ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 512.542
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-183-194

Поступила в редакцию 02.05.2024
Received 02.05.2024

И. П. Лось, В. Г. Сафонов

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

О СВОЙСТВАХ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

Аннотация. Изучаются свойства решетки $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций конечных групп. Доказана модулярность такой решетки формаций для любого подгруппового функтора τ и всякого непустого множества простых чисел ω. В частности, получен положительный ответ на вопрос А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова (2000 г.) о модулярности решетки $c^{\mathcal{L}}_{\infty}$ всех тотально $\mathcal{L}$-композиционных формаций. Установлено, что решетка $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ является полной подрешеткой решетки c^{ω}_{∞} всех тотально ω-композиционных формаций конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, формация групп, подгрупповой функтор, композиционная формация, ω-композиционная формация, тотально композиционная формация, решетка формаций

Для цитирования. Лось, И. П. О свойствах решетки τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций / И. П. Лось, В. Г. Сафонов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 3. – С. 183–194. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-183-194

Inna P. Los, Vasily G. Safonov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ON THE PROPERTIES OF THE LATTICE OF τ-CLOSED TOTALLY ω-COMPOSITION FORMATIONS

Abstract. We study the properties of the lattice $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ of all τ-closed totally ω-composition formations of finite groups. We prove the modularity of such a lattice of formations for any subgroup functor τ and any nonempty set ω of primes. In particular, we obtain a positive answer to the question of A. N. Skiba and L. A. Shemetkov (2000) about the modularity of the lattice $c^{\mathcal{L}}_{\infty}$ of all totally $\mathcal{L}$-composition formations. We establish that the lattice $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ is a complete sublattice of the lattice c^{ω}_{∞} of all totally ω-composition formations of finite groups.

Keywords: finite group, formation of groups, subgroup functor, composition formation, ω-composition formation, totally composition formation, lattice of formations

For citation. Los I. P., Safonov V. G. On the properties of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 183–194 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-183-194

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Используется терминология, принятая в [1, 2]. В статье А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [1] было введено понятие $\mathcal{L}$-композиционной формации конечных групп, где $\mathcal{L}$ – некоторый непустой класс простых групп, изучены основные свойства формаций такого типа, свойства решеток и произведений $\mathcal{L}$-композиционных, а также кратно $\mathcal{L}$-композиционных формаций. В частности, было показано, что формация является $\mathcal{L}$-композиционной тогда и только тогда, когда она $\mathcal{L}^{+}$-композиционна, где $\mathcal{L}^+$ – множество всех абелевых простых групп из $\mathcal{L}$. В этой связи, как отметили авторы, при изучении $\mathcal{L}$-композиционных формаций достаточно ограничиться случаем, когда класс простых групп $\mathcal{L}$ состоит только из простых абелевых групп, т. е. групп простого порядка, и использовать понятие ω-композиционной формации, где $\omega = \pi(\mathcal{L}^+)$ – множество простых делителей порядков групп из $\mathcal{L}^+$. Кроме того, в работе было поставлено более 20 открытых проблем теории частично композиционных формаций, определивших, по сути, перспективную программу исследований в данном направлении.

Настоящая работа посвящена изучению свойств решеток тотально ω-композиционных формаций и, в частности, решению задачи А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова о модулярности решетки $c_\infty^{\mathcal{L}}$ тотально $\mathcal{L}$-композиционных формаций (см. [1, проблема 2]). Мы развиваем идеи и методы, разработанные в [3, 4], при изучении решеток τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп. Отметим, что данная работа продолжает исследования А. А. Царева [5, 6], В. В. Щербины [7, 8], а также наши исследования [9, 10] по изучению свойств τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций и их решеток.

Напомним некоторые понятия теории τ-замкнутых ω-композиционных формаций [1, 2]. Пусть ω – непустое подмножество множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$.

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to$ {формации групп} называют ω-*композиционным спутником*. Для произвольного ω-композиционного спутника полагают

$$CF_\omega(f) = \Big\{G \mid G / R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G / C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega\Big\},$$

где Com(G) – множество всех абелевых композиционных факторов группы G, $R_\omega(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G, $C^p(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$).

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-*композиционна*, а f – ω-*композиционный спутник* этой формации.

Всякую формацию считают 0-*кратно* ω-*композиционной*, а при $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-*кратно* ω-*композиционной*, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями. Формацию, n-кратно ω-композиционную для любого натурального n, называют *тотально* ω-*композиционной*.

Подгрупповым функтором [2] называют отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп τ(G), что: 1) $G \in \tau(G)$; 2) для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ и любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют τ-*замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Подгрупповой функтор τ называют *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G, и *единичным*, если $\tau(G) = S(G)$ – множество всех подгрупп группы G для любой группы G.

Совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций обозначают через $c_{\omega_\infty}^\tau$. В частности, если τ – тривиальный подгрупповой функтор, то через c_∞^ω обозначают совокупность всех тотально ω-композиционных формаций. Формации из $c_{\omega_\infty}^\tau$ (соответственно из c_∞^ω) называют $c_{\omega_\infty}^\tau$-*формациями* (соответственно c_∞^ω-*формациями*).

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Тогда через $c_{\omega_\infty}^\tau \mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают τ-замкнутую тотально ω-композиционную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т. е. $c_{\omega_\infty}^\tau \mathrm{form}\mathfrak{X}$ – пересечение всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$.

Заметим, что множество $c_{\omega_\infty}^\tau$ относительно включения $\subseteq$ образует полную решетку, в которой $\vee_{\omega_\infty}^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_{\omega_\infty}^\tau \mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ и $\cap_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ являются, соответственно, точной верхней и точной нижней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из $c_{\omega_\infty}^\tau$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают $\mathfrak{X}(C^p) = \mathrm{form}\big(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big)$, если $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big)$ и $\mathfrak{X}(C^p) = \varnothing$, если $p \notin \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big)$.

Пусть f – ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда, если все значения f содержатся в $\mathfrak{F}$, спутник f называют *внутренним*. Спутник f называют $c^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значным,* если все его значения принадлежат $c^{\tau}_{\omega_\infty}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\cap_{i\in I} f_i$ – ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называют *минимальным* ω*-композиционным* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ *-значным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значных спутников. Тогда ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник $f = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j \mid j \in J)$ определяют следующим образом:

$$f(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j \mid j \in J)(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\left(f_j(a) \mid j \in J\right) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\left(\cup_{j\in J} f_j(a)\right)$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. В частности,

$$f(a) = \left(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2\right)(a) = f_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2(a) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\left(f_1(a) \cup f_2(a)\right).$$

Всякая ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-композиционный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник формации $\mathfrak{F}$ называют *каноническим* ω*-композиционным спутником* и обозначают через F. Отметим, что если $\mathfrak{F}$ – $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формация, то F является $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значным в силу [7, лемма 2.2].

Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп K группы G с $G/K \in \mathfrak{F}$ и называют $\mathfrak{F}$*-корадикалом* группы G. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то гашюцово произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$.

Вспомогательные результаты. Нам понадобятся некоторые известные факты теории частично композиционных формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Частным случаем леммы 5 работы [1] является

Л е м м а 1 [1, лемма 5]. *Если* $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, $\pi = \omega \cap \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\right)$ *и f – минимальный ω-композиционный* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ *-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\left(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\right)$;

2) $f(p) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\left(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\right)$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\right)$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\right)$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ *и спутник h* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ *-значен, то для всех* $p \in \omega \cap \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\right)$ *имеет место* $f(p) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\left(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1\right)$ *и* $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\left(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(A) = 1\right)$;

5) $\pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\right) \cap \omega = \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\right) \cap \omega$.

Л е м м а 2 [1, теорема 6]. *Пусть формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$ *и спутники h и m являются внутренними. Тогда, если* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, *то* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = m(p)\mathfrak{H}$, *если* $m(p) \neq \varnothing$ *и* $f(p) = h(p)$, *если* $m(p) = \varnothing$.

Л е м м а 3 [1, лемма 12]. *Пусть* $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(F_i)$ $(i = 1, 2)$, *где* $F_1(\omega') = \mathfrak{F}_1$, $F_2(\omega') = \mathfrak{F}_2$, *причем спутники F_1 и F_2 являются* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ *-значными и внутренними. Тогда, если* $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$, *то* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* $f(a) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\left(F_1(a) \cup F_2(a)\right)$ *при любом* $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Л е м м а 4 [1, лемма 4]. *Если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ *и* $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$, *для некоторого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Л е м м а 5 [2, с. 167]. *Решетка* l^{τ}_n *модулярна, но не дистрибутивна.*

Л е м м а 6 [1, лемма 2]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(F_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* $f = \cap_{i\in I} F_i$.

Л е м м а 7 [7, лемма 3.1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая τ-замкнутая формация, π – такое множество простых чисел, что* $\pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\right) \cap \omega \subseteq \pi$. *Тогда формация* $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ *является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией.*

Л е м м а 8 [1, лемма 9]. *Пусть формация* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $G \notin \mathfrak{F}$. *Тогда либо* $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq R_\omega(G)$, *либо найдется такое* $p \in \pi\left(\mathrm{Com}(G^{\mathfrak{F}})\right) \cap \omega$, *что* $G/C^p(G) \notin f(p)$.

Л е м м а 9 [1, лемма 1]. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G, A – простая группа. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $A \notin \mathcal{K}(N)$, *то* $C^A(G/N) = C^A(G)/N$;

2) *если* $N \subseteq \Phi(L)$ *для некоторой нормальной разрешимой подгруппы L группы G, то* $C^p(G/N) = C^p(G)/N$;

3) *если* $N \in E\mathcal{L}$, *то* $(G/N)_{E\mathcal{L}} = G_{E\mathcal{L}}/N$.

Л е м м а 10 [11, лемма 1.2]. *В любой конечной группе G, имеющей главные p-факторы,* $\mathfrak{G}_{cp}$*-радикал совпадает с пересечением централизаторов всех p-факторов группы G.*

Л е м м а 11 [2, следствие 1.2.24]. *Для любого набора τ-замкнутых формаций* $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ *имеет место* $\tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{M}_i) = \mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)$.

Л е м м а 12 [7, теорема 2.2]. *Решетка* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ *всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является индуктивной.*

Модулярность решетки $c^{\tau}_{\omega_\infty}$**.**

Л е м м а 13. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}_i$ *– некоторые формации, i ∈ I. Тогда, если формация* $\mathfrak{M}$ *радикальна, то* $\cap_{i\in I}(\mathfrak{M}\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{M}(\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. *В частности,* $\cap_{i\in I}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{N}_p(\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если формация $\mathfrak{M} = \varnothing$ или $\mathfrak{F}_i = \varnothing$ для некоторого $i \in I$, то утверждение очевидно. Поэтому мы можем считать, что $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{F}_i \neq \varnothing$ для всех $i \in I$.

Положим $\mathfrak{L}_1 = \cap_{i\in I}(\mathfrak{M}\mathfrak{F}_i)$, $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{M}(\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Покажем вначале, что $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$. Пусть $A \in \mathfrak{L}_1$. Тогда $A^{\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{M}$ и $A/A_{\mathfrak{M}} \in \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $A_{\mathfrak{M}}$ – $\mathfrak{M}$-радикал группы A. Следовательно, $A^{\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{M}$ и $A \in \mathfrak{M}(\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{L}_2$. Таким образом, $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$.

Пусть теперь $A \in \mathfrak{L}_2$. Тогда $K = A^{\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{M}$. Поэтому $A^{\mathfrak{F}_i} \subseteq K$ для любого $i \in I$. Поскольку формация $\mathfrak{M}$ радикальна, то $A^{\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{M}$, и, следовательно, $A \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$. Значит, $A \in \cap_{i\in I}(\mathfrak{M}\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_1$. Таким образом, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$.

Поскольку формация $\mathfrak{N}_p$ радикальна, то $\cap_{i\in I}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{N}_p(\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Лемма доказана.

Л е м м а 14. *Пусть* $\mathfrak{F}_i$ *– τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация, i ∈ I и p ∈ ω. Тогда* $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\mathfrak{X}_1 := \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ и $\mathfrak{X}_2 := \mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\right)$. Поскольку, очевидно, $\mathfrak{F}_i \subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, то

$$\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\right) = \mathfrak{X}_2.$$

Значит, $\mathfrak{X}_1 = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i) \subseteq \mathfrak{X}_2$.

Допустим, что $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда A – монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{X}_1}$. Если P – неабелева группа или абелева p'-группа, то $A \in \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \subseteq \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, P – абелева p-группа. Так как $\mathfrak{X}_1$ – ω-композиционная формация и $p \in \omega$, то $P \not\subseteq \Phi(A)$. Поэтому $P = C^p(A) = O_p(A)$.

Согласно лемме 1 формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник n, что $n(p) = (1)$. Тогда по лемме 2 формации $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{X}_2$ имеют такие внутренние ω-композиционные спутники f_i и x_2 соответственно, что $f_i(\omega') = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_i$, $f_i(p) = (1)\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i$, $f_i(q) = F_i(q)$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $x_2(\omega') = \mathfrak{N}_p\left(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\right)$, $x_2(p) = (1)\left(\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\right) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, и $x_2(q) = X_2(q)$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$, где F_i и X_2 – канонические ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{F}_i$ и $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ соответственно. Поэтому ввиду леммы 12 формация $\mathfrak{X}_1$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник x_1, что $x_1(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\left(f_i(p) \mid i \in I\right) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Следовательно, $x_1(p) = x_2(p)$. Поскольку $A \in \mathfrak{X}_2$, то

$$A/O_p(A) = A/C^p(A) \in x_2(p) = x_1(p).$$

Но тогда $A \in \mathfrak{X}_1$ ввиду леммы 4. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из ω и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_n}$ определим следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1} = \left(A / C^{p_1}(A) \mid A \in \mathfrak{X}\right)$;

2) $\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_n} = \left(A / C^{p_n}(A) \mid A \in \mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{n-1}}\right)$.

Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из ω будем называть *подходящей для* $\mathfrak{X}$ ω-*последовательностью*, если $p_1 \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$ и $p_i \in \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{i-1}})\right)$ для всех $i = 2, \ldots, n$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – некоторая подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность. Тогда $c_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный ω-композиционный спутник $Fp_1p_2\ldots p_n$ определим следующим образом:

1) Fp_1 – канонический ω-композиционный спутник формации $F(p_1)$;

2) $Fp_1\ldots p_n$ – канонический ω-композиционный спутник формации $Fp_1\ldots p_{n-1}(p_n)$.

Пусть $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ – тотально ω-композиционные формации. Тогда для любой подходящей для $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ ω-последовательности $p_1, \ldots, p_n$ через L, H, Lp_1, $Hp_1, \ldots,$ $Lp_1\ldots p_n$, $Hp_1\ldots p_n$ обозначим такие $c_{\omega_\infty}^{\tau}$-значные ω-композиционные спутники, что

$$L(a) = X(a) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \left(M(a) \cap F(a)\right), \quad H(a) = \left(X(a) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} M(a)\right) \cap F(a),$$

$$Lp_1(a) = Xp_1(a) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \left(Mp_1(a) \cap Fp_1(a)\right), \quad Hp_1(a) = \left(Xp_1(a) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} Mp_1(a)\right) \cap Fp_1(a),$$

$$\ldots,$$

$$Lp_1p_2,\ldots p_n(a) = Xp_1p_2\ldots p_n(a) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \left(Mp_1p_2\ldots p_n(a) \cap Fp_1p_2\ldots p_n(a)\right),$$

$$Hp_1p_2\ldots p_n(a) = \left(Xp_1p_2\ldots p_n(a) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} Mp_1p_2\ldots p_n(a)\right) \cap Fp_1p_2\ldots p_n(a)$$

для всякого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Л е м м а 15. *Пусть* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ – τ-*замкнутые тотально* ω-*композиционные формации*, $\mathfrak{L} = \mathfrak{X} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} = (\mathfrak{X} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{L})) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})) \cap \omega$;

2) *для любой подходящей для* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{M}$ ω-*последовательности* $p_1, \ldots, p_n$ $c_{\omega_\infty}^{\tau}$-*значные* ω-*композиционные спутники* L, H, Lp_1, $Hp_1, \ldots,$ $Lp_1\ldots p_n$, $Hp_1\ldots p_n$ *являются каноническими* ω-*композиционными спутниками формаций* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{H}$, $L(p_1)$, $H(p_1)$, ..., $Lp_1\ldots p_{n-1}(p_n)$, $Hp_1\ldots p_{n-1}(p_n)$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем справедливость утверждения 1). Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$, то

$$\sigma_1 = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{L})) \cap \omega \subseteq \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})) \cap \omega = \sigma_2.$$

Допустим, что $\sigma_2 \setminus \sigma_1 \neq \varnothing$ и $p \in \sigma_2 \setminus \sigma_1$. Тогда $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{X} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{M})\right)$.

Пусть t – такой $c_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный ω-композиционный спутник, что $t(q) = X(q) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} M(q)$ для любого $q \in \omega$ и $t(\omega') = \mathfrak{X} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{M}$. Тогда t является $c_{\omega_\infty}^{\tau}$-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{X} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{M}$ в силу леммы 3. Поскольку $p \in \pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{X} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{M})\right) \cap \omega$, то $t(p) \neq \varnothing$ по лемме 1. С другой стороны, если $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) \cup \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$, то $X(p) = \varnothing$ и $M(p) = \varnothing$ опять же по лемме 1. Следовательно, $t(p) = \varnothing$. Противоречие. Значит, $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) \cup \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$. Поэтому $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \left(\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) \cup \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))\right)$. Но тогда $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{L}))$. Следовательно, $p \in \sigma_1$. Таким образом, $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{L})) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})) \cap \omega$.

Докажем теперь утверждение 2). Пусть X, M, F – канонические ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Тогда $h_1 = X \vee_{\omega_\infty}^{\tau} M$ является внутренним $c_{\omega_\infty}^{\tau}$-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{X} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{M}$ в силу леммы 3 и $l_1 = M \cap F$ является внутренним $c_{\omega_\infty}^{\tau}$-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ по лемме 6. Применяя теперь леммы 13 и 14, получим, что для любого $p \in \omega$ имеют место равенства

$$h_1(p) = X(p) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} F(p) = \mathfrak{N}_p M(p) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{N}_p F(p) = \mathfrak{N}_p \left(M(p) \vee_{\omega_\infty}^{\tau} F(p)\right) = \mathfrak{N}_p h_1(p),$$

$$l_1(p)=M(p)\cap F(p)=\mathfrak{N}_pM(p)\cap\mathfrak{N}_pF(p)=\mathfrak{N}_p\left(M(p)\cap F(p)\right)=\mathfrak{N}_pl_1(p),$$

а также

$$h_1(\omega')=X(\omega')\vee_{\omega_\infty}^{\tau}F(\omega')=\mathfrak{X}\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\mathfrak{F},\quad l_1(\omega')=M(\omega')\cap F(\omega')=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}.$$

Поэтому h_1 и l_1 – канонические ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{X}\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}$ соответственно.

Применяя теперь леммы 3 и 6 для ω-композиционных спутников $L=X\vee_{\omega_\infty}^{\tau}l_1$ и $H=h_1\cap F$, а также используя леммы 13 и 14, заключаем, что $L=X\vee_{\omega_\infty}^{\tau}l_1$ и $H=h_1\cap F$ – канонические ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, т. е.

$$L(a)=X(a)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\left(M(a)\cap F(a)\right),\quad H(a)=\left(X(a)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}M(a)\right)\cap F(a)$$

для всякого $a\in\omega\cup\{\omega'\}$.

Пусть теперь $p_1,\dots,p_n$ – некоторая подходящая для $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ ω-последовательность. Тогда, поскольку $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$, данная ω-последовательность является также подходящей ω-последовательностью и для $\mathfrak{F}$. По определению $Xp_1\dots p_i$, $Mp_1\dots p_i$, $Fp_1\dots p_i$ – канонические ω-композиционные спутники формаций $Xp_1\dots p_{i-1}(p_i)$, $Mp_1\dots p_{i-1}(p_i)$ и $Fp_1\dots p_{i-1}(p_i)$ $(i=1,\dots,n)$ соответственно, поэтому, применяя леммы 3, 6, 13 и 14, получим, что $h_1=Xp_1\dots p_i\vee_{\omega_\infty}^{\tau}Mp_1\dots p_i$ и $l_1=Mp_1\dots p_i\cap Fp_1\dots p_i$ являются каноническими ω-композиционными спутниками формаций $Xp_1\dots p_{i-1}(p_i)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}Mp_1\dots p_{i-1}(p_i)$ и $Mp_1\dots p_{i-1}(p_i)\cap Fp_1\dots p_{i-1}(p_i)$ соответственно. Поэтому снова, применяя леммы 3 и 6, а также леммы 13 и 14, получаем, что $L=Xp_1\dots p_i\vee_{\omega_\infty}^{\tau}l_1$ и $H=h_1\cap Fp_1\dots p_i$ – канонические ω-композиционные спутники соответственно формаций

$$Xp_1\dots p_{i-1}(p_i)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\left(Mp_1\dots p_{i-1}(p_i)\cap Fp_1\dots p_{i-1}(p_i)\right)=Lp_1\dots p_{i-1}(p_i)$$

и

$$\left(Xp_1\dots p_{i-1}(p_i)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}Mp_1\dots p_{i-1}(p_i)\right)\cap Fp_1\dots p_{i-1}(p_i)=Hp_1\dots p_{i-1}(p_i),$$

т. е. для всех $i=1,\dots,n$ имеет место

$$Lp_1p_2,\dots p_i(a)=Xp_1p_2\dots p_i(a)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\left(Mp_1p_2\dots p_i(a)\cap Fp_1p_2\dots p_i(a)\right),$$

$$Hp_1p_2\dots p_i(a)=\left(Xp_1p_2\dots p_i(a)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}Mp_1p_2\dots p_i(a)\right)\cap Fp_1p_2\dots p_i(a)$$

для всякого $a\in\omega\cup\{\omega'\}$. Лемма доказана.

Напомним, что для всякого набора групп $\mathfrak{X}$ через $\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают τ-замкнутую формацию, порожденную $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех τ-замкнутых формаций, содержащих $\mathfrak{X}$.

Л е м м а 16. *Пусть* $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ *– τ-замкнутые тотально ω-композиционные формации,* $\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\cap(\mathfrak{X}\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\mathfrak{M})$ *и* $\mathfrak{L}=\mathfrak{X}\vee_{\omega_\infty}^{\tau}(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})$. *И пусть A – такая монолитическая группа, что ее монолит либо неабелева группа, либо абелева ω′-группа. Тогда, если* $A\in\mathfrak{H}$, *то* $A\in\mathfrak{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\pi=\pi\left(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\mathfrak{M})\right)\cap\omega$. В силу леммы 7 формация $\mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{M})$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной. Поэтому справедливо включение

$$\mathfrak{X}\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\mathfrak{M}=c_{\omega_\infty}^{\tau}\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{M})\subseteq\mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{M}).$$

Поскольку $A\in\mathfrak{X}\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\mathfrak{M}$, то $A\in\mathfrak{S}_\pi\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{M})$. Так как по условию леммы монолит группы A является либо неабелевой группой, либо абелевой ω′-группой, то $A\in\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{M})$. Следовательно, $A\in\mathfrak{F}\cap\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\mathfrak{M})=\mathfrak{F}\cap(\mathfrak{X}\vee^{\tau}\mathfrak{M})$. В силу леммы 5 имеет место равенство

$$\mathfrak{F}\cap(\mathfrak{X}\vee^{\tau}\mathfrak{M})=\mathfrak{X}\vee^{\tau}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{M}).$$

Значит, $A \in \mathfrak{X} \vee^{\tau} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$. Поскольку при этом справедливо включение

$$\mathfrak{X} \vee^{\tau} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) = \tau\mathrm{form}\big(\mathfrak{X} \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\big) \subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\mathfrak{X} \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\big) = \mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{L},$$

то $A \in \mathfrak{L}$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Решетка $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является модулярной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что теорема неверна. Тогда найдутся такие τ-замкнутые тотально ω-композиционные формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ и

$$\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \neq (\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}.$$

Положим $\mathfrak{L} := \mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} := (\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

Выберем в $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L}$ группу A минимального порядка. Тогда A – τ-минимальная монолитическая группа и $\mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{L}}$.

Предположим, что $\pi\big(\mathrm{Com}\big(\mathrm{Soc}(A)\big)\big) \cap \omega = \varnothing$. Тогда, поскольку $A \in \mathfrak{H}$, то $A \in \mathfrak{L}$ в силу леммы 16. Противоречие. Поэтому $\pi\big(\mathrm{Com}\big(\mathrm{Soc}(A)\big)\big) \cap \omega \neq \varnothing$, и, следовательно, P – абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \omega$. Так как $\mathfrak{L}$ – ω-композиционная формация, то $P \not\subseteq \Phi\big(O_p(A)\big)$ и, следовательно, $P \not\subseteq \Phi(A)$. Поэтому $P = O_p(A) = C^p(A)$ и $A = P \rtimes A_1$, где A_1 – некоторая максимальная подгруппа из A.

Ввиду леммы 15 имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{L})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$ и, кроме того, канонические ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ такие, что

$$L(p) = X(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \big(M(p) \cap F(p)\big), \quad H(p) = \Big(X(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} M(p)\Big) \cap F(p).$$

Поэтому A не является p-группой и $L(p) \neq \varnothing$. Понятно, что $L(p) \subseteq H(p)$. Кроме того, поскольку $A \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{L}$, то $L(p) \subset H(p)$. Действительно, если $L(p) = H(p)$, то

$$A / O_p(A) = A / C^p(A) \in H(p) = L(p)$$

и $A \in \mathfrak{L}$ по лемме 4. Противоречие. Таким образом, $A_1 \simeq A / C^p(A) \in H(p) \setminus L(p)$.

По лемме 15 имеем $\pi\big(\mathrm{Com}\big(L(p)\big)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}\big(H(p)\big)\big) \cap \omega$ и, кроме того, канонические ω-композиционные спутники Lp и Hp формаций $L(p)$ и $H(p)$ соответственно, такие, что

$$Lp(a) = Xp(a) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \big(Mp(a) \cap Fp(a)\big), \quad Hp(a) = \Big(Xp(a) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} Mp(a)\Big) \cap Fp(a)$$

для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Поскольку $A_1 \notin L(p) \neq \varnothing$, то $L(p)$-корадикал L_1 группы A_1 отличен от единичной подгруппы, и в силу леммы 8 выполняется одно из следующих условий: а) $L_1 \not\subseteq R_\omega(A_1)$; б) найдется такое простое число $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}\big(L(p)\big)\big) \cap \omega$, что $A_1 / C^{p_1}(A_1) \notin Lp(p_1)$.

Пусть имеет место а). Обозначим через S_1 – $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы A_1, и пусть $B = A_1 / S_1$. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа группы B является неабелевой группой или абелевой ω′-группой. Поскольку $B \in H(p) = \Big(X(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} M(p)\Big) \cap F(p)$, то по лемме 16 получаем, что $B \in X(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \big(M(p) \cap F(p)\big) = L(p)$. Поэтому $A_1 / S_1 \in L(p)$. Следовательно, $L(p)$-корадикал группы A_1 является ω-группой. Противоречие. Поэтому случай а) невозможен.

Пусть теперь имеет место условие б). Так как $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}\big(L(p)\big)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}\big(H(p)\big)\big) \cap \omega$, то $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}\big(L(p)\big)\big) \cap \omega$, и, следовательно, ввиду леммы 1 имеем $Lp(p_1) \neq \varnothing$. Кроме того, $C^{p_1}(A_1) \subset A_1$, поскольку в противном случае $A_1 / C^{p_1}(A_1) \simeq 1 \in Lp(p_1) \neq \varnothing$, что невозможно. Заметим также, что $C^{p_1}(A_1) \neq 1$. Действительно, если в A_1 найдется такая минимальная нормальная подгруппа R, что $p_1 \notin \pi\big(\mathrm{Com}(R)\big)$, то $R \subseteq C^{p_1}(A_1)$ по лемме 9. С другой стороны, если в группе A_1 имеется минимальная нормальная p_1-подгруппа R, то $R \subseteq C^{p_1}(A_1)$ в силу леммы 10. Таким образом, имеем

$$A_1 / C^{p_1}(A_1) \in Hp(p_1) \setminus Lp(p_1), \quad Lp(p_1) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p_1}(A_1) \subset A_1.$$

Пусть $A_2 = A_1 / C^{p_1}(A_1)$. В силу леммы 15 имеем $\pi\big(\mathrm{Com}\big(Lp(p_1)\big)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}\big(Hp(p_1)\big)\big) \cap \omega$ и формации $Lp(p_1)$ и $Hp(p_1)$ имеют такие канонические спутники Lpp_1 и Hpp_1 соответственно, что

$$Lpp_1(a) = Xpp_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \big(Mpp_1(a) \cap Fpp_1(a)\big),$$

$$Hpp_1(a) = \Big(Xpp_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} Mpp_1(a)\Big) \cap Fpp_1(a)$$

для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Поскольку $A_2 \not\in Lp(p_1) \neq \varnothing$, то $Lp(p_1)$-корадикал K группы A_2 неединичная подгруппа. По лемме 8 имеет место одно из следующих утверждений: (а) $K \not\subseteq R_\omega(A_2)$; (б) найдется такое простое число $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(K)\big) \cap \omega$, что $A_2 / C^{p_2}(A_2) \notin Lpp_1(p_2)$.

Пусть выполняется условие (а) и R – $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы A_2. Обозначим через C группу A_2/R. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа группы C либо неабелева, либо абелева ω'-группа. Применяя теперь лемму 16, получим, что $C \in Lp(p_1)$. Следовательно, $Lp(p_1)$-корадикал группы A_2 является ω-группой. Последнее противоречит условию (а).

Пусть имеет место (б). Поскольку $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(K)\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}\big(Hp(p_1)\big)\big) \cap \omega$, то $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}\big(Lp(p_1)\big)\big) \cap \omega$ и $Lpp_1(p_2) \neq \varnothing$ по лемме 1. Снова используя леммы 9 и 10 и проведя для группы A_2 такие же рассуждения, как для группы A_1, получим, что

$$A_2 / C^{p_2}(A_2) \in Hpp_1(p_2) \setminus Lpp_1(p_2), \quad Lpp_1(p_2) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p_2}(A_2) \subset A_2.$$

Пусть $A_3 = A_2 / C^{p_2}(A_2)$. Проведя аналогичные рассуждения для группы A_2, получим

$$A_3 / C^{p_3}(A_3) \in Hpp_1p_2(p_3) \setminus Lpp_1p_2(p_3), \quad Lpp_1p_2(p_3) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p_3}(A_3) \subset A_3.$$

Поэтому, продолжая этот процесс, мы получим группы

$$A_4 = A_3 / C^{p_3}(A_3), \ldots, A_i = A_{i-1} / C^{p_{i-1}}(A_{i-1}), \ldots .$$

При этом для любого i выполняются условия

$$A_i = A_{i-1} / C^{p_{i-1}}(A_{i-1}) \in Hpp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}) \setminus Lpp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}),$$

$$Lpp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p_{i-1}}(A_{i-1}) \subset A_{i-1}.$$

В силу условия $C^{p_{i-1}}(A_{i-1}) \neq 1$ для построенной последовательности групп

$$A, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots$$

имеют место неравенства

$$|A| > |A_1| > |A_2| > |A_3| > \ldots > |A_i| > \ldots .$$

Так как группа A конечна, то на некотором шаге m мы получим $A_m = 1$. Поскольку при этом $A_m = A_{m-1} / C^{p_{m-1}}(A_{m-1})$, то $C^{p_{m-1}}(A_{m-1}) = A_{m-1}$. Противоречие. Таким образом, наше предположение неверно и $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}$. Теорема доказана.

Теорема 1 имеет ряд следствий, представляющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Приведем здесь лишь некоторые из них. Пусть τ – тривиальный подгрупповой функтор. Тогда из теоремы 1 получаем

С л е д с т в и е 1. *Решетка c^{ω}_{∞} всех тотально ω-композиционных формаций является модулярной.*

Отметим, что следствие 1 дает положительный ответ на вопрос А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова о модулярности решетки $c^{\mathcal{L}}_{\infty}$ (см. [1, проблема 2]).

Если $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то из теоремы 1 вытекает

С л е д с т в и е 2. *Решетка c^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций является модулярной.*

В частности, если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, то следствием теоремы 1 является следующий факт.

Следствие 3. *Решетка c_∞ всех тотально композиционных формаций модулярна.*

Подрешетки решетки c_∞^ω всех тотально ω-композиционных формаций. Теперь покажем, что для любого подгруппового функтора τ решетка $c_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций вкладывается в качестве подрешетки в решетку c_∞^ω всех тотально ω-композиционных формаций, т. е. справедлива

Теорема 2. *Решетка $c_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞^ω всех тотально ω-композиционных формаций.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторое множество τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций, $\mathfrak{L} = \vee_{\omega_\infty}^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_{\omega_\infty}^\tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ и $\mathfrak{H} = \vee_\infty^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_\infty^\omega\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. И пусть L, H, F_i – канонические ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}_i$ соответственно. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}$.

Допустим противное. Тогда, поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{L} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$.

Ввиду леммы 7 формация $\mathfrak{S}_\omega\tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной. Поэтому имеет место включение

$$\mathfrak{L} = \vee_{\omega_\infty}^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_{\omega_\infty}^\tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) \subseteq \mathfrak{S}_\omega\tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i).$$

Кроме того, поскольку по условию теоремы $\mathfrak{F}_i$ – τ-замкнутая формация для любого $i \in I$, то в силу леммы 11 имеем $\tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Значит, $G \in \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{S}_\omega\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$.

Теперь, если P – неабелева группа или абелева ω'-группа, то

$$G \in \mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) \subseteq c_\infty^\omega\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \vee_\infty^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathfrak{H}.$$

Противоречие. Поэтому P – абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $\mathfrak{H}$ – ω-композиционная формация, то $P \not\subseteq \Phi\big(O_p(G)\big)$, и, следовательно, $P \not\subseteq \Phi(G)$. Отсюда получаем, что $P = O_p(G) = C^p(G)$ и $G = P \rtimes G_1$, где G_1 – некоторая максимальная подгруппа группы G.

Применяя теперь лемму 12, получим, что $\mathfrak{L} = CL_\omega(l)$, где l – такой внутренний $c_{\omega_\infty}^\tau$-значный ω-композиционный спутник, что $l(a) = c_{\omega_\infty}^\tau\mathrm{form}\big(\cup_{i\in I}F_i(a)\big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, и $\mathfrak{H} = CL_\omega(h)$, где h – такой внутренний c_∞^ω-значный ω-композиционный спутник, что $h(a) = c_\infty^\omega\mathrm{form}\big(\cup_{i\in I}F_i(a)\big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Поскольку

$$l(\omega') = \vee_{\omega_\infty}^\tau\big(F_i(\omega') \mid i \in I\big) = \vee_{\omega_\infty}^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I),$$

$$h(\omega') = \vee_\infty^\omega\big(F_i(\omega') \mid i \in I\big) = \vee_\infty^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$$

и в силу леммы 14 для любого $p \in \omega$ имеют место равенства

$$\mathfrak{N}_p l(p) = \mathfrak{N}_p\Big(\vee_{\omega_\infty}^\tau\big(F_i(p) \mid i \in I\big)\Big) = \vee_{\omega_\infty}^\tau\big(\mathfrak{N}_p F_i(p) \mid i \in I\big) = \vee_{\omega_\infty}^\tau\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = l(p),$$

$$\mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p\Big(\vee_\infty^\omega\big(F_i(p) \mid i \in I\big)\Big) = \vee_\infty^\omega\big(\mathfrak{N}_p F_i(p) \mid i \in I\big) = \vee_\infty^\omega\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = h(p),$$

то $l = L$ и $h = H$ – канонические ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. В силу леммы 1 имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{L})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$. Поэтому G не является p-группой и $H(p) \neq \varnothing$. Понятно также, что $H(p) \subseteq L(p)$. Кроме того, поскольку $G \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{H}$, то $H(p) \subset L(p)$. На самом деле, если $H(p) = L(p)$, то $G / O_p(G) = G / C^p(G) \in L(p) = H(p)$ и $G \in \mathfrak{H}$ в силу леммы 4. Противоречие. Таким образом, $G_1 \simeq G / C^p(G) \in L(p) \setminus H(p)$.

По лемме 1 $\pi\Big(\mathrm{Com}\big(L(p)\big)\Big) \cap \omega = \pi\Big(\mathrm{Com}\big(H(p)\big)\Big) \cap \omega$. Применяя леммы 12 и 14, получаем, что канонические ω-композиционные спутники Lp и Hp формаций $L(p)$ и $H(p)$ имеют вид

$$Lp(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\big(F_i p(a) \mid i \in I\big), \quad Hp(a) = \vee^{\omega}_{\infty}\big(F_i p(a) \mid i \in I\big)$$

для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Поскольку $G_1 \notin H(p) \neq \varnothing$, то $H(p)$-корадикал P_1 группы G_1 отличен от единичной подгруппы, и в силу леммы 8 выполняется одно из следующих условий: а) $P_1 \not\subseteq R_\omega(G_1)$; б) найдется такое простое число $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}\big(H(p)\big)\big) \cap \omega$, что $G_1 / C^{p1}(G_1) \notin Hp(p_1)$.

Пусть имеет место а). Обозначим через R_1 – $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы G_1, и пусть $B = G_1/R_1$. Тогда всякая минимальная нормальная подгруппа группы B_1 является либо неабелевой группой, либо абелевой ω'-группой. Поскольку $B_1 \in L(p)$, то в силу лемм 7 и 11 получаем, что

$$B_1 \in L(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i(p)\big) \subseteq \mathfrak{S}_\omega \mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i(p)\big).$$

Значит, $B_1 \in \mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i(p)\big) \subseteq H(p) = c^{\omega}_{\infty}\mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i(p)\big)$. Поэтому $G_1 / R_1 \in H(p)$. Следовательно, $H(p)$-корадикал группы G_1 является ω-группой. Противоречие. Поэтому случай а) невозможен.

Пусть имеет место условие б). Так как $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}\big(H(p)\big)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}\big(L(p)\big)\big) \cap \omega$, то $Lp(p_1) \neq \varnothing$ ввиду леммы 1. Заметим также, что $C^{p1}(G_1) \subset G_1$, поскольку в противном случае $G_1 / C^{p1}(G_1) \simeq 1 \in Lp(p_1) \neq \varnothing$. Противоречие. Кроме того, $C^{p1}(G_1) \neq 1$. Действительно, если в G_1 имеется такая минимальная нормальная R, что $p_1 \notin \pi\big(\mathrm{Com}(R)\big)$, то $R \subseteq C^{p1}(G_1)$ по лемме 9. С другой стороны, если в группе G_1 найдется минимальная нормальная подгруппа p_1-подгруппа R, то $R \subseteq C^{p1}(G_1)$ в силу леммы 10. Следовательно, имеем

$$G_1 / C^{p1}(G_1) \in Lp(p_1) \setminus Hp(p_1), \quad Hp(p_1) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p1}(G_1) \subset G_1.$$

Пусть $G_2 = G_1 / C^{p1}(G_1)$. По лемме 1 имеем $\pi\big(\mathrm{Com}\big(Lp(p_1)\big)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}\big(Hp(p_1)\big)\big) \cap \omega$ и $Hp(p_1) \neq \varnothing$. Применяя леммы 12 и 14, получаем, что канонические ω-композиционные спутники Lpp_1 и Hpp_1 формаций $Lp(p_1)$ и $Hp(p_1)$ имеют вид

$$Lpp_1(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\big(F_i pp_1(a) \mid i \in I\big), \quad Hpp_1(a) = \vee^{\omega}_{\infty}\big(F_i pp_1(a) \mid i \in I\big)$$

для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Поскольку $G_2 \notin Hp(p_1) \neq \varnothing$, то $Hp(p_1)$-корадикал K группы G_2 – неединичная подгруппа. По лемме 8 имеет место одно из следующих утверждений: (а) $K \not\subseteq R_\omega(G_2)$; (б) найдется такое простое число $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(K)\big) \cap \omega$, что $G_2 / C^{p2}(G_2) \notin Hpp_1(p_2)$.

Пусть выполняется условие (а) и R_2 – $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы G_2. Обозначим через B_2 группу G_2/R_2. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа группы B_2 либо неабелева, либо абелева ω'-группа. Поскольку $B_2 \in Lp(p_1)$, то в силу лемм 7 и 11 получаем, что

$$B_2 \in Lp(p) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\big(F_i p(p_1) \mid i \in I\big) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i p(p_1)\big) \subseteq \mathfrak{S}_\omega \mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i p(p_1)\big).$$

Значит, $B_2 \in \mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i p(p_1)\big) \subseteq Hp(p_1) = c^{\omega}_{\infty}\mathrm{form}\big(\cup_{i\in I} F_i p(p_1)\big)$. Поэтому $G_2 / R_2 \in Hp(p_1)$. Следовательно, $H(p)$-корадикал группы G_2 является ω-группой. Полученное противоречие показывает, что случай (а) невозможен.

Пусть имеет место (б). Поскольку $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(K)\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}\big(Lp(p_1)\big)\big) \cap \omega$ и по лемме 1 $\pi\big(\mathrm{Com}\big(Hp(p_1)\big)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}\big(Hp(p_1)\big)\big) \cap \omega$, то $Hpp_1(p_2) \neq \varnothing$. Последнее влечет $C^{p1}(G_1) \subset G_1$, так как в противном случае $G_1 / C^{p1}(G_1) \simeq 1 \in Lp(p_1) \neq \varnothing$, что противоречит условию (б). Кроме того, в силу лемм 9 и 10 получаем, что $C^{p1}(G_1) \neq 1$.

Поэтому, проведя для группы G_2 такие же рассуждения, как для группы G_1, получим

$$G_2 / C^{p2}(G_2) \in Lpp_1(p_2) \setminus Hpp_1(p_2), \quad Hpp_1(p_2) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p2}(G_2) \subset G_2.$$

Пусть $G_3 = G_2 / C^{p2}(G_2)$. Проведя аналогичные рассуждения для группы G_3, получим, что выполняются условия

$$G_3 / C^{p_3}(G_3) \in Lpp_1p_2(p_3) \setminus Hpp_1p_2(p_3), \quad Hpp_1p_2(p_3) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p_3}(G_3) \subset G_3.$$

Продолжая этот процесс, построим группы

$$G_4 = G_3 / C^{p_3}(G_3), \ldots, G_i = G_{i-1} / C^{p_{i-1}}(G_{i-1}), \ldots .$$

При этом для любого i выполняются условия

$$G_i = G_{i-1} / C^{p_{i-1}}(G_{i-1}) \in Lpp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}) \setminus Hpp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}),$$

$$Hpp_1 \ldots p_{i-2}(p_{i-1}) \neq \varnothing, \quad 1 \neq C^{p_{i-1}}(G_{i-1}) \subset G_{i-1}.$$

Ввиду условия $C^{p_{i-1}}(G_{i-1}) \neq 1$ для построенной последовательности групп

$$G, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_i, \ldots$$

имеют место неравенства

$$|G| > |G_1| > |G_2| > |G_3| > \ldots > |G_i| > \ldots .$$

Так как группа G конечна, то на некотором шаге t получим $G_t = 1$. Поскольку при этом $G_t = G_{t-1} / C^{p_{t-1}}(G_{t-1})$, то $C^{p_{t-1}}(G_{t-1}) = G_{t-1}$. Противоречие. Таким образом, наше предположение неверно и $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

В частности, если τ – единичный подгрупповой функтор, из теоремы 2 получаем

С л е д с т в и е 4. *Решетка всех наследственных тотально ω-композиционных формаций является полной подрешеткой решетки всех тотально ω-композиционных формаций.*

Пусть τ(G) – множество всех нормальных подгрупп из G для любой группы G. Тогда из теоремы 2 вытекает

С л е д с т в и е 5. *Решетка всех нормально наследственных тотально ω-композиционных формаций является полной подрешеткой решетки всех тотально ω-композиционных формаций.*

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, из теоремы 2 получаем

С л е д с т в и е 6. *Решетка c_∞^τ всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞ всех тотально композиционных формаций.*

Список использованных источников

1. Скиба, А. Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

2. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука. – 1997. – 240 с.

3. Safonov, V. G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V. G. Safonov // Commun. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502. https://doi.org/10.1080/00927870701509354

4. Сафонов, В. Г. О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп / В. Г. Сафонов, Л. А. Шеметков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 4. – С. 34–37.

5. Tsarev, A. Inductive lattices of totally composition formations / A. Tsarev // Rev. Colomb. Mat. – 2018. – Vol. 52, № 2. – P. 161–169. https://doi.org/10.15446/recolma.v52n2.77156

6. Tsarev, A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A. Tsarev // Ric. Mat. – 2019. – Vol. 68. – P. 693–698. https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3

7. Щербина, В. В. О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп / В. В. Щербина // Приклад. математика & Физика. – 2020. – Т. 52, № 1. – С. 18–32. https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32

8. Щербина, В. В. Частично композиционные формации с заданной структурой. I / В. В. Щербина // Приклад. математика & Физика. – 2021. – Т. 53, № 3. – С. 171–204. https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32

9. Лось, И. П. Об однопорожденных и ограниченных тотально ω-композиционных формациях конечных групп / И. П. Лось, В. Г. Сафонов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 101–107. https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101

10. Лось, И. П. Отделимость решетки τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций конечных групп / И. П. Лось, В. Г. Сафонов // Тр. Ин-та математики. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 44–56.

11. Каморников, С. Ф. О корадикалах субнормальных подгрупп / С. Ф. Каморников, Л. А. Шеметков // Алгебра и логика. – 1995. – Т. 34, № 5. – С. 493–513.

References

1. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply $\mathfrak{L}$ composition formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, pp. 898–913. https://doi.org/10.1007/bf02591784
2. Skiba A. N. *Algebra of Formations*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 1997. 240 p. (in Russian).
3. Safonov V. G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2007, vol. 35, no. 11, pp. 3495–3502. https://doi.org/10.1080/00927870701509354
4. Safonov V. G., Shemetkov L. A. On sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2008, vol. 52, no. 4, pp. 34–37 (in Russian).
5. Tsarev A. Inductive lattices of totally composition formations. *Revista Colombiana de Matematicas*, 2018, vol. 52, no. 2, pp. 161–169. https://doi.org/10.15446/recolma.v52n2.77156
6. Tsarev A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups. *Ricerche di Matematica*, 2019, vol. 68, pp. 693–698. https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3
7. Shcherbina V. V. On two problems of the theory of partially totally composition formations of finite groups. *Prikladnaya matematika & fizika = Applied Mathematics & Physics*, 2020, vol. 52, no. 1, pp. 18–32 (in Russian). https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32
8. Shcherbina V. V. Partially composition formations with a given structure. I. *Prikladnaya matematika & fizika = Applied Mathematics & Physics*, 2021, vol. 53, no. 3, pp. 171–204 (in Russian). https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32
9. Los I. P., Safonov V. G. On one-generated and bounded totally ω-composition formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2021, no. 4 (49), pp.101–107 (in Russian). https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101
10. Los I. P., Safonov V. G. Separability of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations of finite groups. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 44–56 (in Russian).
11. Kamornikov S. F., Shemetkov L. A. On residuals of subnormal subgroups. *Algebra i logika = Algebra and Logic*, 1995, vol. 34, no. 5, pp. 493–513 (in Russian).

Информация об авторах

Лось Инна Павловна – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь); младший научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: innalos.los1@gmail.com

Сафонов Василий Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь); главный научный сотрудник, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vgsafonov@im.bas-net.by

Information about the authors

Inna P. Los – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus); Junior Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: innalos.los1@gmail.com

Vasily G. Safonov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Chief Researcher, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vgsafonov@im.bas-net.by