ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-203-215

Поступила в редакцию 17.11.2023
Received 17.11.2023

В. Е. Хартовский

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

О ТОЧНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Для линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями решается задача точного восстановления решения по измерениям наблюдаемого выхода. Процесс восстановления реализуется при помощи финитного наблюдателя, представляющего собой выход линейной автономной системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями и наперед заданным конечным спектром. Получен критерий существования такого наблюдателя.

Ключевые слова: линейная автономная вполне регулярная дифференциально-алгебраическая система, наблюдаемый выход, финитный наблюдатель, критерий существования

Для цитирования. Хартовский, В. Е. О точном восстановлении решения линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 3. – С. 203–215. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-203-215

Vadim E. Khartovskii

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ABOUT THE EXACT DETERMINATION OF THE SOLUTION TO LINEAR COMPLETELY REGULAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS WITH DELAY

Abstract. We study the problem of exact reconstruction of the solution from measurements of the observed output for linear autonomous completely regular differential-algebraic systems with commensurate delays. The reconstruction process is implemented using a finite observer, which is the output of a linear autonomous retarded system type with commensurate concentrated and distributed delays and a predetermined finite spectrum. The criterion for the existence of such an observer is obtained.

Keywords: linear autonomous completely regular differential-algebraic system, observable output, finite observer, criterion of existence

For citation. Khartovskii V. E. About the exact determination of the solution to linear completely regular differential-algebraic systems with delay. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 203–215 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-203-215

Введение. Динамическая система, переменные состояния которой есть оценки переменных состояния другой системы, называется наблюдателем [1]. При этом [1] для каждой линейной автономной наблюдаемой конечномерной динамической системы может быть спроектирован наблюдатель, ошибка оценивания которого стремится к нулю с заданной скоростью. В дальнейшем эти идеи стали распространяться на бесконечномерные системы. Для систем запаздывающего типа достаточно подробный обзор имеющихся результатов до 2001 г. приведен в [2]. Там же обсуждаются свойства сильной, спектральной и слабой наблюдаемости, определяемые видом формы Смита матрицы наблюдаемости, а также указывается их связь с задачами проектирования регуляторов. В [3] для систем с запаздыванием построен асимптотический наблюдатель типа Люенбергера, в [4, 5] предлагаются наблюдатели для использования их в конструкциях регуляторов, стабилизирующих систему управления. Весьма интересный подход, позволяющий ослабить требование сильной наблюдаемости до асимптотической и противопоставить исходному объекту для дальнейшего изучения некоторую сильно наблюдаемую систему, предложен в [6]. Проблема проектирования наблюдателя для неавтономных линейных бесконечномерных систем исследована в [7]. Показано, что при условии слабой наблюдаемости наблюдатель типа Люенбергера может реконструировать так называемое наблюдаемое подпространство системы, однако в этом случае будет лишь слабая сходимость оценки к решению. Оригинальный подход построения финитного наблюдателя, ошибка оценки которого есть финитная функция, для систем запаздывающего типа с одномерным выходом предложен в [8]. Основная идея [8] заключается в выборе параметров наблюдателя так, чтобы система, описывающая поведение ошибки оценивания, была точечно вырождена в направлении векторов, соответствующих компонентам вектора ошибки оценивания.

Методы проектирования наблюдателей для систем нейтрального типа, основанные на базе решения различных задач управления спектром и финитной стабилизации, разработаны в [9–12]. В [9] предлагаются способы проектирования наблюдателей на базе решения задач модальной управляемости и слабой модальной управляемости, в [10] построена процедура асимптотической оценки асимптотически наблюдаемых систем. Отличительной чертой наблюдателей [9, 10] является возможность их применения к системам, не имеющим свойств финальной или спектральной наблюдаемости, что существенно расширяет спектр их применения. В [11, 12] для систем нейтрального типа предложены схемы проектирования финитных наблюдателей, представляющих собой системы запаздывающего типа с конечным спектром и выходом. Систематизация цитированных результатов [9–11] приведена в [13, с. 375]. Развитие идей работ [9, 10] на случай линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями дается в [14, 15].

В настоящей работе предлагается обобщение развитых в [11, 12] подходов построения финитных наблюдателей на вполне регулярные дифференциально-алгебраические системы с соизмеримыми запаздываниями. Финитный наблюдатель строится в виде системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями, конечным наперед заданным спектром и выходом, который через конечное время определяет точную оценку решения.

1. Описание объекта исследования. Объект исследования – линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с последействием

$$\frac{d}{dt}\big(D\tilde{x}(t)\big)=\sum_{i=0}^{m}A_i\tilde{x}(t-ih),\quad t>0, \tag{1}$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{m}C_i\tilde{x}(t-ih),\quad t>0, \tag{2}$$

$$\tilde{x}(t)=\tilde{\eta}(t),\quad t\in[-mh,0], \tag{3}$$

где $\tilde{x}(t)$ – решение системы (1), $y(t)$ – наблюдаемый выход; $h=\mathrm{const}>0$, $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$, D – ненулевая матрица, $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$. Считаем, что в начальном условии (3) начальная функция $\tilde{\eta}\in\mathbf{PC}_D$. Здесь для произвольной матрицы $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ запись $\mathbf{PC}_A=\mathbf{PC}_A([-mh,0],\mathbb{R}^n)$ обозначает множество кусочно-непрерывных функций $\eta:[-mh,0]\to\mathbb{R}^n$ таких, что функция $A\eta$ непрерывна.

Обозначим $\operatorname{rank}D=n_1$, $n_2=n-n_1$. Систему (1) назовем вполне регулярной, если

$$\deg|pD-A_0|=n_1, \tag{4}$$

где символ deg (символ $\deg_p$) обозначает степень полинома (полинома переменной p) или наибольшую степень (степень переменной p) среди степеней элементов полиномиальной матрицы, запись $|\cdot|$ обозначает определитель. Далее будем изучать только вполне регулярные системы (1).

Если выполняется условие (4), то для любой начальной функции $\tilde{\eta}$ в (3) существует [16] единственное решение системы (1). В данном случае под решением понимаем кусочно-непрерывную функцию $\tilde{x}(t)$, $t\geq -mh$, совпадающую с функцией $\tilde{\eta}$ при $t\in[-mh,0]$, и такую, что функция $D\tilde{x}(t)$ дифференцируема при $t>0$, а уравнение (1) удовлетворяется при $t>0$ за исключением точек, в которых функция $\tilde{x}(t)$ имеет разрывы. Ниже (см. п. 2) это будет обосновано для системы (1), записанной в канонической форме.

Цель работы – построить линейную автономную дифференциально-разностную систему запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями, заданным конечным спектром и выходом $\tilde{v}(t)$, которая определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(t) &= \sum_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{T}_{1i}\tilde{z}(t-ih) + \sum_{i=0}^{\tilde{m}} \int_0^h \tilde{T}_{2i}(s)\tilde{z}(t-ih-s)ds + \sum_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{T}_{3i}y(t-ih), \\ \tilde{v}(t) &= \sum_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{T}_{4i}\tilde{z}(t-ih) + \sum_{i=0}^{\tilde{m}} \tilde{T}_{5i}y(t-ih), \quad t > \tilde{t}_0, \end{aligned} \tag{5}$$

начальным условием

$$\tilde{z}(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [\tilde{t}_0 - (\tilde{m}+1)h, \tilde{t}_0], \tag{6}$$

и обладает следующим свойством: существует момент времени $\tilde{t}_1 > 0$ такой, что при любом начальном условии (3), определяющем решение $\tilde{x}(t)$ и соответствующий ему выход (2), и любом начальном условии (6), решение $\tilde{z}(t)$, порождаемое начальным условием (6) и выходом (2), таково, что для соответствующего выхода $\tilde{v}(t)$ выполняется равенство

$$\tilde{x}(t) = \tilde{v}(t), \quad t \geq \tilde{t}_1. \tag{7}$$

Здесь $\tilde{z} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ($\tilde{n} \in \mathbb{N}$), $\tilde{T}_{ki}$ – некоторые матрицы подходящих размеров, элементами матрицы $\tilde{T}_{2k}(s)$ являются кусочно-непрерывные ограниченные функции, $\tilde{\varphi}$ – любая непрерывная функция.

Определение. Систему (5), удовлетворяющую сформулированному свойству, назовем финитным наблюдателем для системы (1), (2).

Цель дальнейших рассуждений – получить критерий существования и построить финитный наблюдатель для системы (1), (2).

2. Каноническая форма. Если система (1), (2) является вполне регулярной, то ее можно с помощью линейной невырожденной замены переменных преобразовать к каноническому виду [16]. Выберем невырожденные матрицы H и H_1 такие, что $H_1DH = \operatorname{diag}[I_{n_1}, 0_{n_2\times n_2}]$, где $I_{n_1} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ – единичная матрица. Пусть

$$H_1A_iH = \begin{bmatrix} L_{11}^i & L_{12}^i \\ \overline{L}_{21}^i & \overline{L}_{22}^i \end{bmatrix}, \quad C_iH = [K_1^i, K_2^i], \quad i = \overline{0,m},$$

где $L_{1j}^i \in \mathbb{R}^{n_1\times n_j}$, $\overline{L}_{2j}^i \in \mathbb{R}^{n_2\times n_j}$, $j = 1,2$, $K_1^i \in \mathbb{R}^{r\times n_1}$, $K_2^i \in \mathbb{R}^{r\times n_2}$, $i = \overline{0,m}$.

Покажем, что если выполняется (4), то $|\overline{L}_{22}^0| \neq 0$. Действительно, предположим противное. Выберем постоянные матрицы Ω_1, Ω_2 такие, что $\Omega_1\overline{L}_{22}^0\Omega_2 = \operatorname{diag}[1,\ldots,1,0,\ldots,0]$. Из (4) следует, что $\deg\left|pH_1DH - H_1A_0H\right| = n_1$. Разложив определитель

$$\det\left(\operatorname{diag}[I_{n_1},\Omega_1](pH_1DH - H_1A_0H)\operatorname{diag}[I_{n_1},\Omega_2]\right)$$

по элементам последней строки, видим, что его степень не может равняться n_1. Значит, $|\overline{L}_{22}^0| \neq 0$.

Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся тем, что $|\overline{L}_{22}^0| \neq 0$. Положим $L_{2j}^i = -(\overline{L}_{22}^0)^{-1}\overline{L}_{2j}^i$, $j = 1,2$. Выполнив в системе (1) замену переменных

$$\tilde{x} = H\operatorname{col}[x_1, x_2], \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{8}$$

и затем умножив полученное равенство слева на матрицу H_1, придем к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \sum_{i=0}^{m}\left(L_{11}^i x_1(t-ih) + L_{12}^i x_2(t-ih)\right), \\ x_2(t) &= \sum_{i=0}^{m} L_{21}^i x_1(t-ih) + \sum_{i=1}^{m} L_{22}^i x_2(t-ih), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Определим выход

$$y(t)=\sum_{i=0}^{m}\Big(K_1^i x_1(t-ih)+K_2^i x_2(t-ih)\Big),\quad t>0. \tag{10}$$

Систему (9), (10) будем называть канонической формой системы (1), (2). Определим $\eta_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=1,2$, формулой $\mathrm{col}[\eta_1,\eta_2]=H^{-1}\tilde{\eta}$. Тогда η_1 будет непрерывной функцией, а η_2 – кусочно-непрерывной. Начальные условия для системы (9), (10) в силу (3) примут вид

$$x_1(t)=\eta_1(t),\quad x_2(t)=\eta_2(t),\quad t\in[-mh,0]. \tag{11}$$

Рассмотрим характеристические матрицы $W(p,e^{-ph})$ и $W_1(p,e^{-ph})$ систем (1) и (9) соответственно, где

$$W(p,\lambda)=pD-\sum_{i=0}^{m}\lambda^i A_i,\quad W_1(p,\lambda)=\begin{bmatrix} pI_{n_1}-\sum_{i=0}^{m}\lambda^i L_{11}^i & -\sum_{i=0}^{m}\lambda^i L_{12}^i \\ -\sum_{i=0}^{m}\lambda^i L_{21}^i & I_{n_2}-\sum_{i=1}^{m}\lambda^i L_{22}^i \end{bmatrix}.$$

Резюмируем существование описанного выше процесса приведения системы (1), (2) к канонической форме (9), (10).

Утверждение 1. *Пусть система* (1), (2) *является вполне регулярной. Тогда существуют в общем случае не единственные невырожденные матрицы* H_1 *и* H, *удовлетворяющие условию* $H_1DH=\mathrm{diag}[I_{n_1},0_{n_2\times n_2}]$, *такие, что справедливо равенство*

$$\mathrm{diag}\Big[I_{n_1},-(\overline{L}_{22}^{0})^{-1}\Big]H_1W(p,\lambda)H=W_1(p,\lambda),$$

и преобразование переменных (8) *приводит систему* (1), (2) *с начальным условием* (3) *к канонической форме* (9), (10) *с начальным условием* (11).

Система (9) легко интегрируется по шагам. Действительно, на полуинтервале $(0,h]$ систему (9) в силу (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=L_{11}^0x_1(t)+L_{12}^0x_2(t)+\sum_{i=1}^{m}\Big(L_{11}^i\eta_1(t-ih)+L_{12}^i\eta_2(t-ih)\Big),\\ x_2(t)&=L_{21}^0x_1(t)+\sum_{i=1}^{m}\Big(L_{21}^i\eta_1(t-ih)+L_{22}^i\eta_2(t-ih)\Big),\quad t\in(0,h].\end{aligned} \tag{12}$$

Подставив $x_2(t)$, определяемое вторым уравнением в системе (12), в первое уравнение и учитывая равенство $x_1(0)=\eta_1(0)$, получаем $x_1(t)$. После этого находим $x_2(t)$ согласно второму уравнению в (12). На остальных полуинтервалах $(kh,(k+1)h]$, $k=1,2,\ldots$, решение определяется аналогично.

Замечание 1. Из существования решения системы (9) при любом начальном условии (11) и формулы (8) следует существование решения системы (1) с начальным условием (3).

Введем полиномиальные матрицы

$$L_{ij}(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k L_{ij}^k,\quad i,j=1,2,\quad (i,j)\neq(2,2),\quad L_{22}(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\lambda^{k-1}L_{22}^k,\quad K_j(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k K_j^k,\quad j=1,2,$$

и запишем систему (9), (10) в операторном виде (λ_h – оператор сдвига, $\lambda_h\phi(t)=\phi(t-h)$)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=L_{11}(\lambda_h)x_1(t)+L_{12}(\lambda_h)x_2(t),\\ x_2(t)&=L_{21}(\lambda_h)x_1(t)+\lambda_hL_{22}(\lambda_h)x_2(t),\quad t>0,\end{aligned} \tag{13}$$

$$y(t)=K_1(\lambda_h)x_1(t)+K_2(\lambda_h)x_2(t),\quad t>0. \tag{14}$$

Далее будем использовать запись системы (9), (10) в виде системы (13), (14).

3. Некоторые обозначения. Приведем обозначения, которые далее будем использовать для описания распределенного запаздывания в системе, определяющей финитный наблюдатель.

Введем [13, с. 252] множество $\mathbf{J}^{r\times n}$ $(n, r \in \mathbb{N})$, состоящее из операторов $\mathfrak{J}$, характеризующихся следующим условием. Если $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r\times n}$, то $\mathfrak{J} : \mathbf{PC}(\Delta_{\mathfrak{J}}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^r$ и $\mathfrak{J}$ имеет вид

$$\mathfrak{J}[\varphi] = J_0(\lambda_h)\varphi(0) + \sum_{k=0}^{\breve{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)\varphi(-kh-s)ds. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{PC}(\Delta, \mathbb{R}^n)$ – множество кусочно-непрерывных на отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функций, $J_0(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $\mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$ – множество матриц размера $r \times n$, элементы которых суть полиномы переменной λ, $\breve{m} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – любое число;

$$J_0^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde{m}_k} e^{\alpha_{k\rho}s}\left(J_1^{(k\rho)}(s)\cos\beta_{k\rho}s + J_2^{(k\rho)}(s)\sin\beta_{k\rho}s\right), \tag{16}$$

где $\alpha_{k\rho}, \beta_{k\rho} \in \mathbb{R}$, $\tilde{m}_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – любые числа, $J_j^{(k\rho)}(s) \in \mathbb{R}^{r\times n}[s]$, $j = 1,2$. Число $h_{\mathfrak{J}}$ и отрезок $\Delta_{\mathfrak{J}}$ зависят от оператора $\mathfrak{J}$ и определяются формулами $h_{\mathfrak{J}} = h \max\{\deg J_0(\lambda), \breve{m}+1\}$, $\Delta_{\mathfrak{J}} = [-h_{\mathfrak{J}}, 0]$. Для любого оператора $\mathfrak{J}$ и кусочно-непрерывной функции $x(t), t \geq -h_{\mathfrak{J}}$, будем обозначать: $x_t = x_t(\tau) = x(t+\tau)$, $\tau \in \Delta_{\mathfrak{J}}$, $t \geq 0$ (для переменных с нижним индексом вида x_1 будем использовать запись $x_{1,t}$),

$$\mathfrak{J}[x_t] = J_0(\lambda_h)x(t) + \sum_{k=0}^{\breve{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)x(t-kh-s)ds.$$

Оператору (15) поставим в соответствие матрицу

$$J(p, e^{-ph}) = J_0(e^{-ph}) + \sum_{k=0}^{\breve{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)e^{-p(kh+s)}ds. \tag{17}$$

Воспользовавшись формулами Эйлера для записи комплексных чисел в тригонометрической форме, вычислим интегралы в (17), после чего положим $\lambda = e^{-ph}$. В итоге соотношение (17) примет вид

$$J(p, \lambda) = J_0(\lambda) + J_2(p, \lambda). \tag{18}$$

Элементами матрицы $J_2(p, \lambda)$ (если она – ненулевая матрица) являются дробно-рациональные функции вида $\dfrac{b(p,\lambda)}{c(p)}$, где $b(p,\lambda)$ и $c(p)$ – полиномы с комплексными коэффициентами, причем $c(p) \not\equiv \text{const}$, $\deg_p b(p,\lambda) < \deg c(p)$.

Определим отображение σ, которое каждому оператору $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r\times n}$ вида (15) ставит в соответствие матрицу $J(p,\lambda)$ вида (18), каковы бы ни были $r, n \in \mathbb{N}$. Действие отображения σ будем записывать в виде $\mathfrak{J} \overset{\sigma}{\mapsto} J(p, \lambda)$.

Множество всех матриц (18), которые представимы в виде (17), обозначим $\mathcal{C}^{r\times n}(p, \lambda)$ $\left(\mathcal{C}^{1\times 1}(p, \lambda) = \mathcal{C}(p, \lambda)\right)$. Сформулируем (см. следствие 1 в [17] или теорему 5.2 в [13, с. 259]) необходимые и достаточные условия, при выполнении которых дробно-рациональная функция вида $\dfrac{b(p,\lambda)}{c(p)}$ принадлежит множеству $\mathcal{C}(p, \lambda)$.

Л е м м а 1. *Рассмотрим дробно-рациональную функцию*

$$a(p, \lambda) = \frac{a_1(p, \lambda)}{a_2(p)},$$

где $a_2(p) = \prod_{i=1}^{\hat{l}}(p - p_i)^{l_i}$, $p_i \in \mathbb{C}$ *(*$p_i \neq p_j$ *при* $i \neq j$*),* $\hat{l}, l_i \in \mathbb{N}$. *Функция* $a(p,\lambda)$ *принадлежит множеству* $\mathcal{C}(p, \lambda)$ *тогда и только тогда, когда и выполняются равенства*

$$\left.\frac{d^j a_1(p, e^{-ph})}{dp^j}\right|_{p=p_i} = 0, \quad j = \overline{0, l_i - 1}, \quad i = \overline{1, \hat{l}}.$$

4. Существование финитного наблюдателя для системы, записанной в канонической форме. Рассмотрим систему (13), (14). Запишем для нее финтный наблюдатель вида (5), причем для наглядности будем использовать операторное представление

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t)=T_0(\lambda_h)z(t)+\sum_{i=0}^{\tilde{m}}\int_0^h T_{2i}(s)z(t-ih-s)ds+T_1(\lambda_h)y(t),\\ &v(t)=T_2(\lambda_h)z(t)+T_3(\lambda_h)y(t), \quad t>\tilde{t}_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Зададим для системы (19) начальное условие

$$z(t)=\varphi(t), \quad t\in[\tilde{t}_0-(\tilde{m}+1)h,\tilde{t}_0]. \tag{20}$$

В соотношениях (19), (20) $T_i(\lambda)$ – полиномиальные матрицы, элементами матриц $T_{2k}(s)$ являются кусочно-непрерывные ограниченные функции. Формула (7) в случае наблюдателя (19) будет иметь вид

$$\mathrm{col}[x_1(t),x_2(t)]=v(t), \quad t\geq\tilde{t}_1. \tag{21}$$

Установим критерий существования финитного наблюдателя для системы (13), (14). Обозначим $K(\lambda)=[K_1(\lambda),K_2(\lambda)]$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Л е м м а 2. *Для того чтобы для системы* (13), (14) *существовал финитный наблюдатель, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

$$1)\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix} W_1(p,e^{-ph}) \\ K(e^{-ph}) \end{bmatrix}=n \quad \forall p\in\mathbb{C}; \tag{22}$$

$$2)\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_{n_2}-\lambda L_{22}(\lambda) \\ K_2(\lambda) \end{bmatrix}=n_2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}. \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Условия (22), (23) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы существовали (см. следствие 1 в [16]) момент времени $t_0>0$, матричные функции $S_i(t,\tau)$ и полиномиальные матрицы $\hat{S}_i(\lambda)$ $(i=1,2)$ такие, что решение системы (13), (14) представимо в виде

$$\begin{aligned} &x_1(t)=\int_{mh}^{t_0} S_1(t,\tau)y(\tau)d\tau+\hat{S}_1(\lambda_h)y(t), \quad t\in[t_0-mh,t_0],\\ &x_2(t)=\int_{mh}^{t_0} S_2(t,\tau)y(\tau)d\tau+\hat{S}_2(\lambda_h)y(t), \quad t\in(t_0-mh,t_0]. \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть для системы (13), (14) существует финитный наблюдатель (19). Зададим для системы (19) нулевое начальное условие в (20) и определим по формуле Коши решение $z(t)$, $t>\tilde{t}_0$, после чего запишем выход $v(t)$ в виде

$$v(t)=T_2(\lambda_h)\int_{\tilde{t}_0}^{t} F(t-\tau)T_1(\lambda_h)y(\tau)d\tau+T_3(\lambda_h)y(t), \quad t>t_0+h\deg T_2(\lambda_h), \tag{25}$$

где $F(t)$ – фундаментальная матрица решения однородной системы (19). Заменяя в равенстве (21) функцию $v(t)$ по формуле (25) и выбирая $t_0>\tilde{t}_1+mh$, перепишем полученное соотношение в виде (24). Из существования представления решения системы (13), (14) в виде (24) следует необходимость условий (22), (23).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что $\mathrm{col}[x_1(t),x_2(t)]=\mathrm{col}[x_1(t,\eta_1,\eta_2),x_2(t,\eta_1,\eta_2)]$ – решение системы (13), (14), порожденное любым фиксированным начальным условием (11). Подставив это решение в уравнения (13), (14), проведем ряд преобразований с полученной системой.

В силу условия (23) найдутся [13, с. 228] полиномиальные матрицы $Z_i(\lambda)$ подходящего размера, такие, что $|\Gamma(\lambda)|\equiv 1$, где $\Gamma(\lambda)=\begin{bmatrix} I_{n_2}-\lambda L_{22}(\lambda) & -Z_1(\lambda) \\ K_2(\lambda) & I_r - Z_2(\lambda)\end{bmatrix}$. Запишем следующее очевидное равенство:

$$\Gamma(\lambda_h)\begin{bmatrix} x_2(t) \\ \mu(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_{21}(\lambda_h)x_1(t) \\ y(t)-K_1(\lambda_h)x_1(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -Z_1(\lambda_h)\mu(t) \\ \big(I_r - Z_2(\lambda_h)\big)\mu(t)\end{bmatrix},\quad t>0, \tag{26}$$

где $\mu(t)$ – произвольная кусочно-непрерывная функция $(t\in\mathbb{R},\ \mu(t)\in\mathbb{R}^r)$, а

$$L_{21}(\lambda_h)x_1(t)=x_2(t)-\lambda_h L_{22}(\lambda_h)x_2(t),\quad t>0, \tag{27}$$

согласно второму уравнению в (13). Действуя слева на равенство (26) оператором $\Pi(\lambda_h)$, где $\Pi(\lambda)=[\Pi_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^2$ – матрица, присоединенная к матрице $\Gamma(\lambda)$ ($\Pi_{ij}(\lambda)$ – блоки, размеры которых совпадают с размерами соответствующих блоков матрицы $\Gamma(\lambda)$), получим формулу

$$x_2(t)=\Pi_{11}(\lambda_h)L_{21}(\lambda_h)x_1(t)+\Pi_{12}(\lambda_h)\big(y(t)-K_1(\lambda_h)x_1(t)\big)=M(\lambda_h)x_1(t)+\Pi_{12}(\lambda_h)y(t),\quad t>\gamma h. \tag{28}$$

Здесь $M(\lambda)=\Pi_{11}(\lambda)L_{21}(\lambda)-\Pi_{12}(\lambda)K_1(\lambda)$, $\gamma=\max\{\deg\Pi_{1i}(\lambda),\ i=1,2\}$. Из формулы (28) видно, что решение $\mathrm{col}[x_1(t),x_2(t)]$, $t>\gamma h$, системы (13) однозначно определяется функцией $x_1(t)$, $t>0$, и выходом $y(t)$, $t>0$. Заменим в первом уравнении системы (13) $x_2(t)$ согласно (28):

$$\dot{x}_1(t)=\big(L_{11}(\lambda_h)+L_{12}(\lambda_h)M(\lambda_h)\big)x_1(t)+L_{12}(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t),\quad t>t_2, \tag{29}$$

где $t_2=(m+\gamma)h$. Из уравнения (29) видно, что функция $x_1(t)$ удовлетворяет линейной автономной неоднородной дифференциально-разностной системе запаздывающего типа, неоднородная часть которой выражается через выход $y(t)$.

Используя формулы (14), (27), (28), запишем следующие соотношения:

$$\begin{gathered} y(t)-K_2(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t)=\big(K_1(\lambda_h)+K_2(\lambda_h)M(\lambda_h)\big)x_1(t), \\ \Pi_{12}(\lambda_h)y(t)-\lambda_h L_{22}(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t)=\big(L_{21}(\lambda_h)-M(\lambda_h)+\lambda_h L_{22}(\lambda_h)M(\lambda_h)\big)x_1(t),\quad t>t_2. \end{gathered} \tag{30}$$

Левая часть равенств (30) выражается через известный выход y, а правая часть зависит от x_1. Это позволяет определить новый выходной сигнал $\hat{y}$, компоненты которого определяются левыми частями равенств (30). Введем обозначения:

$$\hat{A}(\lambda)=L_{11}(\lambda)+L_{12}(\lambda)M(\lambda),\quad \hat{K}(\lambda)=\begin{bmatrix} K_1(\lambda)+K_2(\lambda)M(\lambda) \\ L_{21}(\lambda)-M(\lambda)+\lambda L_{22}(\lambda)M(\lambda)\end{bmatrix},$$

$$\hat{y}(t)=K_y(\lambda_h)y(t),\quad K_y(\lambda)=\begin{bmatrix} I_r-K_2(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) \\ \Pi_{12}(\lambda)-\lambda_h L_{22}(\lambda)\Pi_{12}(\lambda_h)\end{bmatrix}.$$

Учитывая введенные обозначения, запишем систему (29), (30) в более компактном виде:

$$\dot{x}_1(t)=\hat{A}(\lambda_h)x_1(t)+L_{12}(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t),\quad t>t_2, \tag{31}$$

$$\hat{y}(t)=\hat{K}(\lambda_h)x_1(t),\quad t>t_2. \tag{32}$$

Таким образом показано, что функция $x_1(t)$, $t>t_2$, удовлетворяет системе (31), (32). Кроме этого, в силу существования и единственности решения линейной системы запаздывающего типа имеет место и обратное утверждение. То есть при подходящем выборе начальных условий решение системы (31), (32) будет определять функцию $x_1(t)$, $t>t_2$, являющуюся компонентой решения системы (13). Систематизируем результат проведенных рассуждений в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. *Пусть для системы* (13), (14) *выполняется условие* (23), *а* $\mathrm{col}[x_1(t),x_2(t)]=\mathrm{col}[x_1(t,\eta_1,\eta_2),x_2(t,\eta_1,\eta_2)]$ *– решение этой системы, порожденное любым фиксированным начальным условием* (11). *Тогда при* $t>t_2$ *функция* $x_1(t)$ *совпадает с решением линейной автономной системы запаздывающего типа* (31) *с известным выходом* (32) *и начальным условием* $x_1(t)=x_1(t,\eta_1,\eta_2)$, $t\in[t_2-\hat{m}h,t_2]$, *где* $\hat{m}=\deg\hat{A}(\lambda)$.

В силу (22) для системы (31), (32) выполняется соотношение (доказывается методом от противного)

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_{n_1}-\hat{A}(e^{-ph}) \\ \widehat{K}(e^{-ph}) \end{bmatrix}=n_1 \quad \forall p\in\mathbb{C}. \tag{33}$$

Зафиксируем произвольный номер $i_0\in\{1,...,n_1+r\}$. Поскольку выполняется условие (33), то для любого фиксированного i_0 найдется [18] матрица $V_{i_0}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times(n+r)}[\lambda]$ такая, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_{n_1}-\hat{A}(e^{-ph})-V_{i_0}(e^{-ph})\hat{K}(e^{-ph}) \\ \hat{k}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix}=n_1 \quad \forall p\in\mathbb{C}, \tag{34}$$

где $\hat{k}_{i_0}(\lambda)$ – строка матрицы $\widehat{K}(\lambda)$ с номером i_0. Положим

$$\hat{A}_1(\lambda)=\hat{A}(\lambda)+V_{i_0}(\lambda)\hat{K}(\lambda), \quad Y(\lambda)=L_{12}(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)-V_{i_0}(\lambda)K_y(\lambda). \tag{35}$$

Рассмотрим систему (31). На основании (32), (35) запишем следующую цепочку соотношений:

$$\hat{A}(\lambda_h)x_1(t)+L_{12}(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t)=\hat{A}(\lambda_h)x_1(t)+V_{i_0}(e^{-ph})\hat{K}(e^{-ph})x_1(t)-V_{i_0}(e^{-ph})\hat{K}(e^{-ph})x_1(t)+$$
$$+L_{12}(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t)=\hat{A}_1(\lambda_h)x_1(t)-V_{i_0}(e^{-ph})\hat{y}(t)+L_{12}(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t)=\hat{A}_1(\lambda_h)x_1(t)+Y(\lambda_h)y(t),$$
$$t>t_3, \quad t_3=t_2+\gamma_1 h, \quad \gamma_1=\deg V_{i_0}(\lambda). \tag{36}$$

Используя (36), систему (31) запишем в виде

$$\dot{x}_1(t)=\hat{A}_1(\lambda_h)x_1(t)+Y(\lambda_h)y(t), \quad t>t_3. \tag{37}$$

Начальные условия для системы (37) указаны в утверждении 2. Из равенства (32), определяющего известный выход $\hat{y}$, возьмем равенство компонент с номером i_0:

$$\hat{y}_{i_0}(t)=\hat{k}_{i_0}(\lambda_h)x_1(t), \quad t>t_3, \tag{38}$$

где $\hat{y}_{i_0}(t)$ – компонента вектора $\hat{y}$ с номером i_0.

Условие (34) является необходимым и достаточным для существования для системы (37), (38) финитного наблюдателя [8, 11]. Построим этот наблюдатель, который будет определяться системой такого же типа, что и система (37), т. е. запаздывающего типа. Определив на основании этого наблюдателя функцию $x_1(t)$, согласно (28) найдем функцию $x_2(t)$.

Зададим произвольный приведенный полином $d(p)$, $\deg d(p)=n_1+3$, имеющий по крайней мере один действительный корень. Этот полином будет характеристическим полиномом системы, определяющей финитный наблюдатель, поэтому его следует выбрать асимптотически устойчивым. Финитный наблюдатель для системы (37), (38) построим [11] в виде системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями

$$\dot{z}(t)=\mathfrak{Q}[z_t]+\tilde{Y}(\lambda_h)y(t), \quad t>t_3, \tag{39}$$

и с выходом

$$v_z(t)=[I_{n_1},0_{n_1\times 3}]z(t), \quad t\ge t_3. \tag{40}$$

Здесь $z=\operatorname{col}[z_1,z_2]$, $z_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $z_2\in\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{Q}\in\mathbf{J}^{(n+3)\times(n+3)}$; матрица $Q(p,\lambda)$, где $\mathfrak{Q}\overset{\sigma}{\mapsto}Q(p,\lambda)$, определяется по схеме построения матрицы, задающей финитный наблюдатель для однородной системы запаздывающего типа со скалярным выходом, предложенной в [11]; матрица $\tilde{Y}(\lambda)$ такова, что

$$\tilde{Y}(\lambda_h)y(t)=\begin{bmatrix} Y(\lambda_h) \\ 0_{3\times l} \end{bmatrix}y(t)-e_{n_1+1}\hat{y}_{i_0}(t)=\left(\begin{bmatrix} Y(\lambda_h) \\ 0_{3\times l} \end{bmatrix}-e_{n_1+1}\hat{e}'_{i_0}K_y(\lambda_h)\right)y(t). \tag{41}$$

Здесь и ниже $0_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ – нулевая матрица, $e_i,\hat{e}_i$ – столбцы матриц I_{n_1+3},I_{n_1+r} с номером i соответственно, символ «′» (штрих) обозначает операцию транспонирования. При этом можно построить такую матрицу $Q(p,\lambda)$, что для выбранного ранее полинома $d(p)$ будет иметь место равенство $|pI_{n+3}-Q(p,\lambda)|=d(p)$.

Приведем вид матрицы $Q(p,\lambda)$, поскольку он понадобится ниже:

$$Q(p,\lambda)=\begin{bmatrix} \hat{a}^1_{11}(\lambda) & \dots & \hat{a}^1_{1n_1}(\lambda) & g_{11}(p,\lambda) & g_{12}(p,\lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{a}^1_{n_11}(\lambda) & \dots & \hat{a}^1_{n_1n_1}(\lambda) & g_{n_11}(p,\lambda) & g_{n_12}(p,\lambda) & 0 \\ k^1_{i_0}(\lambda) & \dots & k^{n_1}_{i_0}(\lambda) & g_{n_1+11}(p,\lambda) & g_{n_1+12}(p,\lambda) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_1(\lambda) & 0 & b_2(\lambda) \\ 0 & \dots & 0 & b_3(\lambda) & 0 & b_1(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{42}$$

где $\hat{a}^1_{ij}(\lambda)$ – элементы матрицы $\hat{A}_1(\lambda)$, $\hat{A}_1(\lambda)=\left[\hat{a}^1_{ij}(\lambda)\right]_{n_1\times n_1}$, $\hat{k}^j_{i_0}(\lambda)$ – элементы вектора $\hat{k}_{i_0}(\lambda)$, $\hat{k}_{i_0}(\lambda)=\left[\hat{k}^1_{i_0}(\lambda),\dots,\hat{k}^{n_1}_{i_0}(\lambda)\right]$, $g_{ij}(p,\lambda)\in\mathcal{C}(p,\lambda)$, $b_j(\lambda)$ – полиномы с действительными коэффициентами. Функции $g_{ij}(p,\lambda)$ и полиномы $b_j(\lambda)$ определяются согласно статье [11].

Начальные условия для системы (39) можно взять в виде любой непрерывной функции, определенной при $t\in[t_3-h_{\mathfrak{Q}},t_3]$, где $h_{\mathfrak{Q}}$ – длина отрезка последействия системы (39), определяемая оператором $\mathfrak{Q}$.

Наблюдатель (39), (40) обладает следующим свойством: существует момент времени $t_4 > t_3$ такой, что каковы бы ни были начальные условия систем (37) и (39), выполняется равенство

$$x_1(t)=v_z(t),\quad t\ge t_4. \tag{43}$$

Поясним [8] принцип выбора элементов матрицы $Q(p,\lambda)$. Обозначим $\zeta=z_1-x_1$ – ошибка оценки, $\hat{\zeta}=\mathrm{col}[\zeta,z_2]$. Из структуры матрицы $Q(p,\lambda)$, описанной в формуле (42), и вида выхода (40) следует, что вектор-функция $\hat{\zeta}(t)$ определяется линейной однородной автономной системой запаздывающего типа

$$\dot{\hat{\zeta}}(t)=\mathfrak{Q}[\hat{\zeta}_t],\quad t>t_3. \tag{44}$$

Элементы матрицы $Q(p,\lambda)$ выбираются так, чтобы система (44) была точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым n_1 столбцам матрицы I_{n_1+3}, т. е. в направлениях e_i, $i=\overline{1,n_1}$. Согласно определению точечной вырожденности это означает, что найдется момент времени t_4, $t_4 > t_3$, такой, что какова бы ни была начальная функция, определяющая решение системы (44), будут выполняться тождества $e_i'\hat{\zeta}(t)\equiv 0$, $t\ge t_4$, $i=\overline{1,n_1}$. Это в свою очередь значит, что имеет место равенство (43).

Замечание 2. Уточним, что если для построения матрицы $Q(p,\lambda)$ использовать подходы [8, 11], то у системы (44) будут вырождаться все компоненты вектора решения $\mathrm{col}[\zeta,z_2]$, за исключением одной компоненты вектора z_2 (будем считать, что это последняя компонента), т. е. будут иметь место тождества $e_i'\hat{\zeta}(t)\equiv 0$, $t\ge t_4$, $i=\overline{1,n_1+2}$.

Теперь перейдем к формированию оценки решения исходной системы (13), (14). Определим новый выход системы (39) следующим равенством:

$$v(t)=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1\times 3} \\ M(\lambda_h) & 0_{n_1\times 3} \end{bmatrix} z(t)+\begin{bmatrix} 0_{n_1\times n_2} \\ \Pi_{12}(\lambda_h) \end{bmatrix} y(t),\quad t>t_3+(m+\gamma)h. \tag{45}$$

Тогда справедливо равенство (21), где $\tilde{t}_1=t_4+(m+\gamma)h$. Действительно, имеем

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}-v(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} z_1(t) \\ M(\lambda_h)z_1(t) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0_{n_1\times n_2} \\ \Pi_{12}(\lambda_h) \end{bmatrix} y(t),\quad t>t_3+(m+\gamma)h. \tag{46}$$

В силу (28), (40), (43) выражение (46) равно нулю при $t\ge\tilde{t}_1$. Таким образом, для системы (13), (14) построен финитный наблюдатель (39), (45). Лемма доказана.

5. Существование финитного наблюдателя для вполне регулярной дифференциально-алгебраической системы с соизмеримыми запаздываниям. Рассмотрим систему (1), (2). Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n2\times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n\times n2}$ – матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно (относительно неизвестных γ_i, $i = 1, 2$). Обозначим

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i.$$

Сформулируем критерий существования финитного наблюдателя для системы (1), (2).

Т е о р е м а. *Для того чтобы для системы* (1)*,* (2) *существовал финитный наблюдатель, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \tag{47}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - n_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{48}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть для системы (1), (2) существует финитный наблюдатель (5) и имеет место равенство (7). Сделав замену переменных (8), от системы (1), (2) перейдем к системе (13), (14). По формуле $v(t) = H^{-1}\tilde{v}(t)$ определим новый выход. Тогда очевидно, что будет иметь место равенство (21). Тем самым показано, что для системы (13), (14) существует финитный наблюдатель. Поэтому в силу леммы 2 для системы (13), (14) выполняются условия (22), (23). В [16] показано, что для системы (13), (14) выполняются условия (22), (23) тогда и только тогда, когда для системы (1), (2) выполняются условия (47), (48). Этот факт завершает доказательство необходимости условий теоремы.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если для системы (1), (2) выполняются условия (47), (48), то, как было сказано ранее, для системы (13), (14) выполняются условия (22), (23). Сделав замену переменных (8), от системы (1), (2) перейдем к системе (13), (14). Зададим полином $d(p)$ и в силу леммы 2 построим для системы (13), (14) финитный наблюдатель (39), (45). Финитный наблюдатель для системы (1), (2) определим как систему (39) с выходом

$$\tilde{v}(t) = Hv(t) = H\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1\times 3} \\ M(\lambda_h) & 0_{n_1\times 3} \end{bmatrix} z(t) + H\begin{bmatrix} 0_{n_1\times n_2} \\ \Pi_{12}(\lambda_h) \end{bmatrix} y(t), \quad t > t_3 + (m+\gamma)h. \tag{49}$$

Тогда в силу (21) $\tilde{v}(t) - \tilde{x}(t) = Hv(t) - H\operatorname{col}[x_1(t), x_2(t)] = 0, \quad t \ge \tilde{t}_1$, т. е. имеет место (7). Теорема доказана.

6. Альтернативный метод построения финитного наблюдателя. Приведем еще один способ построения финитного наблюдателя для системы (13), (14). В данном случае меняется схема преобразования исходной системы (13), (14) к системе запаздывающего типа (31), (32). В основу описываемого подхода положена идея использования нормальной формы Смита (канонической диагональной формы) матрицы из условия (23). Поэтому остановимся только на этом вопросе, который для краткости изложим схематично.

Поскольку выполняется условие (23), то наибольший общий делитель всех миноров порядка n матрицы

$$\begin{bmatrix} I_{n_2} - \lambda L_{22}(\lambda) \\ K_2(\lambda) \end{bmatrix}$$

равен единице. Поэтому нормальная форма Смита этой матрицы имеет вид $\operatorname{col}[I_{n_2}, 0_{r\times n_2}]$. Значит, найдутся такие невырожденные матрицы $H_2 \in \mathbb{R}^{(n_2+r)\times(n_2+r)}$, $H_3 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, что справедливо равенство

$$H_2\begin{bmatrix} I_{n_2} - \lambda L_{22}(\lambda) \\ K_2(\lambda) \end{bmatrix} H_3 = \begin{bmatrix} I_{n_2} \\ 0_{r\times n_2} \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения (14), (27), запишем следующее равенство:

$$\begin{bmatrix} I_{n_2} - \lambda_h L_{22}(\lambda_h) \\ K_2(\lambda_h) \end{bmatrix} x_2(t) = \begin{bmatrix} L_{21}(\lambda_h) \\ -K_1(\lambda_h) \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0_{n\times r} \\ I_r \end{bmatrix} y(t). \tag{50}$$

Введем новую функцию $\chi(t)$, которая определяется равенством

$$x_2(t) = H_3 \chi(t). \tag{51}$$

Заменив по формуле (51) функцию $x_2(t)$ в формуле (50), а затем умножив обе части полученного равенства слева на матрицу H_2, получим выражение функции $\chi(t)$ через функции $x_1(t)$ и $y(t)$:

$$\chi(t) = [I_{n_2}, 0_{n_2\times r}] H_2 \left(\begin{bmatrix} L_{21}(\lambda_h) \\ -K_1(\lambda_h) \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0_{n\times r} \\ I_r \end{bmatrix} y(t) \right). \tag{52}$$

Поменяв функцию $\chi(t)$ в (51) согласно (52), получим соотношение

$$x_2(t) = R_1(\lambda_h) x_1(t) + R_2(\lambda_h) y(t), \tag{53}$$

где

$$R_1(\lambda) = H_3 [I_{n_2}, 0_{n_2\times r}] H_2 \begin{bmatrix} L_{21}(\lambda) \\ -K_1(\lambda) \end{bmatrix}, \quad R_2(\lambda) = H_3 [I_{n_2}, 0_{n_2\times r}] H_2 \begin{bmatrix} 0_{n\times r} \\ I_r \end{bmatrix}.$$

Используя формулу (53), выписываем в силу первого уравнения системы (13) линейную автономную систему запаздывающего типа относительно $x_1(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \big(L_{11}(\lambda_h) + L_{12}(\lambda_h) R_1(\lambda_h)\big) x_1(t) + L_{12}(\lambda_h) R_2(\lambda_h) y(t) \tag{54}$$

с известным выходом, который получаем из соотношений (14), (27):

$$\big(I_r - K_2(\lambda) R_2(\lambda_h)\big) y(t) = \big(K_1(\lambda_h) + K_2(\lambda_h) R_1(\lambda_h)\big) x_1(t), \tag{55}$$

$$\big(R_2(\lambda_h) - \lambda_h L_{22}(\lambda_h) R_2(\lambda_h)\big) y(t) = \big(L_{21}(\lambda_h) - R_1(\lambda_h) + \lambda_h L_{22}(\lambda_h) R_1(\lambda_h)\big) x_1(t). \tag{56}$$

Для системы (54)–(56) выполняется соотношение, аналогичное условию (33). Далее с системой (54)–(56) поступаем так же, как это было сделано с системой (31), (32). То есть, используя [18], систему (54)–(56) заменяем системой запаздывающего типа с одномерным выходом. Для этого применяем рассуждения, аналогичные тем, которые позволили от системы (31), (32) перейти к системе (37), (38). Для полученной системы со скалярным выходом строим [8, 11] наблюдатель вида (39), (40). Определив при помощи такого наблюдателя компоненту $x_1(t)$, для нахождения компоненты $x_2(t)$ воспользуемся формулой (53).

Заключение. В работе для линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с соизмеримыми запаздываниями построен финитный наблюдатель в виде системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями, конечным наперед заданным спектром и выходом. Предложен альтернативный метод построения финитного наблюдателя. При его реализации вместо вычисления матриц $Z_1(\lambda)$, $Z_2(\lambda)$, входящих в структуру матрицы $\Gamma(\lambda)$, следует построить преобразование полиномиальной матрицы из условия (23) к нормальной форме Смита. По трудоемкости последняя операция представляется более простой, поскольку ее реализация возможна путем использования соответствующих функций, входящих в большинство современных пакетов компьютерной математики. Однако это не может служить основанием для выбора метода построения финитного наблюдателя. Окончательное предпочтение можно осуществить после сравнения систем (31), (32) и (54)–(56) с точки зрения трудоемкости построения для них финитного наблюдателя вида (39), (40).

Список использованных источников

1. Luenberger, D. G. An introduction to observers / D. G. Luenberger // IEEE Trans. Autom. Control. – 1971. – Vol. 16, № 6. – P. 596–602. https://doi.org/10.1109/tac.1971.1099826

2. Sename, O. New trends in design of observers for time-delay systems / O. Sename // Kybernetika. – 2001. – Vol. 37, № 4. – P. 427–458.

3. Zheng, G. Observer design for linear singular time-delay systems / G. Zheng, F. G. Bejarano // Automatica. – 2017. – Vol. 80, № 6. – P. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.025

4. Hu, G. D. A Separation Property of the Observer-Based Stabilizing Controller for Linear Delay Systems / G. D. Hu // Sib. Math. J. – 2021. – Vol. 62, № 4. – P. 763–772. https://doi.org/10.1134/S0037446621040182

5. Hu, G. D. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems / G. D. Hu // Sib. Math. J. – 2022. – Vol. 63, № 4. – P. 789–800. https://doi.org/10.1134/s003744662204019x

6. Ильин, А. В. Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием / А. В. Ильин, А. В. Буданова, В. В. Фомичев // Докл. Акад. наук. – 2013. – Т. 448, № 4. – С. 399–402. https://doi.org/10.7868/s0869565213040051

7. Luenberger Observers for Infinite-Dimensional Systems, Back and Forth Nudging, and Application to a Crystallization Process / L. Brivadis [et al.] // SIAM J. Control Optim. – 2021. – Vol. 59, № 2. – P. 857–886. https://doi.org/10.1137/20m1329020

8. Метельский, А. В. Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом / А. В. Метельский // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 396–408. https://doi.org/10.1134/s0374064119030130

9. Хартовский, В. Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа / В. Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 409–422. https://doi.org/10.1134/S0374064119030142

10. Хартовский, В. Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями / В. Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 12. – С. 1701–1716. https://doi.org/10.1134/S0374064119120112

11. Метельский, А. В. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 12. – С. 80–102. https://doi.org/10.1134/s0005231019120055

12. Метельский, А. В. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа / А. В. Метельский, В. Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 265–285. https://doi.org/10.31857/S0374064121020138

13. Хартовский, В. Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей / В. Е. Хартовский. – Гродно: ГрГУ, 2022. – 500 с.

14. Хартовский, В. Е. Проектирование асимптотических наблюдателей для линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. – 2022. – Т. 60. – С. 114–136. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-07

15. Хартовский, В. Е. Оценка решения асимптотически наблюдаемых линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / В. Е. Хартовский // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. – 2023. – Т. 33, вып. 2. – С. 329–347. https://doi.org/10.35634/vm230210

16. Хартовский, В. Е. О некоторых задачах управляемости и наблюдаемости для дифференциально-алгебраических систем с последействием / В. Е. Хартовский // Тр. Ин-та математики. – 2021. – Т. 29, № 1–2. – С. 126–137.

17. Метельский, А. В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором / А. В. Метельский // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1436–1452.

18. Watanabe, K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays / K. Watanabe // IEEE Trans. Autom. Control. – 1986. – Vol. 31, № 6. – P. 543–550. https://doi.org/10.1109/tac.1986.1104336

References

1. Luenberger D. G. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, no. 6, pp. 596–602. https://doi.org/10.1109/tac.1971.1099826

2. Sename O. New trends in design of observers for time-delay systems. *Kybernetika*, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 427–458.

3. Zheng G., Bejarano F. J. Observer design for linear singular time-delay systems. *Automatica*, 2017, vol. 80, no. 6, pp. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.025

4. Hu G. D. A Separation Property of the Observer-Based Stabilizing Controller for Linear Delay Systems. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 4, pp. 763–772. https://doi.org/10.1134/S0037446621040182

5. Hu G. D. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems. *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, no. 4, pp. 789–800. https://doi.org/10.1134/s003744662204019x

6. Il'In A. V., Budanova A. V., Fomichev V. V. Synthesis of observers for asymptotically observable time delay systems. *Doklady Akademii nauk*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 129–132 (in Russian). https://doi.org/10.7868/s0869565213040051

7. Brivadis L., Andrieu V., Serres U., Gauthier J.-P. Luenberger Observers for Infinite-Dimensional Systems, Back and Forth Nudging, and Application to a Crystallization Process. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, no. 2, pp. 857–886. https://doi.org/10.1137/20m1329020

8. Metel'skii A. V. Construction of Observers for a Delay Differential System with One-Dimensional Output. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 390–403. https://doi.org/10.1134/s0012266119030121

9. Khartovskii V. E. Synthesis of observers for linear systems of neutral type. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 404–417. https://doi.org/10.1134/s0012266119030133

10. Khartovskii V. E. Asymptotic estimates of solutions of linear time-invariant systems of the neutral type with commensurable delays. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 12, pp. 1649–1664. https://doi.org/10.1134/s0012266119120115

11. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Finite observer design for linear systems of neutral type. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 12, pp. 2152–2169. https://doi.org/10.1134/s0005117919120051

12. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Exact reconstruction of the solution for linear neutral type systems. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 251–271. https://doi.org/10.1134/s0012266121020130

13. Khartovskii V. E. *Control of Linear Systems of Neutral Type: Qualitative Analysis and Implementation of Feedback*. Grodno, GrSU, 2022. 500 p. (in Russian).

14. Khartovskii V. E. Designing asymptotic observers for linear completely regular differential algebraic systems with delay. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 114–136 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-07

15. Khartovskii V. E. Estimation of the solution of asymptotically observable linear completely regular differential-algebraic systems with delay. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, no. 2, pp. 329–347 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230210

16. Khartovskii V. E. On some problems of controllability and observability for differential-algebraic systems with aftereffect. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2021, vol. 29, no. 1–2, pp. 126–137 (in Russian).

17. Metel'skii A. V. Spectral reduction, complete damping, and stabilization of a delay system by a single controller. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1405–1422. https://doi.org/10.1134/s0012266113110086

18. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 1986, vol. 31, no. 6, pp. 543–550. https://doi.org/10.1109/tac.1986.1104336

Информация об авторе

Хартовский Вадим Евгеньевич – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: hartovskij@grsu.by, hartows@mail.ru. https://orcid.org/0009-0009-7531-8711

Information about the author

Vadim E. Khartovskii – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Logistics and Methods of Control, Yanka Kupala State University of Grodno, (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: hartovskij@grsu.by, hartows@mail.ru