С. 97–107.
9. Савельев, Л. Я. Марковская модель динамики трещин специального типа / Л. Я. Савельев // Сиб. журн. индустр. математики. – 2018. – Т. 21, № 1 – С. 72–79.
10. Wagner, H. M. Principles of Operations Research. Vol. 3 / H. M. Wagner. – Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969. – 500 p.
11. Пестриков, В. М. Механика разрушения твердых тел / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – СПб.: Профессия, 2002. – 300 с.

12. Морозов, Е. М. Вариационный принцип в механике разрушения / Е. М. Морозов // Докл. Акад. наук СССР. – 1969. – Т. 184, № 6. – С. 1308–1311.
13. Чигарев, А. В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А. В. Чигарев. – Минск: Техно-принт, 2000. – 426 с.
14. Казаков, В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи / В. А. Казаков. – М.: Совет. радио, 1973. – 231 с.
15. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
16. Черепанов, Г. П. Механика разрушения / Г. П. Черепанов, Л. В. Ершов. – М.: Машиностроение, 1977. – 223 с.
17. Баничук, Н. Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов / Н. Б. Баничук, В. В. Кобелев, Р. Б. Рикардс. – М.: Машиностроение, 1988. – 224 с.

## References

1. Tikhanov V. I., Mironov M. A. *Markov Processes*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1977. 488 p. (in Russian).
2. Spitzer F. *Principles of Random Walk*. Princeton New Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc., 1964. 472 p.
3. Kemeny J. G., Snell J. L. *Finite Markov Chains*. Springer-Verlag, 1960. 238 p.
4. Bogdanoff J. L., Kozin F. *Probabilistic Models of Cumulative Damage*. New York: John Wiley & Sons, 1985. 341 p.
5. Cappelli M. *The evolution of multi-site small cracks under fatigue loading*. PhD Thesis. Georgia Institute of Technology, 2007.
6. Garsted, L., Brincker R., Hansen L. P. (1994) *The Fracture Mechanical Markov Chain Fatigue Model Compared with Empirical Data*. Aalborg, Dept. of Building and Structural Engineering, Aalborg University, 1994. Available at: [https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/204441130/The\\_Fracture\\_Mechanical\\_Markov\\_Chain\\_Fatigue\\_Model\\_Compared\\_with\\_Empirical\\_Data.pdf](https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/204441130/The_Fracture_Mechanical_Markov_Chain_Fatigue_Model_Compared_with_Empirical_Data.pdf).
7. Garsted L., Brincker R., Hansen L. P. Fracture mechanical Markov chain of crack growth model. *Engineering Fracture Mechanics*, 1991, vol. 38, no. 6, pp. 475–489. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(91\)90097-k](https://doi.org/10.1016/0013-7944(91)90097-k)
8. Saveliev L. Y. Simple stochastic models of cracks. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, vol. 8, pp. 385–394. <https://doi.org/10.1134/S1990478914030119>
9. Saveliev L. Y. Markov model of crack dynamics of special type. *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, pp. 145–152. <https://doi.org/10.1134/s1990478918010131>
10. Wagner H. M. *Principles of Operations Research. Vol. 3*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall. Inc., 1969. 500 p.
11. Pestrikov V. M., Morozov E. M. *Fracture Mechanics of Solids*. St. Petersburg, Professiya Publ., 2002. 300 p. (in Russian).
12. Morozov E. M. Variation Principle in Fracture Mechanics. *Doklady akademii nauk SSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of USSR], 1969, vol. 184, no. 6, pp. 1308–1311 (in Russian).
13. Chigarev A. V. *Stochastic and Regular Dynamics of Non-Homogeneous Media*. Minsk, Tekhnoprint Publ., 2000. 426 p. (in Russian).
14. Kazakov V. A. *Introduction to the Theory of Markov Processes and Some Radio Engineering Tasks*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1973. 231 p. (in Russian).
15. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mechanics of Multilayer Structures*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p. (in Russian).
16. Cherepanov G. P., Ershov L. V. *Fracture Mechanics*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 223 p. (in Russian).
17. Banichuk N. B., Koblelev V. V., Rickards R. B. *Optimization of Structural Elements from Composite Materials*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 224 p. (in Russian).

## Информация об авторах

**Журавков Михаил Анатольевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 9, 220006, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [zhuravkov@bsu.by](mailto:zhuravkov@bsu.by)

**Замжицкая-Чигарева Юлия Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЛ прикладной механики кафедры теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 9, 220006, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [yuliatchigareva@yandex.by](mailto:yuliatchigareva@yandex.by)

## Information about the authors

**Michael A. Zhuravkov** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Belarusian State University (9, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [zhuravkov@bsu.by](mailto:zhuravkov@bsu.by)

**Yuliya Zamzhitskaya-Chigareva** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of Research laboratory of Applied mechanics, Department of Theoretical and Applied mechanics, Belarusian State University. (9, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [yuliatchigareva@yandex.by](mailto:yuliatchigareva@yandex.by)