ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.925.7
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-195-202

Поступила в редакцию 08.02.2024
Received 08.02.2024

В. И. Громак

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЕРАРХИИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Аннотация. Рассматриваются аналитические свойства решений первых трех стационарных уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве. Для уравнения второго порядка показано, что преобразование Беклунда в общем случае определяет формулу теоремы сложения для эллиптической функции Вейерштрасса. Для уравнений четвертого и шестого порядка построено преобразование Беклунда и специальные классы решений. Установлено, что при некотором соотношении между параметрами множество решений первого члена стационарной иерархии является подмножеством множества решений второго члена, а множество решений второго члена иерархии вкладывается во множество решений уравнения шестого порядка стационарной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, преобразование Беклунда, эллиптическая функция Вейерштрасса, теорема сложения

Для цитирования. Громак, В. И. О преобразованиях Беклунда стационарных уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве / В. И. Громак // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 3. – С. 195–202. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-195-202

Valery I. Gromak

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ON BÄCKLUND TRANSFORMATIONS TO STATIONARY EQUATIONS IN HIERARCHY OF THE SECOND PAINLEVÉ EQUATION

Abstract. The analytical properties of solutions to stationary equations of the second and fourth orders in the hierarchy of the second Painlevé equation are considered. For the second-order equation, it is shown that the Bäcklund transformation in the general case determines the formula of the addition theorem for the Weierstrass elliptic function. For the fourth and sixth-order equations, Bäcklund transformations and special classes of solutions are constructed. It has been established that, for a certain relationship between the parameters, the set of solutions to the first term of the stationary hierarchy is a subset of solutions to the second term and the set of solutions to the second term of the hierarchy is a subset of solutions of the six-order equation of the stationary hierarchy of the second Painlevé equation.

Keywords: Painlevé equations, Bäcklund transformation, Weierstrass elliptic function, addition theorem

For citation. Gromak V. I. On Bäcklund transformations to stationary equations in hierarchy of the second Painlevé equation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 195–202 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-195-202

Введение. Преобразования Беклунда являются мощным инструментом построения и исследования аналитических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений [1–5]. В частности, для уравнений Пенлеве и их высших порядков они позволили построить различные классы специальных решений, а для самих уравнений Пенлеве – доказать их трансцендентность [6, 7].

В настоящей работе рассмотрим уравнения

$$w'' = 2w^3 + (kz + p)w + \alpha, \tag{1}$$

$$w^{(4)} = 10w^2 w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta(w'' - 2w^3) + (kz + p)w + \alpha, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} w^{(6)} = {} & 10(w')^2(s_1 w - 14w^3 + 7w'') + w''(10 s_1 w^2 - s_2 - 70w^4 + 42ww'') + \\ & + 56ww'w^{(3)} - (s_1 - 14w^2)w^{(4)} + 2s_2 w^3 - 6s_1 w^5 + 20w^7 + (kz + p)w + \alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

где s_1, s_2, k, p, α – параметры, которые при $k = 1$, $p = 0$ (без ограничения общности $k \neq 0$) есть первые 3 члена иерархии второго уравнения Пенлеве $P_2^{[2n]}$. Исследованию свойств решений уравнений иерархии $P_2^{[2n]}$ посвящено много работ. В частности, для иерархии $P_2^{[2n]}$ известно преобразование Беклунда (см., напр., [8]), которое позволило построить решения, выражающиеся через классические трансцендентные функции и рациональные решения.

Ниже будем рассматривать стационарные версии уравнений (1)–(3), т. е. будем считать $k = 0$, и уравнения в этом случае будем соответственно обозначать (1′)–(3′). Однако прежде заметим, что уравнения (1)–(3), как в случае $k \neq 0$, так и в случае $k = 0$, допускают дискретную симметрию

$$S : w(t, \alpha) \to -w(t, -\alpha), \tag{4}$$

при этом остальные параметры остаются неизменными.

Локальные свойства решений. Доминантные члены, определяющие порядок подвижных полюсов решений уравнений (1)–(3), одни и те же, как в случае $k = 0$, так и в случае $k \neq 0$. Следовательно, решения уравнения (1′) могут иметь лишь простые полюса с разложением решения в окрестности $z = z_0$:

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{t} - \frac{\varepsilon p}{6} t - \frac{\alpha}{4} t^2 + h t^3 + \frac{\alpha p}{24} t^4 + \sum_{k=5}^{\infty} c_k t^k,$$

где $\varepsilon^2 = 1$, $t = z - z_0$, h – произвольная постоянная и все c_k, $k \geq 5$, однозначно определяются через α, p, h.

Для непостоянного рационального решения уравнения (1′) бесконечно удаленная точка $z = \infty$ может быть точкой голоморфности с разложением

$$w(z) = c_0 + \frac{1}{c_0 z^2} + \frac{h}{z^3} + \frac{1 + 3c_0^4 h^2}{4 c_0^3 z^4} + \sum_{k=5}^{\infty} c_k z^{-k},$$

где $\alpha = 4c_0^3$, $p = -6c_0^2$ и все c_k, $k \geq 5$, однозначно определяются через c_0, h, $c_0 \neq 0$. Также разложение решения в окрестности $z = \infty$ может имеет вид

$$w(z) = \varepsilon z^{-1} + \varepsilon h z^{-2} + \varepsilon h^2 z^{-3} + \ldots, \quad \varepsilon^2 = 1,$$

который определяет решение $w = \varepsilon / (z - h)$ при $\alpha = p = 0$, $\varepsilon^2 = 1$.

Для решений уравнения (2′) подвижные полюсы могут быть простыми с разложением решения в окрестности $z = z_0$:

$$w(t) = \frac{\varepsilon}{t} + h_1 t + h_2 t^2 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k t^k,$$

где $\varepsilon^2 = 1$, $t = z - z_0$, $c_5 = h_3$, h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные и все c_k, $k \geq 3$, однозначно определяются через h_1, h_2, h_3 и параметры α, β, p.

Решения уравнения (2′) могут иметь подвижные полюсы первого порядка с вычетом ± 2 и разложением решения в окрестности $z = z_0$:

$$w(t) = \frac{2\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon\beta}{30} t + \frac{\varepsilon(90p + 13\beta^2)}{12600} t^3 + \frac{\alpha}{144} t^4 + h t^5 + \sum_{k=6}^{\infty} c_k t^k,$$

где $\varepsilon^2 = 1$, $t = z - z_0$, h – произвольная постоянная и c_k, $k \geq 6$, однозначно определяются через h, α, β, p.

Решения уравнения (3′) могут иметь подвижные полюсы первого порядка с вычетами ± 1, ± 2, ± 3. Такой характер решений реализуется, в частности, для рациональных решений.

Рациональные решения. Прежде всего заметим, что каждое из уравнений (1′)–(3′) помимо постоянного решения имеет решение $w = \varepsilon / (z - h)$ при $\alpha = p = 0$, $\varepsilon^2 = 1$ – произвольное. Уравнение (2′) имеет решение $w = \varepsilon / (z - h)$ при $\alpha = p = \beta = 0$, $\varepsilon^2 = 4$, h – произвольное. Уравнение (3′) имеет решение $w = \varepsilon / (z - h)$ при $\alpha = p = s_2 = 0$, $\varepsilon^2 = 4$ и при $\alpha = p = s_1 = s_2 = 0$, $\varepsilon^2 = 9$.

Уравнения (1′) и (2′) также имеют рациональное решение

$$w = a + \frac{1}{z - b} - \frac{1}{z - c}$$

соответственно при значениях параметров уравнения (1′) $\alpha = 4a^3$, $p = -6a^2$, $b = c + 1/a$, $a \neq 0$, и параметров уравнения (2′) $\alpha = 16a^5$, $\beta = 10a^2$, $p = -30a^4$, $b = c + 1/a$, $\varepsilon^2 = 1$, $a \neq 0$.

Уравнение (2′) имеет постоянное решение $w = a$ при $\alpha = -ap - 2a^3\beta + 6a^5$ и решение

$$w = \left(a - \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c} + \frac{2}{z-d}\right)\varepsilon$$

при $\alpha = 16\varepsilon a^5$, $\beta = 10a^2$, $p = -30a^4$, $b = (c - i\sqrt{3})/(2a)$, $\varepsilon^2 = 1$, $a \neq 0$.

У уравнения (2′) есть также рациональное решение, имеющее 3 различных полюса с вычетом 1 и 3 различных полюса с вычетом –1. В силу громоздкости мы не приводим его в явном виде. Пример такого решения представлен в [9, с. 399]. Заметим, что построение рациональных решений уравнений (1′)–(3′) можно реализовать с помощью преобразований Беклунда.

Преобразования Беклунда. Для уравнения (1′) преобразование Беклунда известно.

Т е о р е м а 1 [10]. *Пусть* $w = w(z, \alpha, p)$ *– решение уравнения* (1′) *при фиксированных значениях параметров* α, *p. Тогда преобразование*

$$T: w \to \tilde{w} = w - \frac{2\alpha}{2w' - 2w^2 - p} \tag{5}$$

определяет решение $\tilde{w} = \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{p})$ *при значениях параметров* $\tilde{\alpha} = -\alpha$, $\tilde{p} = p$.

Обратное преобразование к *T*, позволяющее по решению $\tilde{w} = \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{p})$ построить решение *w*, имеет вид

$$T^{-1}: \tilde{w} \to w = \tilde{w} - \frac{2\tilde{\alpha}}{2\tilde{w}' - 2\tilde{w}^2 - \tilde{p}},$$

так что $TT^{-1} = I$. При этом также легко проверяются соотношения $T^2 = S^2 = I$. Однако заметим, что преобразования

$$TS: w(z, \alpha, p) \to w_1(z, \alpha, p), \quad ST: w(z, \alpha, p) \to w_2(z, \alpha, p)$$

определяют автопреобразования уравнения (1′), так как они позволяют строить различные решения для одних и тех же параметров. При этом решения w, w_1, w_2 различны, потому что имеют в общем случае различные начальные данные.

П р и м е р 1. Функция

$$w_0 = 1/\left(1 - 3\left(\operatorname{th}(\sqrt{3}z/4)\right)^2\right)$$

есть решение уравнения (1′) при $\alpha = -1/8$, $p = -3/4$ с начальными данными $\left(w_0(0), w_0'(0)\right) = (1, 0)$. Тогда решение $\tilde{w} = Tw_0$ уравнения (1′) при $\alpha = 1/8$, $p = -3/4$ имеет вид

$$\tilde{w} = \frac{2\left(\operatorname{ch}(\sqrt{3}z/2) - 2\right)^2}{21 - 32\operatorname{ch}(\sqrt{3}z/2) + \operatorname{ch}(\sqrt{3}z) + 12\sqrt{3}\operatorname{sh}(\sqrt{3}z/2)} + w_0.$$

При этом «новые» решения $w_1 = STw_0 = S\tilde{w} = -\tilde{w}$ и $w_2(z, -3/4, -1/8) = TSw_0 = T(-w_0)$ для параметров $\alpha = -1/8$, $p = -3/4$ имеют соответственно начальные данные $\left(w_1(0), w_1'(0)\right) = (-4/5, 9/25)$ и $\left(w_2(0), w_2'(0)\right) = (-4/5, -9/25)$.

Покажем, что преобразование (5) в общем случае определяет формулу теоремы сложения для эллиптической функции Вейерштрасса [11, с. 306].

Умножая (1′) на $2w'$ и интегрируя, находим первый интеграл

$$(w')^2 = w^4 + pw^2 + 2\alpha w + C. \tag{6}$$

В (6) положим $w = 1/u$. Тогда имеем уравнение

$$(u')^2 = Cu^4 + 2\alpha u^3 + pu^2 + 1. \tag{7}$$

Переформулируем утверждение теоремы 1 для уравнения (7).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $u = u(z)$ *решение уравнения* (7) *при некоторых фиксированных значениях параметров* C, α, p. *Тогда функция*

$$u_1(z) = u - \frac{2\alpha u^4}{2 + pu^2 + 2\alpha u^3 + 2u'} \tag{8}$$

является решением уравнения (7) *при* $\alpha_1 = -\alpha$ *и тех же значениях параметров* C, p.

Далее будем считать $\alpha \neq 0$, так как из (8) при $\alpha = 0$ имеем $u_1(z) = u(z)$. Рассмотрим случай $C = 0$ и случай различных корней e_j правой части в уравнении (7). В случае наличия кратных корней e_j уравнение интегрируется в элементарных функциях. Выполнив замену

$$u = s_1 v + s_2, \quad s_1 = -2/\alpha, \quad s_2 = -p/(6\alpha), \tag{9}$$

приведем уравнение (7) к канонической форме

$$(v')^2 = 4v^3 - g_2 v - g_3, \tag{10}$$

где инварианты имеют вид

$$g_2 = -\frac{1}{12}p^2, \quad g_3 = -\frac{\alpha^2}{4} - \frac{p^3}{216}. \tag{11}$$

При этом общее решение уравнения (10) имеет вид $v(z) = \wp(z + K, g_2, g_3)$, где $\wp(z, g_2, g_3)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3, а K – постоянная интегрирования. Следовательно, решение уравнения (6) при $C = 0$ в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$w(z) = -\frac{6\alpha}{12\wp(z + K, g_2, g_3) + p}.$$

В силу теоремы 2 и замены (9), если известно решение $v = v(z)$ уравнения (10), то новое решение этого уравнения можно построить по формуле

$$v_1(z) = \frac{1}{6}(p - 6v) + \frac{(p - 12v)^4}{24(108\alpha^2 + p^3 - 18p^2 v + 864v^3 + 216\alpha v')} \tag{12}$$

при $\alpha_1 = -\alpha$. Следовательно, если $v = \wp(z)$ с инвариантами (11), то существует постоянная K_1, такая что $v_1(z) = \wp(z + K_1, g_2, g_3)$, так как g_2, g_3 – инвариантны при $\alpha \to -\alpha$. Раскладывая в ряд в окрестности $z = 0$ левую и правую части (12), для определения постоянной K_1, соответствующей решению $v_1(z)$, находим

$$\wp(K_1) = -p/6, \quad \wp'(K_1) = \alpha/2. \tag{13}$$

Освободимся от производной в знаменателе, умножив числитель и знаменатель на сопряженный по производной знаменатель. После преобразования имеем

$$\wp(z + K_1) = -\wp(K_1) - \wp(z) + \frac{2\wp'(K_1)\big(\wp'(K_1) - \wp'(z)\big) - \big(\wp(K_1) - \wp(z)\big)\big(\wp(K_1) + 2\wp(z)\big)^2}{4\big(\wp(K_1) - \wp(z)\big)^2}.$$

Заменяя в числителе $\wp(K_1)^3$ и $\wp(z)^3$ их выражениями через производные из уравнения (10), находим

$$\wp(z + K_1) = -\wp(K_1) - \wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(K_1) - \wp'(z)}{\wp(K_1) - \wp(z)}\right)^2,$$

где $\wp(K_1)$, $\wp'(K_1)$ определяются (13), что и определяет формулу теоремы сложения для эллиптической функции $\rho(z)$ с инвариантами (11).

Рассмотрим уравнение (7) в случае $C \neq 0$, $\alpha \neq 0$ и случай различных корней e_j правой части в уравнении (7). В случае наличия кратных корней правой части (7) относительно $u(z)$ уравнение интегрируется в элементарных функциях. Приведем уравнение (7) в этом случае к каноническому виду.

Пусть $e_1 = r$ – один из корней e_j. Тогда можно считать

$$C = (-1 - pr^2 - 2\alpha r^3) / r^4. \tag{14}$$

В уравнении (7) выполним замену $u(z) = r + 1/\left(s_1 v(z) + s_2\right)$, где

$$s_1 = -\frac{2r}{2 + pr^2 + \alpha r^3}, \qquad s_2 = -\frac{6 + 5pr^2 + 6\alpha r^3}{6r(2 + pr^2 + \alpha r^3)}.$$

Тогда для определения функции $v(z)$ имеем уравнение (10), где инварианты

$$g_2 = \frac{p^2}{12} - \frac{p}{r^2} - \frac{1 + 2\alpha r^3}{r^4}, \quad g_3 = -\frac{\alpha^2}{4} - \frac{p^3}{216} - \frac{p}{6r^4} - \frac{p^2}{6r^2} - \frac{\alpha p}{3r}. \tag{15}$$

Пусть сейчас $v(z) = \wp(z)$ с инвариантами (15). Тогда новое решение $u_1(z)$ уравнения (10) в силу теоремы 2 можно получить по формуле (8), где $u_1(z) = -r + 1/\left(-s_1 v_1(z) - s_2\right)$. При этом $v_1(z) = \wp(z + K_1)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} v_1(z) = \Big(& 432r^4(12 + 4pr^2 + 3p^2r^4 - 21r^3\alpha)v^2(z) - 3456pr^8v^3(z) - 144r^2 v(z)\Big(11p^2r^4 + p^3r^6 + \\ & +12pr^2(-2 + r^3\alpha) + 18(-2 - 4r^3\alpha + r^6\alpha^2) + 12r^5(2p + 3r\alpha)v'(z)\Big) + (6 + pr^2)\times \\ & \times\Big(306p^2r^4 + 108pr^2(5 + 6r^3\alpha) + 216(1 + 2r^3\alpha + 2r^6\alpha^2) + 144r^3(6 + 5pr^2 + 6r^3\alpha)v'(z)\Big)\Big) / \\ & /\Big(24r^4\Big(36p + p^3r^4 + 144pr^3\alpha + 108r^4\alpha^2 + 864r^2v^2(z) + \\ & +864r^4v^3(z) + 72r^3(2p + 3r\alpha)v'(z) - 18v(z)\Big(-12 - 28pr^2 + p^2r^4 - 18r^3\alpha - 18r^3v'(z)\Big)\Big)\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

В приведенных формулах свободными параметрами являются p, α, r, а C определяется (14). Раскладывая в ряд в окрестности $z = 0$ левую и правую части (16) для определения постоянной K_1, соответствующей решению $v_1(z)$, имеем (13). При этом аналогичными преобразованиями, как и в случае $C = 0$, убеждаемся, что соотношение (16) определяет формулу теоремы сложения для функции $\wp(z + K_1)$ с инвариантами (15).

Теорема 3. *Преобразование Беклунда* (8) *для уравнения* (7) *при* $\alpha \neq 0$ *с различными корнями правой части определяет формулу теоремы сложения для эллиптической функции* $\wp(z)$ *с инвариантами* (11) *при* $C = 0$, *а в случае* $C \neq 0$ *для эллиптической функции* $\wp(z)$ *– с инвариантами* (15) *и постоянной* K_1, *определяемой* (13).

Построим преобразование Беклунда для уравнения (2′). Запишем уравнение (2′) в виде эквивалентной системы

$$w' = q + w^2, \qquad \psi' + 2w\psi - \alpha = 0, \tag{17}$$

где функция ψ определяется соотношением

$$\psi\big(q(z)\big) = q'' + 3q^2 + \beta q - p/2. \tag{18}$$

Заметим, что система (17) является стационарной версией аналогичной системы из [8]. Исключая из (17) $q(z)$ относительно $w(z)$, имеем уравнение (2′). Если же из системы (17) исключить $w(z)$, то имеем уравнение 4-го порядка относительно $q(z)$:

$$\psi'' - \frac{(\psi')^2}{2\psi} + 2q\psi + \frac{\alpha^2}{2\psi} = 0, \tag{19}$$

которое имеет дискретную симметрию

$$S_0 : q(z, \alpha, \beta, p) \to \hat{q}(z, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) = q(z, -\alpha, \beta, p). \tag{20}$$

Используем преобразование (20) и соотношение между w и q из системы (17) для построения преобразования Беклунда уравнения (2′).

Пусть $w = w(z,\alpha,\beta,p)$ – решение уравнения (2′) при фиксированных значениях параметров α, β, p. «Новое» решение $\tilde{w} = \tilde{w}(z,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{p})$ будем строить по схеме

$$w(z,\alpha,\beta,p) \to q(z,\alpha,\beta,p) \to q(z,-\alpha,\beta,p) \to \tilde{w}(z,-\alpha,\beta,p) \tag{21}$$

или в явной форме $T: w \to \tilde{w} = w - \alpha / \psi(w' - w^2)$, где $\psi(w' - w^2)$ определяется (18). Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 4. *Пусть* $w = w(z,\alpha,\beta,p)$ *– решение уравнения* (2′). *Тогда функция* $\tilde{w}(z)$, где

$$T: w(z) \to \tilde{w}(z) = w - \frac{\alpha}{(w' - w^2)'' + 3(w' - w^2)^2 + \beta(w' - w^2) - p/2}, \tag{22}$$

есть решение уравнения (2′) *при* $\tilde{\alpha} = -\alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$, $\tilde{p} = p$.

Заметим, что если α = 0, то $\tilde{w} = w$. Далее считаем α ≠ 0. Рассматривая схему (21) в обратной последовательности, находим обратное преобразование

$$T^{-1}: \tilde{w} \to w = \tilde{w} - \tilde{\alpha} / \psi(\tilde{w}' - \tilde{w}^2).$$

Так же, как и для уравнения (1′), имеем $T^{-1}T = T^2 = S^2 = I$, где преобразования T, S для уравнения (2′) определяются соответственно (22) и (4). При этом преобразования T и S не коммутируют, а преобразования TS и ST определяют автопреобразования уравнения (2′), так как они позволяют строить «новые» решения для исходных параметров.

П р и м е р 2. Функция

$$w_0 = 1 + (z-2)^{-1} - (z-1)^{-1} \tag{23}$$

есть решение (2′) при $(\alpha,\beta,p) = (4,7,-12)$. Тогда функция

$$Tw_0 = -1 + (z-2)^{-1} - (z-3)^{-1}$$

есть решение (2′) при $(\alpha,\beta,p) = (-4,7,-12)$.

Применим преобразование ST к решению (23). Тогда

$$w_1 = STw_0 = 1 - (z-2)^{-1} + (z-3)^{-1}$$

есть решение при $(\alpha,\beta,p) = (4,7,-12)$. После n-кратного последовательного применения преобразования ST имеем

$$w_n = (ST)^n w_0 = 1 - \frac{1}{z-n-1} + \frac{1}{z-n-2}.$$

Применим преобразование TS к решению (23). Тогда

$$y_1 = TSw_0 = 1 - z^{-1} + (z-1)^{-1}$$

при $(\alpha,\beta,p) = (4,7,-12)$. После n-кратного последовательного применения преобразования TS имеем

$$y_n = (ST)^n w_0 = 1 - \frac{1}{z+n-1} + \frac{1}{z+n-2}$$

при $(\alpha,\beta,p) = (4,7,-12)$. Решения w_n и y_n, $n \geq 1$, различные, так как имеют различные полюсы, т. е. преобразования TS и ST определяют две бесконечные серии решений для параметров $(\alpha,\beta,p) = (4,7,-12)$.

Система (17) эквивалентна уравнению (3′) с функцией

$$\psi\big(q(z)\big) = q^{(4)} + 10q^3 + qs_2 + 3q^2 s_1 + 5(q')^2 + (10q + s_1)q'' - p/2.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, как и для уравнения (2′), убеждаемся в справедливости следующего утверждения, определяющего преобразование Беклунда для уравнения (3′).

Т е о р е м а 5. *Пусть* $w = w(z, \alpha, s_1, s_2, p)$ *– решение уравнения* (3′). *Тогда функция* $\tilde{w}(z)$, определяемая

$$T : w(z) \to \tilde{w}(z) = w - \frac{\alpha}{q^{(4)} + 10q^3 + qs_2 + 3q^2 s_1 + 5(q')^2 + 10(q + s_1) - p/2}, \quad q = w' - w^2,$$

есть решение уравнения (3′) *при* $\tilde{\alpha} = -\alpha$, $\tilde{s}_1 = s_1$, $\tilde{s}_2 = s_2$, $\tilde{\beta} = \beta$, $\tilde{p} = p$.

Уравнение (2′) в общем случае интегрируется в гиперэллиптических функциях [9]. Покажем, что множество решений уравнения (1′) является подмножеством решений уравнения (2′), а множество решений уравнения (2′) вкладывается в множество решений уравнения (3′). Однако прежде предположим, что уравнения (1′)–(3′) имеют параметры соответственно с индексами 1–3. Также заметим, что уравнение (2′) допускает первый интеграл

$$2w'w''' = (w'')^2 + (10w^2 - \beta)(w')^2 + \beta w^4 + 2\alpha w - 2w^6 + pw^2 + C_1. \tag{24}$$

Т е о р е м а 6. *1. Пусть* $w = w(z, \alpha_1, p_1)$ *– произвольное решение уравнения* (1′) *при фиксированных значениях параметров с начальными данными* $w(z_0) = w_0$, $w'(z_0) = w'_0$. *Тогда оно также есть решение уравнения* (2′) *при выполнении условий*

$$\alpha_2 = \alpha_1(p_1 + \beta_2), \quad p_2 = 2C + p_1^2 + p_1\beta_2, \tag{25}$$

где $C = (w'_0)^2 - w_0^4 - p_1 w_0^2 - 2\alpha_1 w_0$.

2. Пусть $w = w(z, \alpha_2, \beta_2, p_2)$ *– произвольное решение уравнения* (2′) *при фиксированных значениях параметров. Тогда оно также есть решение уравнения* (3′) *при выполнении условий*

$$\alpha_3 = \alpha_2(s_1 - \beta_2), \quad p_3 = 2C_1 + p_2(s_1 - \beta_2), \quad s_2 = \beta_2(s_1 - \beta_2) - p_2, \tag{26}$$

где постоянная C_1 *определяется начальными данными решения* w *в соответствии с* (24).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя уравнение (1′), находим

$$w''' = 6w^2 w' + p_1 w', \quad w^{(4)} = 12w(w')^2 + (6w^2 + p_1)w''. \tag{27}$$

Подстановка производной w' из первого интеграла (6), w'' – из (1′), а w''', $w^{(4)}$ – из (27) в уравнение (2′) при выполнении условий на параметры (25) обращает уравнение (2′) в тождество, откуда и следует первое утверждение теоремы. Аналогично, используя первый интеграл (24) уравнения (2′), доказывается второе утверждение теоремы.

Примером вложения решений может служить решение уравнения (1′) из примера 1 и приведенные выше рациональные решения уравнений (1′) и (2′).

Список использованных источников

1. Rogers, C. Backlund Transformation and their Applications / C. Rogers, W. F. Shadwick. – New York; London: Academic Press, 1982. – 334 p.

2. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004. – 360 с.

3. Airault, H. Rational solutions of Painlevé equations / H. Airault // Stud. Appl. Math. – 1979. – Vol. 61, № 1. – P. 31–53. https://doi.org/10.1002/sapm197961131

4. Gromak, V. I. Bäcklund Transformations of Painlevé Equations and Their Applications / V. I. Gromak // The Painlevé Property. One Century Later. – New York: Springer, 1999. – P. 687–734. – (CRM Series in Mathematical Physics). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1532-5_12

5. Clarkson, P. A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach / P. A. Clarkson, N. Joshi, A. Pickering // Inverse Probl. – 1999. – Vol. 15, № 1. – P. 175–187. https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/1/019

6. Громак, В. И. О трансцендентности уравнений Пенлеве / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 2. – С. 154–160.

7. Громак, В. И. О трансцендентности пятого и шестого уравнений Пенлеве / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 4. – С. 559–561.

8. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 8. – С. 1017–1033. https://doi.org/10.1134/S0374064120080038

9. Cosgrove, C. M. Higher-Order Painlevé Equations in the Polynomial Class II: Bureau Symbol *P*1 / C. M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 2006. – Vol. 116, № 4. – P. 321–413. https://doi.org/10.1111/j.1467-9590.2006.00346.x

10. Громак, В. И. О преобразованиях Беклунда нелинейных уравнений / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 6. – С. 1067–1068.

11. Уиттекер, Э. Т. Курс современного анализа: пер. с англ. / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 2: Трансцендентные функции. – 515 с.

References

1. Rogers C., Shadwick W. F. Backlund Transformation and their Applications. Academic Press, New York, London, 1982. 334 p.

2. Kudryashov N. A. *Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations*. Moscow, Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovanii Publ., 2004. 360 p. (in Russian).

3. Airault H. Rational solutions of Painlevé equations. *Rational Solutions of Painlevé Equations*, 1979, vol. 61, no. 1, pp. 31–53. https://doi.org/10.1002/sapm197961131

4. Gromak V. I. Bäcklund Transformations of Painlevé Equations and Their Applications. *The Painlevé Property. One Century Later. CRM Series in Mathematical Physics*. New York, Springer, 1999, pp. 687–734. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1532-5_12

5. Clarkson P. A., Joshi N, Pickering A. Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach. *Inverse Problems*, 1999, vol. 15, no. 1, pp. 175–187. https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/1/019

6. Gromak V. I. On the transcendence of Painlevé equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 2, pp. 154–160 (in Russian).

7. Gromak V. I. On the transcendence of the fifth and sixth Painlevé equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 4, pp. 559–561 (in Russian).

8. Gromak V. I. Analytic Properties of Solutions to Equations in the Generalized Hierarchy of the Second Painlevé Equation. *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 8, pp. 993–1009. https://doi.org/10.1134/S0012266120080030

9. Cosgrove C. M. Higher-Order Painlevé Equations in the Polynomial Class II: Bureau Symbol *P*1. *Studies in Applied Mathematics*, 2006, vol. 116, no. 4, pp. 321–413. https://doi.org/10.1111/j.1467-9590.2006.00346.x

10. Gromak V. I. On Backlund transformations of nonlinear equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 6, pp. 1067–1068 (in Russian).

11. Whittaker E. T., Watson G. T. *A Course of Modern Analysis*. 5th ed. Cambridge University Press, 2021. 668 p. https://doi.org/10.1017/9781009004091

Информация об авторе

Громак Валерий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vgromak@gmail.com

Information about the author

Valery I. Gromak – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Differential Equations and Systems Analysis, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vgromak@gmail.com