

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.6

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-216-224>

Поступила в редакцию 18.03.2024

Received 18.03.2024

М. М. Чуйко<sup>1</sup>, О. М. Королёва<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

<sup>2</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

**Аннотация.** Построен конечно-разностный вычислительный алгоритм решения смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности, заданной в двумерных областях сложной формы с использованием обобщенных криволинейных координат. Физическая область отображается в расчетную область (единичный квадрат) в пространстве обобщенных координат. Исходная задача записывается в обобщенных криволинейных координатах и аппроксимируется на равномерной сетке в расчетной области. Полученные результаты отображаются на неравномерную разностную сетку, построенную в физической области. Построены аппроксимации второго порядка смешанных краевых условий Неймана – Дирихле. Приведены результаты решения краевых задач в областях сложной формы, подтверждающие второй порядок точности вычислительного алгоритма.

**Ключевые слова:** обобщенные криволинейные координаты, смешанная краевая задача, конечно-разностные методы, разностные схемы

**Для цитирования.** Чуйко, М. М. Численное решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности в двумерных областях сложной формы / М. М. Чуйко, О. М. Королёва // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2024. – Т. 60, № 3. – С. 216–224. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-216-224>

Mikhail M. Chuiko<sup>1</sup>, Olga M. Korolyova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

<sup>2</sup>*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*

## NUMERICAL SOLUTION OF THE MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION IN TWO-DIMENSIONAL DOMAINS OF COMPLEX SHAPE

**Abstract.** A finite-difference computational algorithm is proposed for solving a mixed boundary value problem for heat equation given in a two-dimensional domains of complex shape. To solve the problem, generalized curvilinear coordinates are used. The physical domain is mapped to the computational domain (unit square) in the space of generalized coordinates. The original problem is written in curvilinear coordinates and approximated on a uniform grid in the computational domain. The obtained results are mapped on a non-uniform boundary-fitted difference grid in the physical domain. The second-order approximations of mixed Neumann – Dirichlet boundary conditions are constructed. The results of computational experiments are presented. The second order of accuracy of the presented computational algorithm is confirmed.

**Keywords:** generalized curvilinear coordinates, mixed boundary value problem, finite-difference methods, difference schemes

**For citation.** Chuiko M. M., Korolyova O. M. Numerical solution of the mixed boundary value problem for the heat equation in two-dimensional domains of complex shape. *Vesti Natsyynal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 216–224 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-216-224>

**Введение.** Один из подходов к решению дифференциальных уравнений в сложных областях состоит в построении конечно-разностных методов с использованием декартовых разностных сеток: метод скошенных ячеек (cut cell method) [1, 2], метод погруженной границы (immersed boundary method) [3, 4], метод погруженных интерфейсов (immersed interface method) [5, 6], а также метод фиктивных областей (fictitious domains method) [7]. Краткий обзор современных подходов к численному решению уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости в областях с криволинейной границей приведен в [8]. При использовании декартовых сеток возникает необходимость применения сложных интерполяций при аппроксимации краевых условий на криволинейной границе, что может приводить к локальной потере точности численного решения.

Будем называть нерегулярными односвязные двумерные области сложной формы, границы которых не совпадают с координатными линиями используемой системы координат. Решение исходной задачи в нерегулярной области методом фиктивных областей сводится к решению вспомогательной задачи в регулярной (прямоугольной) области, содержащей исходную область. Независимо от гладкости коэффициентов уравнений исходной задачи метод приводит к вспомогательным уравнениям с сильно меняющимися коэффициентами. Недостатком метода является потеря точности из-за плохой обусловленности системы разностных уравнений, возникающей из-за присутствия во вспомогательных уравнениях малого параметра.

Другим подходом к приближенному решению уравнений в частных производных в областях сложной формы является введение обобщенных криволинейных координат, отображающих исходную область в физическом пространстве в параметрический квадрат в расчетном пространстве криволинейных координат [9]. Исходные уравнения преобразуются к новым независимым переменным и решаются в расчетном пространстве на прямоугольной разностной сетке, что позволяет использовать классические методы теории разностных схем.

Введение обобщенных координат на дискретном уровне предполагает построение в нерегулярной области согласованной с границей области разностной сетки [10], являющейся преобразованием прямоугольной сетки в параметрическом квадрате. Координаты узлов построенной сетки используются для аппроксимации входящих в полученные уравнения метрических коэффициентов. Отклонение от ортогональности и равномерности разностной сетки в физической области может влиять на гладкость и точность численного решения [9, 11].

Одной из проблем этого подхода считается усложнение исходных уравнений в связи с появлением в преобразованных уравнениях смешанных производных. Консервативные разностные схемы для уравнений со смешанными производными были предложены А. А. Самарским, В. Б. Андреевым [12, 13]. В [14] для эллиптических и параболических уравнений со смешанными производными на основе двух консервативных схем из [12] построены разностные схемы, удовлетворяющие одновременно свойствам монотонности и консервативности в случае, если коэффициенты при смешанных производных либо положительные, либо отрицательные. В [15] для эллиптических уравнений со знакопеременными коэффициентами при смешанных производных построены разностные схемы второго порядка аппроксимации, удовлетворяющие одновременно свойствам монотонности и консервативности. Свойство монотонности гарантирует хорошую обусловленность системы линейных алгебраических уравнений, так как элементы матрицы удовлетворяют свойству диагонального преобладания, а свойство консервативности гарантирует выполнение законов сохранения. В [16] построены монотонные разностные схемы второго порядка точности для двумерного квазилинейного параболического уравнения со смешанными производными и краевыми условиями первого рода.

В случае задания краевых условий Неймана для сохранения второго порядка аппроксимации по пространственным переменным используются 2 подхода. Первый состоит в построении разностных сеток с фиктивными узлами и аппроксимации краевых условий с использованием выхода за границу области [17]. Второй заключается в использовании аппроксимации исходного уравнения на границе области для повышения порядка аппроксимации краевых условий. Так, в [18] при решении смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в нерегулярных двумерных областях для аппроксимации краевых условий Неймана использовалась аппроксимация на границе уравнения Пуассона.

В данной работе реализованы разностные схемы для решения начально-краевой задачи Дирихле – Неймана для уравнения теплопроводности в регулярной двумерной области, аппроксимирующие дифференциальную задачу со вторым порядком; построены аппроксимации граничного условия второго рода со вторым порядком. При построении вычислительного алгоритма использовался переход к обобщенной криволинейной системе координат и привлечение на границе аппроксимации исходного уравнения. Приведены результаты численных экспериментов по решению начально-краевых задач Дирихле – Неймана для уравнения теплопроводности в нерегулярных двумерных областях.

**Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение теплопроводности в двумерной нерегулярной области  $\Omega_{xy}$  с граничными условиями первого и второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy},$$

$$u(x, y, t)|_{\Gamma_1} = u_0(x, y, t), \quad \Gamma_1 \in \partial\Omega_{xy}, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_2} = \mu(x, y, t), \quad \Gamma_2 \in \partial\Omega_{xy} - \Gamma_1, \quad t > 0, \quad (3)$$

где  $\partial\Omega_{xy}$  – граница области  $\Omega_{xy}$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к границе. Краевые условия (2)–(3) могут соответствовать, например, заданному распределению температуры на участке  $\Gamma_1$  границы  $\partial\Omega_{xy}$  и заданному тепловому потоку на участке  $\Gamma_2$ .

Численное решение задач в областях сложной формы удобно искать в криволинейной системе координат, координатные линии которых совпадают с границами области [9]. Введем в рассмотрение некоторое расчетное пространство  $\Omega_{\xi\eta}$ , в котором определена криволинейная система координат  $(\xi, \eta)$ . Предположим, что существует невырожденное взаимно однозначное преобразование  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ , отображающее физическую область сложной формы  $\Omega_{xy}$  в прямоугольник  $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi, \eta < 1\}$  в плоскости обобщенных криволинейных координат.

Начально-краевая задача (1)–(3) запишется в виде.

$$\left| J^{-1} \right| \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left| J^{-1} \right| \tilde{f}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u(\xi, \eta, 0) = \tilde{u}^0(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta},$$

$$u(\xi, \eta, t) = \tilde{u}_0(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{1,\xi\eta}, \quad (5)$$

$$B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = 0, 1, \quad (6)$$

$$B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \eta = 0, 1, \quad (7)$$

где

$$B_{11} = \frac{g_{22}}{|J^{-1}|}, \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{g_{12}}{|J^{-1}|}, \quad B_{22} = \frac{g_{11}}{|J^{-1}|},$$

$$g_{11} = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad g_{22} = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$\left| J^{-1} \right| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta},$$

$$\tilde{f}(\xi, \eta, t) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t), \quad \tilde{u}^0(\xi, \eta) = u^0(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \tilde{\mu}(\xi, \eta, t) = \mu(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t).$$

**Разностная схема, аппроксимация краевых условий.** В расчетной прямоугольной области  $\Omega_{\xi\eta}$  введем равномерную по обоим направлениям разностную сетку  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ ,

$$\bar{\omega}_h = \{(\xi_i, \eta_j), \quad \xi_i = ih_1, \quad i = \overline{0, N}, \quad \xi_N = 1, \quad \eta_j = jh_2, \quad j = \overline{0, M}, \quad \eta_M = 1\},$$

а на отрезке  $[0, T]$  – равномерную временную сетку с постоянным шагом  $\tau$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T\},$$

где  $\omega_h$  – множество внутренних узлов, а  $\gamma_h$  – множество граничных узлов. Будем использовать стандартные обозначения теории разностных схем [12]:

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n), \quad \hat{y} = y_i^{n+1} = y(x_i, t_{n+1}), \quad y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y,$$

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{0,x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_{t,i} = \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau}.$$

На разностной сетке  $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ , используя аппроксимации смешанных производных из [15], аппроксимируем (4) следующей разностной схемой с весами:

$$\left| J^{-1} \right|_h u_t = \left( \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Lambda_{\alpha\beta} u + \left| J^{-1} \right|_h \tilde{f} \right)^{(\sigma)}, \quad (8)$$

$$\Lambda_{11}u = (\beta_{11}u_{\bar{\xi}})_{\xi}, \quad \Lambda_{22}u = (\beta_{22}u_{\bar{\eta}})_{\eta}, \quad (9)$$

$$\Lambda_{12}u = \frac{1}{2} \left( (\beta_{12}u_{\bar{\eta}})_{\xi} + (\beta_{12}u_{\eta})_{\bar{\xi}} + (\beta_{12}^+u_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^+u_{\bar{\eta}})_{\bar{\xi}} \right), \quad (10)$$

$$\Lambda_{21}u = \frac{1}{2} \left( (\beta_{21}u_{\bar{\xi}})_{\eta} + (\beta_{21}u_{\xi})_{\bar{\eta}} + (\beta_{21}^+u_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^+u_{\bar{\xi}})_{\bar{\eta}} \right), \quad (11)$$

где  $\beta^\pm = 0,5(\beta \pm |\beta|)$ . Метрические коэффициенты  $\beta_{kl}, k, l = 1, 2$  определяются по координатам узлов  $(x, y)_{ij}$  разностной сетки, построенной в области  $\Omega_{xy}$  с использованием центральных разностей для аппроксимации соответствующих производных

$$g_{11,h} = \begin{cases} \left( x_{\xi} \right)^2 + \left( y_{\xi} \right)^2, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ (x_{\xi})^2 + (y_{\xi})^2, & \xi = 0, \\ (x_{\bar{\xi}})^2 + (y_{\bar{\xi}})^2, & \xi = 1, \end{cases} \quad g_{22,h} = \begin{cases} \left( x_{\eta} \right)^2 + \left( y_{\eta} \right)^2, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ (x_{\eta})^2 + (y_{\eta})^2, & \eta = 0, \\ (x_{\bar{\eta}})^2 + (y_{\bar{\eta}})^2, & \eta = 1, \end{cases}$$

$$g_{12,h} = \begin{cases} x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, & \xi = 0, \\ x_{\bar{\xi}}x_{\eta} + y_{\bar{\xi}}y_{\eta}, & \xi = 1, \\ x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, & \eta = 0, \\ x_{\xi}x_{\bar{\eta}} + y_{\xi}y_{\bar{\eta}}, & \eta = 1, \end{cases} \quad \left| J^{-1} \right|_h = \begin{cases} x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta}, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta}, & \xi = 0, \\ x_{\bar{\xi}}y_{\eta} - y_{\bar{\xi}}x_{\eta}, & \xi = 1, \\ x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta}, & \eta = 0, \\ x_{\xi}y_{\bar{\eta}} + y_{\xi}x_{\bar{\eta}}, & \eta = 1, \end{cases}$$

$$\beta_{11} = g_{22,h} / \left| J^{-1} \right|_h, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -g_{12,h} / \left| J^{-1} \right|_h, \quad \beta_{22} = g_{11,h} / \left| J^{-1} \right|_h.$$

Разностная схема (8) аппроксимирует (4) со вторым порядком по пространственным переменным и вторым порядком по временной переменной при  $\sigma = 0,5$ .

В граничных узлах  $(\xi_i, \eta_j) \in \Gamma_{1,\xi\eta}$  краевые условия первого рода аппроксимируются точно  $\hat{u}_{ij} = \tilde{u}_0(\xi_i, \eta_j, t_{n+1})$ .

Рассмотрим аппроксимацию краевых условий второго рода. Так, для  $\xi = 0$  из (7) имеем

$$B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = 0. \quad (12)$$

Аппроксимируем (12) на  $\xi = 0, \eta = \eta_j, t = t_{n+1}$  следующим образом:

$$\left( \beta_{11} \hat{u}_{\xi} + \beta_{12} \hat{u}_0 \right)_{0,j} = \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{h_1}{2} \left( B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) \right)_{0,j}^{n+1} + O(h_1^2 + h_2^2). \quad (13)$$

Рассмотрим способ повышения порядка аппроксимации граничного условия (12), привлекая для этого уравнение (4) на границе. Запишем уравнение (4) в виде

$$B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial B_{11}}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial B_{12}}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \left| J^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \tilde{f}(\xi, \eta, t) \right) \right|, \quad (14)$$

$$(\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}.$$

Выразим значение  $B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$  из (14) и подставим в (13). В результате получим

$$\left( \beta_{11} \hat{u}_\xi + \beta_{12} \hat{u}_\eta \right)_{0,j} + \frac{h_1}{2} \left( \frac{\partial B_{12}}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial B_{11}}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \left| J^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \tilde{f} \right) \right| \right)_{0,j}^{n+1} =$$

$$= \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{0,j}^{n+1} + O(h_1^2 + h_2^2). \quad (15)$$

Аппроксимируя дифференциальные слагаемые в левой части (15) следующим образом:

$$\left( \frac{\partial B_{12}}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{0,j}^{n+1} = \left( \beta_{12,\xi} \hat{u}_\eta \right)_{0,j} + O(h_1 + h_2^2), \quad \left( B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{0,j}^{n+1} = \left( \beta_{12,1/2,j}^+ \hat{u}_{\xi\eta} + \beta_{12,1/2,j}^- \hat{u}_{\xi\bar{\eta}} \right)_{0,j} + O(h_1 + h_2),$$

$$\left( \frac{\partial B_{11}}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{0,j}^{n+1} = \left( \beta_{11,\xi} \hat{u}_\xi \right)_{0,j} + O(h_1), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{0,j}^{n+1} = \left( \left( \beta_{21}^+ \hat{u}_\xi \right)_\eta + \left( \beta_{21}^- \hat{u}_\xi \right)_{\bar{\eta}} \right)_{0,j} + O(h_1 + h_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{0,j}^{n+1} = \left( \left( \beta_{22,1,j-1/2} \hat{u}_{\bar{\eta}} \right)_\eta \right)_{0,j} + O(h_2^2), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{0,j}^{n+1} = (u_t)_{0,j} + O(\tau),$$

запишем (15) в виде

$$\left( \beta_{11} \hat{u}_\xi + \beta_{12} \hat{u}_\eta \right)_{0,j} + \frac{h_1}{2} \times$$

$$\times \left( \beta_{12,\xi} \hat{u}_\eta + \beta_{12,1/2,j}^+ \hat{u}_{\xi\eta} + \beta_{12,1/2,j}^- \hat{u}_{\xi\bar{\eta}} + \beta_{11,\xi} \hat{u}_\xi + \left( \beta_{21}^+ \hat{u}_\xi \right)_\eta + \left( \beta_{21}^- \hat{u}_\xi \right)_{\bar{\eta}} + \left( \beta_{22,1,j-1/2} \hat{u}_{\bar{\eta}} \right)_\eta - \left| J^{-1} \right|_h (u_t - \tilde{f}) \right)_{0,j} =$$

$$= \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{0,j} + O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2). \quad (16)$$

Группируем слагаемые в (16) следующим образом:

$$\left( \left( \beta_{11} + \frac{h_1}{2} \beta_{11,\xi} \right) \hat{u}_\xi \right)_{0,j} = \beta_{11,1/2,j} \hat{u}_{\xi,0,j},$$

$$\left( \beta_{12} + \frac{h_1}{2} \beta_{12,\xi} \right) \hat{u}_\eta + \frac{h_1}{2} \left( \beta_{12,1/2,j}^+ \hat{u}_{\xi\eta} + \beta_{12,1/2,j}^- \hat{u}_{\xi\bar{\eta}} \right)_{0,j} =$$

$$= \left( \beta_{12}^+ + \beta_{12}^- \right)_{1/2,j} \frac{(\hat{u}_{\bar{\eta}} + \hat{u}_\eta)_{0,j}}{2} + \beta_{12,1/2,j}^+ \frac{\hat{u}_{\eta,1,j} - \hat{u}_{\eta,0,j}}{2} + \beta_{12,1/2,j}^- \frac{\hat{u}_{\bar{\eta},1,j} - \hat{u}_{\bar{\eta},0,j}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \beta_{12,1/2,j}^+ (\hat{u}_{\eta,1,j} + \hat{u}_{\bar{\eta},0,j}) + \beta_{12,1/2,j}^- (\hat{u}_{\bar{\eta},1,j} + \hat{u}_{\eta,0,j}) \right),$$

где  $\beta_{11,1/2,j} = 0,5(\beta_{11,0,j} + \beta_{11,1,j})$ ,  $\beta_{12,1/2,j} = 0,5(\beta_{12,0,j} + \beta_{12,1,j})$ .

В результате получим аппроксимацию второго порядка для граничного условия (12)

$$\frac{1}{2} \left( \beta_{12,1/2,j}^+ (\hat{u}_{\eta,1,j} + \hat{u}_{\bar{\eta},0,j}) + \beta_{12,1/2,j}^- (\hat{u}_{\bar{\eta},1,j} + \hat{u}_{\eta,0,j}) \right) + \beta_{11,1/2,j} \hat{u}_{\xi,0,j} +$$

$$+ \frac{h_1}{2} \left( (\beta_{22,0,j-1/2} \hat{u}_{\bar{\eta}})_{\eta} + (\beta_{21}^+ \hat{u}_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^- \hat{u}_{\xi})_{\bar{\eta}} - \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} \hat{u} \right)_{0,j} = \left( -\hat{\mu} g_{22,h}^{1/2} - \frac{h_1}{2} \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} (u + \hat{\tau} f) \right)_{0,j}.$$

Аналогичным образом строятся аппроксимации краевых условий Неймана для других участков границы криволинейного четырехугольника. Так, краевое условие

$$B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2} \tilde{\mu}(1, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = 1,$$

аппроксимируем с помощью

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\beta_{12,N-1/2,j}^+ (\hat{u}_{\eta,N,j} + \hat{u}_{\bar{\eta},N-1,j}) + \beta_{12,N-1/2,j}^- (\hat{u}_{\bar{\eta},N,j} + \hat{u}_{\eta,N-1,j})) + \beta_{11,N-1/2,j} \hat{u}_{\xi,N,j} - \\ & - \frac{h_1}{2} \left( (\beta_{22,N,j-1/2} \hat{u}_{\bar{\eta}})_{\eta} + (\beta_{21}^- \hat{u}_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^+ \hat{u}_{\xi})_{\bar{\eta}} - \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} \hat{u} \right)_{N,j} = \left( \hat{\mu} g_{22,h}^{1/2} + \frac{h_1}{2} \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} (u + \hat{\tau} f) \right)_{N,j}, \end{aligned}$$

а краевые условия

$$B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \eta = 0,$$

$$B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \eta = 1,$$

аппроксимируем с помощью разностных соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\beta_{21,i,1/2}^+ (\hat{u}_{\xi,i,1} + \hat{u}_{\bar{\xi},i,0}) + \beta_{21,i,1/2}^- (\hat{u}_{\bar{\xi},i,1} + \hat{u}_{\xi,i,0})) + \beta_{22,i,1/2} \hat{u}_{\eta,i,0} + \\ & + \frac{h_2}{2} \left( (\beta_{11,i-1/2,0} \hat{u}_{\bar{\xi}})_{\xi} + (\beta_{12}^+ \hat{u}_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^- \hat{u}_{\eta})_{\bar{\xi}} - \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} \hat{u} \right)_{i,0} = \left( -\hat{\mu} g_{11,h}^{1/2} - \frac{h_2}{2} \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} (u + \hat{\tau} f) \right)_{i,0}, \\ & \frac{1}{2} (\beta_{21,i,M-1/2}^+ (\hat{u}_{\bar{\xi},i,M-1} + \hat{u}_{\xi,i,M}) + \beta_{21,i,M-1/2}^- (\hat{u}_{\xi,i,M-1} + \hat{u}_{\bar{\xi},i,M})) + \beta_{22,i,M-1/2} \hat{u}_{\eta,i,M} - \\ & - \frac{h_2}{2} \left( (\beta_{11,i-1/2,M} \hat{u}_{\bar{\xi}})_{\xi} + (\beta_{12}^- \hat{u}_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^+ \hat{u}_{\eta})_{\bar{\xi}} - \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} \hat{u} \right)_{i,M} = \left( \hat{\mu} g_{11,h}^{1/2} + \frac{h_2}{2} \frac{|J^{-1}|_h}{\tau} (u + \hat{\tau} f) \right)_{i,M} \end{aligned}$$

соответственно.

**Численный эксперимент.** Проверка алгоритма проводилась на точном решении  $u_{ex}(x, y, t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{L_1} - t\right)\right) \cos\left(2\pi\left(\frac{y}{L_2} - t\right)\right)$  в областях  $\Omega_{1,xy}$ ,  $\Omega_{2,xy}$ , где  $L_1, L_2$  – размеры области по  $x$  и  $y$  соответственно. Правая часть дифференциального уравнения, начальные и краевые условия в (1)–(3) задавались из вида точного решения и задания границ нерегулярных областей  $\Omega_{1,xy}$  и  $\Omega_{2,xy}$ .

На рис. 1 показаны разностные сетки  $32 \times 32$ , построенные в областях  $\Omega_{1,xy}$ ,  $\Omega_{2,xy}$  и расчетной области  $\Omega_{\xi\eta}$ . Для решения девятиточечной системы разностных уравнений на каждом временном слое использовался модифицированный сильно неявный метод MSIM [19]. Критерием окончания итерационного процесса MSIM являлось выполнение условия

$$\left| u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m \right| < \varepsilon_1 \left| u_{ij}^m \right| + \varepsilon_2, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad u_{ij}^0 = u_{ij}^n.$$

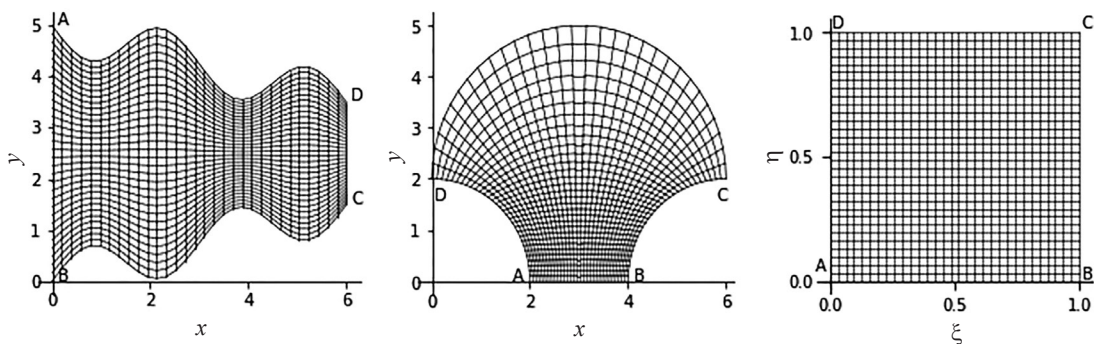


Рис. 1. Физические области  $\Omega_{1,xy}$ ,  $\Omega_{2,xy}$  и расчетная область  $\Omega_{\xi\eta}$

Fig. 1. Physical domains  $\Omega_{1,xy}$ ,  $\Omega_{2,xy}$  and computational domain  $\Omega_{\xi\eta}$

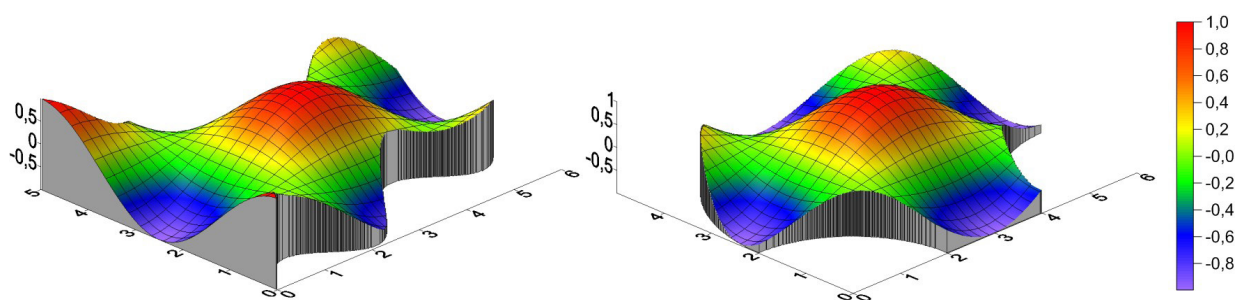


Рис. 2. Численное решение на сетке  $64 \times 64$  для  $t = 1$

Fig. 2. Numerical solution on grid  $64 \times 64$  at  $t = 1$

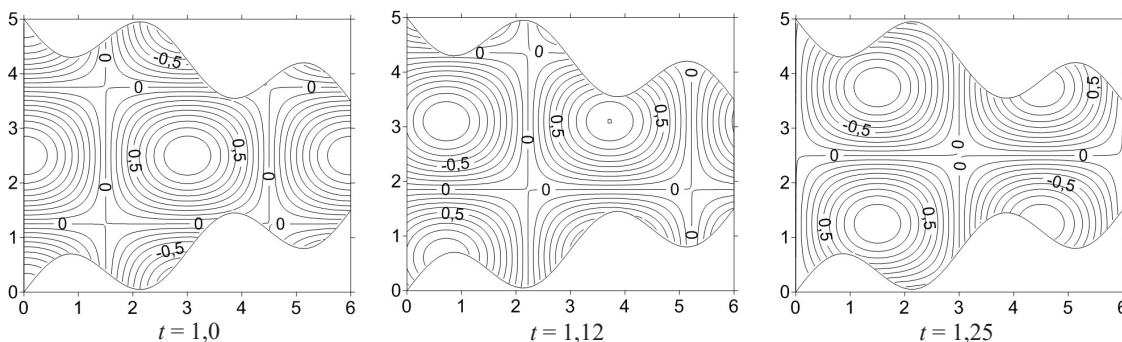


Рис. 3. Изолинии приближенного решения в области  $\Omega_{1,xy}$  для моментов времени  $t = 1,0, 1,12, 1,25$

Fig. 3. Isolines of the approximate solution in the domain  $\Omega_{1,xy}$  at times  $t = 1,0, 1,12, 1,25$

На рис. 2 представлены примеры приближенного решения в областях  $\Omega_{1,xy}$  и  $\Omega_{2,xy}$  смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности для  $t = 1$ . Изолинии приближенного решения в области  $\Omega_{1,xy}$  на последовательные моменты времени приведены на рис. 3. В качестве краевых условий в вершинах А, В, С, D криволинейного четырехугольника задавались условия первого рода (2), а на его сторонах – краевые условия второго рода (3). Использовались разностные сетки  $64 \times 64$ , построенные в  $\Omega_{1,xy}$  и  $\Omega_{2,xy}$ , шаг по времени  $\tau = 0,01$ .

В таблице приведены абсолютные погрешности  $z^N = \max_{ij} |u_{ij}^n - u_{ex}(x_{ij}, y_{ij}, t_n)|$  разностного решения на последовательности разностных сеток  $N \times N$  и временных шагов  $\tau$  для различных способов задания смешанных краевых условий на границах областей. В фигурных скобках приведено количество итераций метода MSIM на  $n$ -м временном слое. Результаты численных экспериментов подтверждают второй порядок точности алгоритма.

**Погрешность для задач Дирихле (I) и Неймана (II)  
с различными способами задания граничных условий для  $t = 1,0$**

**Error for the Dirichlet (I) and Neumann (II) problems with different setting of boundary conditions at  $t = 1.0$**

Краевые условия Boundary conditions	$\Omega_{1,xy}$			$\Omega_{2,xy}$		
	$32 \times 32$	$64 \times 64$	$128 \times 128$	$32 \times 32$	$64 \times 64$	$128 \times 128$
$N \times N$						
$\tau$	0,02	0,01	0,005	0,02	0,01	0,005
I на ABCD	0,00757 {6}	0,00192 {9}	0,00048 {15}	0,00591 {6}	0,00146 {9}	0,00037 {15}
II AB ( $\eta = 0$ )	0,03031 {6}	0,00759 {9}	0,00188 {15}	0,01007 {7}	0,00260 {10}	0,00065 {15}
II DC ( $\eta = 1$ )	0,01708 {7}	0,00452 {11}	0,00115 {18}	0,03498 {6}	0,00918 {9}	0,00241 {15}
II AD ( $\xi = 0$ )	0,02630 {8}	0,00774 {11}	0,00204 {18}	0,01971 {6}	0,00558 {9}	0,00145 {15}
II BC ( $\xi = 1$ )	0,03185 {6}	0,00830 {9}	0,00216 {15}	0,01931 {7}	0,00520 {10}	0,00133 {16}
II кроме A, B, C, D	0,03679 {8}	0,01106 {10}	0,00312 {18}	0,03500 {7}	0,00919 {10}	0,00242 {16}

Следует отметить, что построенные в статье аппроксимации краевых условий допускают одновременное задание условий разных типов (Дирихле, Неймана) на отдельных участках сторон криволинейного четырехугольника.

**Список использованных источников**

- Ingram, D. M. Developments in cartesian cut cell methods / D. M. Ingram, D. M. Causton, C. G. Mingham // *Math. Comput. Simul.* – 2003. – Vol. 61, № 3–6. – P. 561–572. [https://doi.org/10.1016/s0378-4754\(02\)00107-6](https://doi.org/10.1016/s0378-4754(02)00107-6)
- Kirkpatrick, M. P. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid / M. P. Kirkpatrick, S. W. Armfield, J. H. Kent // *J. Comput. Phys.* – 2003. – Vol. 184, № 1. – P. 1–36. [https://doi.org/10.1016/s0021-9991\(02\)00013-x](https://doi.org/10.1016/s0021-9991(02)00013-x)
- An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries / T. Ye [et al.] // *J. Comput. Phys.* – 1999. – Vol. 156, № 2. – P. 209–240. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6356>
- Mittal, R. Immersed boundary methods / R. Mittal, G. Iaccarino // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2005. – Vol. 37. – P. 239–261. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>
- LeVeque, R. J. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources / R. J. LeVeque, Z. Li // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1994. – Vol. 31, № 4. – P. 1019–1044. <https://doi.org/10.1137/0731054>
- Li, Z. An overview of the immersed interface method and its applications / Z. Li // *Taiwan. J. Math.* – 2003. – Vol. 7, № 1. – P. 1–49. <https://doi.org/10.11650/twjim/1500407515>
- Вабищевич, П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П. Н. Вабищевич. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 156 с.
- Винников, В. В. Применение декартовых сеток для решения уравнений Навье–Стокса в областях с криволинейными границами / В. В. Винников, Д. Л. Ревизников // *Мат. моделирование.* – 2005. – Т. 17, № 8. – С. 15–30.
- Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т.: пер. с англ. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.
- Thompson, J. F. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications / J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin. – New York: Elsevier North-Holland, 1985. – 483 p.
- Mastin, C. W. Error induced by coordinate systems / C. W. Mastin // *Appl. Math. Comput.* – 1982. – Vol. 10–11. – P. 31–40. [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(82\)90186-2](https://doi.org/10.1016/0096-3003(82)90186-2)
- Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1997. – 380 с.
- Самарский, А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
- Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives / A. Samarskii [et al.] // *Comput. Math. Appl.* – 2002. – Vol. 44, № 3–4. – P. 501–510. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(02\)00164-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00164-5)
- Rybak, I. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives / I. Rybak // *Math. Model. Anal.* – 2004. – Vol. 9, № 2. – P. 169–178. <https://doi.org/10.3846/13926292.2004.9637250>
- Матус, П. П. Разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений со смешанными производными / П. П. Матус, Ле Минь Хиеу, Д. Пылак // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси.* – 2019. – Т. 63, № 3. – С. 263–269. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-263-269>
- Monotone finite difference schemes for quasilinear parabolic problems with mixed boundary conditions / F. J. Gaspar [et al.] // *Comput. Meth. Appl. Math.* – 2016. – Vol. 16, № 2. – P. 231–244. <https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0002>
- Чуйко, М. М. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в нерегулярных двумерных областях / М. М. Чуйко, О. М. Королёва // *Информатика.* – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 111–120. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-111-120>
- Schneider, G. E. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem / G. E. Schneider, M. Zedan // *Numer. Heat Transf.* – 1981. – Vol. 4, № 1. – P. 1–19. <https://doi.org/10.1080/01495728108961775>



## References

1. Ingram D. M., Causon D. M., Mingham C. G. Developments in cartesian cut cell methods. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2003, vol. 61, no. 3–6, pp. 561–572. [https://doi.org/10.1016/s0378-4754\(02\)00107-6](https://doi.org/10.1016/s0378-4754(02)00107-6)
2. Kirkpatrick M. P., Armfield S. W., Kent J. H. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 184, no. 1, pp. 1–36. [https://doi.org/10.1016/s0021-9991\(02\)00013-x](https://doi.org/10.1016/s0021-9991(02)00013-x)
3. Ye T., Mittal R., Udaykumar H. S., Shyy W. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 156, no. 2, pp. 209–240. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6356>
4. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2005, vol. 37, pp. 239–261. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>
5. LeVeque R. J., Li Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1994, vol. 31, no. 4, pp. 1019–1044. <https://doi.org/10.1137/0731054>
6. Li Z. An overview of the immersed interface method and its applications. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2003, vol. 7, no. 1, pp. 1–49. <https://doi.org/10.11650/twjmath/1500407515>
7. Vabishchevich P. N. *Method of Fictitious Domains in the Problems of Mathematical Physics*. Moscow, Moscow University Publishing House, 1991. 156 p. (in Russian).
8. Vinnikov V. V., Reviznikov D. L. Cartesian grids methods for numerical solution of Navier-Stokes equations in domains with curvilinear boundaries. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulation*, 2005, vol. 17, no. 8, pp. 15–30 (in Russian).
9. Fletcher C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Vol. 2*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1988. 494 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97071-9>
10. Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*. New York, Elsevier North-Holland, 1985. 483 p.
11. Mastin C. W. Error induced by coordinate systems. *Applied Mathematics and Computation*, 1982, vol. 10–11, pp. 31–40. [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(82\)90186-2](https://doi.org/10.1016/0096-3003(82)90186-2)
12. Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes*. New York, 2001. 786 p. <https://doi.org/10.1201/9780203908518>
13. Samarskii A. A., Andreev V. B. *Difference Methods for Elliptic Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 352 p. (in Russian).
14. Samarskii A., Matus P., Mazhukin V., Mozolevski I. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 2002, vol. 44, no. 3–4, pp. 501–510. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(02\)00164-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00164-5)
15. Rybak I. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2004, vol. 9, pp. 169–178. <https://doi.org/10.3846/13926292.2004.9637250>
16. Matus P. P., Le Minh Hieu, Pylak D. Difference schemes for quasilinear parabolic equations with mixed derivatives. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 3, pp. 263–269 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-263-269>
17. Gaspar F. J., Lisbona F. J., Matus P., Tuyen V. T. K. Monotone finite difference schemes for quasilinear parabolic problems with mixed boundary conditions. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 231–244. <https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0002>
18. Chuiko M. M., Korolyova O. M. Solution of the mixed boundary problem for the Poisson equation on two-dimensional irregular domains. *Informatika = Informatics*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 111–120 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-111-120>
19. Schneider G. E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem. *Numerical Heat Transfer*, 1981, vol. 4, no. 1, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1080/01495728108961775>

## Информация об авторах

**Чуйко Михаил Матвеевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительной математики, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [mikhail.chuiko@gmail.com](mailto:mikhail.chuiko@gmail.com)

**Королёва Ольга Михайловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [korolyovaola@gmail.com](mailto:korolyovaola@gmail.com)

## Information about the authors

**Mikhail M. Chuiko** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [mikhail.chuiko@gmail.com](mailto:mikhail.chuiko@gmail.com)

**Olga M. Korolyova** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezalezhnosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [korolyovaola@gmail.com](mailto:korolyovaola@gmail.com)