

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 530.12  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-233-241>

Поступила в редакцию 06.09.2023  
 Received 06.09.2023

А. П. Рябушко<sup>1</sup>, Т. А. Жур<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Республика Беларусь

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

**Аннотация.** Предлагается основанный на ньютоновской и релятивистской теориях движения тел метод вычисления плотности темной материи, которая, как и видимая (барионная) материя, создает гравитационное поле. Используются экспериментальные данные, полученные космическими аппаратами «Пионер 10» и «Пионер 11», и множество астрономических наблюдений с целью обнаружения и установления массы темной материи в Солнечной системе, которая оказалась примерно равной массе Солнца. С помощью уравнений движения пробных тел в ньютоновском и постньютоновском приближении общей теории относительности получены расчетные формулы для вычисления плотности темной материи в трех случаях: 1) барионная и темная материи распределены в пространстве однородно (их плотность постоянна); 2) они распределены по сферически симметричным законам; 3) барионная материя распределена сферически симметрично, а темная – однородно. В объеме шара радиусом 45 а. е. с центром в центре тяжести Солнца на основании известных экспериментальных данных вычислена усредненная плотность находящейся в нем газопылевой и реликтовой материй, равная  $1,26 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . В этом же объеме плотность темной материи во всех трех случаях изменяется согласно выведенным расчетным формулам в пределах от  $3,38 \cdot 10^{-16}$  до  $3,34 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , что дает превосходство темной материи над барионной от 2,68 до 2,72 раза. Приведенные числовые оценки могут меняться при изменении использованных экспериментальных данных. Также в работе содержится краткое обсуждение других методик вычисления плотности темной материи в космосе и сравнение с нашими результатами.

**Ключевые слова:** ньютоновское и постньютоновское приближение, пробное тело, плотность темной материи, уравнения движения

**Для цитирования.** Рябушко, А. П. Определение плотности темной материи в Солнечной системе / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 3. – С. 233–241. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-233-241>

Anton P. Ryabushko<sup>1</sup>, Tatyana A. Zhur<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Republic of Belarus

## DETERMINATION OF THE DENSITY OF DARK MATTER IN THE SOLAR SYSTEM

**Abstract.** A method based on the Newtonian and relativistic theories of body motion is proposed for calculating the density of dark matter, which, like visible (baryonic) matter, creates a gravitational field. Experimental data obtained by the Pioneer 10 and Pioneer 11 spacecraft and a variety of astronomical observations are used to detect and establish the mass of dark matter in the solar system, which turned out to be approximately equal to the mass of the Sun. Using the equations of motion of test bodies in the Newtonian and post-Newtonian approximations of the general theory of relativity, calculation formulas are obtained for calculating the density of dark matter in three cases: 1) baryonic and dark matter are uniformly distributed in space (their density is constant); 2) they are distributed according to spherically symmetrical laws; 3) baryonic matter is distributed spherically symmetrically, while dark matter is uniformly distributed. In the volume of a sphere with radius of 45 a. u. with the center in the center of gravity of the Sun, on the basis of known experimental data, the average density of the gas-dust and relict matter located in it is calculated, equal to  $1,26 \cdot 10^{-16} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . In the same volume, the density of dark matter in all three cases varies according to the derived calculation formulas in the range from  $3,38 \cdot 10^{-16}$  to  $3,34 \cdot 10^{-16} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ , which gives the superiority of dark matter over baryonic one from 2.68 to 2.72 times. The given numerical estimates may change when the experimental data used change. The paper also contains a brief discussion of other methods for calculating the density of dark matter in space and a comparison with our results.

**Keywords:** Newtonian and post-Newtonian approximation, test body, dark matter density, equations of motion

**For citation.** Ryabushko A. P., Zhur T. A. Determination of the density of dark matter in the Solar system. *Vestsi Natsyonal'най akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 233–241 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-233-241>

**Введение.** В XX веке в области астрофизики возникла так называемая проблема темной материи, суть которой состоит в следующем. Наблюдения за скоплениями галактик и поведением звезд на периферии нашей Галактики (Млечный Путь) показали, что эти скопления, а также сами галактики, являются гравитационно-устойчивыми образованиями. Однако наблюдаемая (видимая) масса галактик, межгалактическая среда, а также масса самих галактик, недостаточны для их гравитационной устойчивости. Многочисленные исследования поведения звезд на периферии Галактики показали, что их поступательные скорости вокруг центра Галактики настолько велики, что под действием центробежных сил звезды должны удаляться от центра, но этого не происходит. Аналогичная ситуация наблюдается для скопления галактик: периферийные галактики при наблюдаемой массе их скопления должны уходить из скопления, т. е. скопление не может быть гравитационно-устойчивым, но тем не менее устойчивость наблюдается.

На эту парадоксальную ситуацию впервые обратил внимание в 1933 г. американский астрофизик Ф. Цвикки [1]. Возникла гипотеза: чтобы скопления галактик и сами галактики были гравитационно-устойчивыми, в месте их нахождения (и вообще во всем пространстве) должна существовать некая материя, обладающая гравитационными свойствами, не наблюдаемая современными приборами, как принято, из-за очень слабого практического отсутствия электромагнитного излучения и состоящая из вещества (частиц) неизвестной природы.

Высказанная гипотеза была всерьез воспринята физиками-теоретиками и астрофизиками. В результате проведенных ими многолетних и многочисленных исследований на теоретическом и экспериментальном уровнях в настоящее время гипотеза признана правильной (см. [2–11] и др.). Однако пока еще не выяснен ряд вопросов, главными из которых, по-видимому, являются каков состав вещества темной материи и какова ее плотность и распределение в пространстве.

В настоящей работе предлагается обсуждение теоретико-экспериментальных методов, с помощью которых можно находить величину плотности темной материи  $\rho_{Т.М}$  и ее распределение в пространстве в случаях  $\rho_{Т.М} = \text{const}$  и  $\rho_{Т.М} \neq \text{const}$ . При этом используется только одно основное свойство темной материи – создавать по тому же закону, что и видимая (барионная) материя плотностью  $\rho_{\text{вид}}$ , гравитационное поле.

1. Рассмотрим случай  $\rho_{Т.М} = \text{const}$ ,  $\rho_{\text{вид}} = \text{const}$  в ньютоновском приближении (НП) общей теории относительности (ОТО). В [12] впервые выведены и проинтегрированы в НП ОТО в декартовой системе координат  $Ox^1x^2x^3$  уравнения движения пробного тела внутри газопылевого шара радиусом  $R$  с постоянной плотностью газопылевой материи в шаре  $\rho_{\text{вид}} = \text{const}$ . В центре шара находится притягивающее массивное тело (звезда) массой  $M$ . Эти уравнения движения имеют вид (см. [12, формула (8)])

$$\ddot{x}^i + \frac{\gamma M}{r^3} x^i = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho_{\text{вид}} x^i, \quad r \leq R, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$  – расстояние пробного тела  $A(x^1, x^2, x^3)$  до начала координат;  $\gamma$  – ньютоновская постоянная тяготения;  $\ddot{x}^i = d^2x^i/dt^2$  – координаты ускорения пробного тела;  $t$  – время. Так как движение пробного тела плоское, то без ограничения общности принимается  $x^3 = 0$ ,  $\dot{x}^3 = 0$ ,  $\ddot{x}^3 = 0$ , т. е. за плоскость движения пробного тела принимаем координатную плоскость  $x^3 = 0$ .

Учет гравитационного поля, создаваемого газопылевой и прочими видами материи в шаре, приводит к появлению дополнительного ускорения  $\vec{a}_{\text{вид}}$  пробного тела, которое направлено к центру и согласно правой части уравнения (1) его координаты определяются формулой

$$-a_{\text{вид}}^i = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho_{\text{вид}} x^i. \quad (2)$$

Но, как отмечено выше, космическое пространство заполнено темной материей, плотность  $\rho_{Т.М}$  которой в первом приближении многие астрофизики принимают постоянной ( $\rho_{Т.М} = \text{const}$ ) и которая, как и видимая материя, вызывает дополнительное ускорение  $\vec{a}_{Т.М}$ , координаты которого определяются формулой, аналогичной формуле (2):

$$-a_{Т.М}^i = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho_{Т.М}x^i. \quad (3)$$

Знак минус в равенствах (2) и (3) указывает на то, что ускорение направлено к центру.

В силу однородного распределения видимой и темной материй дополнительные ускорения  $\vec{a}_{\text{вид}}$  и  $\vec{a}_{Т.М}$  пробного тела коллинеарны и одинаково направлены к центру шара. Поэтому их сумма  $\vec{a}_{\text{доп}} = \vec{a}_{\text{вид}} + \vec{a}_{Т.М}$  по модулю удовлетворяет равенствам, которые в соответствии с формулами (2) и (3) имеют вид

$$|\vec{a}_{\text{доп}}| = |\vec{a}_{\text{вид}} + \vec{a}_{Т.М}| = |\vec{a}_{\text{вид}}| + |\vec{a}_{Т.М}| = \frac{4}{3}\pi\gamma(\rho_{\text{вид}} + \rho_{Т.М})r = a_{\text{доп}}. \quad (4)$$

Из (4) немедленно следует, что

$$\rho_{Т.М} = \frac{3a_{\text{доп}}}{4\pi\gamma r} - \rho_{\text{вид}}. \quad (5)$$

Заметим, что отношение  $a_{\text{доп}}/r$ , согласно (4), величина постоянная.

Таким образом, зная  $a_{\text{доп}}$  и  $\rho_{\text{вид}}$ , можем вычислить  $\rho_{Т.М}$ , хотя темная материя не наблюдаема. Величины же  $a_{\text{доп}}$  и  $\rho_{\text{вид}}$  всегда можно определить экспериментально с помощью современных астрономических и астрофизических методов наблюдения.

Впервые выведенная формула (5) может быть использована, например, в планетарных системах.

**Пример 1.** В Солнечной системе осуществлен следующий эксперимент. С целью исследования межпланетарного пространства в 1972 и 1973 гг. были запущены космические аппараты «Пионер 10» и «Пионер 11». После тщательной обработки переданной ими информации при их движении к Юпитеру, Сатурну и далее в открытый космос выяснилось, что на космические аппараты, кроме ускорений, вызываемых гравитационными полями Солнца и планет со спутниками, воздействовало некоторое дополнительное неизвестной природы ускорение, которое было строго направлено на Солнце в диапазоне расстояний от него 20–70 а. е. (1 а. е. =  $1,5 \cdot 10^{13}$  см – астрономическая единица, равная среднему расстоянию Земли до Солнца) и по модулю равнялось величине (см. обзорные работы [9, 13, 14])

$$a_p = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}. \quad (6)$$

Используем предположение о том, что это дополнительное пионер-аномальное ускорение  $a_p$  является дополнительным ускорением  $a_{\text{доп}}$ , т. е.  $a_{\text{доп}} = a_p$ . Что касается плотности  $\rho_{\text{вид}}$ , то в Солнечной системе проведено множество исследований и экспериментов по вычислению ее значений. Как выяснилось в связи с бурным прогрессом в области методов и точности наблюдательной техники, в Солнечной системе находится, кроме газопылевой среды, огромное количество  $\sim 10^{13}$  малых тел, образующих пояса и облака Эджеверса – Койпера, Хиллса, Оорта, семейства комет Юпитера, транснептуновых и других объектов (см. обзоры на эту тему в [5, 15–17]).

Усреднив массу всех вышеупомянутых объектов, содержащихся в объеме  $V$  от 0 до 45 а. е., по этому объему  $V$  получим (см., напр., [17], где содержатся нужные величины) усредненную плотность темной материи в этом объеме:

$$\rho_{\text{вид}} \approx 1,26 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (7)$$

Для сравнения отметим, что  $\rho_{С.с}$  во всей Солнечной системе, радиус которой  $R = 2 \cdot 10^5$  а. е. (см., напр., [15]), имеет значение  $\rho_{С.с} \approx 3 \cdot 10^{-23} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Далее по формуле (5) в Солнечной системе, согласно среднему значению ускорения  $a_p$  Пионер-аномалии  $8,74 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ , из (6) (соответствует примерно расстоянию  $r = 45$  а. е.  $\approx 6,75 \cdot 10^{14}$  см) и плотности  $\rho_{\text{вид}}$  из (7) вычисляем значение  $\rho_{Т.М}$ :

$$\begin{aligned} \rho_{Т.М} &= \left( \frac{3 \cdot 8,74 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6,75 \cdot 10^{14}} - 1,26 \cdot 10^{-16} \right) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} = \\ &= 4,64 \cdot 10^{-16} - 1,26 \cdot 10^{-16} = 3,38 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} = 2,68 \cdot \rho_{\text{вид}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видим,  $\rho_{Т.М}$  превышает  $\rho_{вид}$  примерно в 2,68 раза, но следует иметь в виду, что уточнение экспериментальных значений  $a_p$  и  $\rho_{вид}$  из (6) и (7) приведет к уточнению равенства (8), вместо которого, например, получим

$$\rho_{Т.М} = k\rho_{вид}, \quad (9)$$

где  $k \neq 2,68$ .

2. Рассмотрим случай неоднородного распределения видимой и темной материй, когда в НП ОТО

$$\rho_{вид} = \rho_{вид}^0 \left(1 - k_1 \frac{r}{R}\right), \quad k_1 r \leq R, \quad r \leq R; \quad (10)$$

$$\rho_{Т.М} = \rho_{Т.М}^0 \left(1 - k_2 \frac{r}{R}\right), \quad k_2 r \leq R, \quad r \leq R, \quad (11)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – некоторые положительные постоянные безразмерные числа, т. е. видимая и темная материи распределены в шаре радиусом  $R$  по сферически симметричным законам с разными плотностями в центре шара  $\rho_{вид}^0$  и  $\rho_{Т.М}^0$  и разными темпами убывания плотностей при  $r \rightarrow R$  в зависимости от значений чисел  $k_1$  и  $k_2$ .

В [18] были впервые выведены ньютоновские и релятивистские уравнения движения пробного тела в шаре со сферически симметричным распределением газопылевой материи или материи иного вида в нем. Если имеем плотность (10), то уравнения движения представимы в виде

$$\ddot{x}^i + \frac{\gamma M}{r^3} x^i = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho_{вид}^0 x^i + \pi \gamma \rho_{вид}^0 k_1 \frac{r}{R} x^i, \quad k_1 r \leq R, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Так как видимая и темная материи совместно заполняют шар, то в среде с плотностью (10) плюс (11) имеем

$$\rho_{\Sigma} = \rho_{вид} + \rho_{Т.М} = \left(\rho_{вид}^0 + \rho_{Т.М}^0\right) \left(1 - \frac{k_1 \rho_{вид}^0 + k_2 \rho_{Т.М}^0}{\rho_{вид}^0 + \rho_{Т.М}^0} \cdot \frac{r}{R}\right) \quad (13)$$

и получаем (по аналогии с уравнением (12)) уравнения движения пробного тела в среде, содержащей видимую и темную материи:

$$\ddot{x}^i + \frac{\gamma M}{r^3} x^i = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho_{\Sigma}^0 x^i + \pi \gamma \left(k_1 \rho_{вид}^0 + k_2 \rho_{Т.М}^0\right) \frac{r}{R} x^i, \quad (14)$$

где введено обозначение  $\rho_{\Sigma}^0 = \rho_{вид}^0 + \rho_{Т.М}^0$ .

Правая часть уравнения (14) дает координаты дополнительного ускорения  $a_{\Sigma}^i$  пробного тела, обязанного видимой и темной материям плотностью (13), находящимся в шаре:

$$-a_{\Sigma}^i = -\frac{4}{3} \pi \gamma \left(\rho_{вид}^0 + \rho_{Т.М}^0\right) x^i + \pi \gamma \left(k_1 \rho_{вид}^0 + k_2 \rho_{Т.М}^0\right) \frac{r}{R} x^i. \quad (15)$$

Зная координаты  $a_{\Sigma}^i$  дополнительного ускорения  $\vec{a}_{\Sigma}$ , находим, воспользовавшись (15), его модуль  $a_{\Sigma} = |\vec{a}_{\Sigma}| = \left[ \left(a_{\Sigma}^1\right)^2 + \left(a_{\Sigma}^2\right)^2 \right]^{1/2}$ :

$$a_{\Sigma} = \left[ \frac{4}{3} \left(\rho_{вид}^0 + \rho_{Т.М}^0\right) - \left(k_1 \rho_{вид}^0 + k_2 \rho_{Т.М}^0\right) \frac{r}{R} \right] \pi \gamma r. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) относительно  $\rho_{Т.М}^0$  дает

$$\rho_{Т.М}^0 = \left[ \frac{a_{\Sigma}}{\pi \gamma r} - \left(\frac{4}{3} - \frac{k_1 r}{R}\right) \rho_{вид}^0 \right] \left(\frac{4}{3} - \frac{k_2 r}{R}\right)^{-1}. \quad (17)$$

Законы распределения плотностей (10), (11) и решение (17) позволяют установить окончательную формулу, выражающую закон распределения плотности темной материи, определяемый экспериментальными значениями  $a_{\Sigma}$  и  $\rho_{вид}$ , полученными на расстоянии  $r = r_0$ , и в силу сферической симметрии распределения плотностей (10), (11) имеющий вид

$$\rho_{\text{Т.М}} = \left[ \frac{a_{\Sigma}}{\pi\gamma r_0} - \left( \frac{4}{3} - \frac{k_1 r_0}{R} \right) \left( 1 - \frac{k_1 r_0}{R} \right)^{-1} \rho_{\text{вид}} \right] \left( \frac{4}{3} - \frac{k_2 r_0}{R} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{k_2 r}{R} \right). \quad (18)$$

Закон (18) применим в любой планетарной системе, в частности, и в Солнечной системе.

**Пример 2.** Предположим, что в Солнечной системе видимая и темная материи распределены по законам (10), (11) при  $k_1 = k_2 = 1$ , а  $R = 2 \cdot 10^5$  а. е. – радиус Солнечной системы по мнению специалистов (см., напр., [15, 19]). При рассмотрении примера 1 мы воспользовались экспериментальными данными, полученными космическими аппаратами «Пионер 10» и «Пионер 11» для их среднего дополнительного ускорения на расстоянии от Солнца  $r_0 = 45$  а. е. и усреднением плотности (7)

$$a_{\Sigma} = a_p \approx 8,74 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}, \quad \rho_{\text{вид}} \approx 1,26 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (19)$$

В нашем примере 2 экспериментальные данные (19) с помощью формулы (18) позволяют немедленно оценить  $\rho_{\text{Т.М}}$  при  $r_0 = 45$  а. е. =  $r$ :

$$\rho_{\text{Т.М}}(45 \text{ а. е.}) \approx 3,39 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} = 2,69 \rho_{\text{вид}}. \quad (20)$$

С помощью законов распределения (10) и (11), где  $k_1 = k_2 = 1$ , получаем при  $r_0 = 45$  а. е. значения  $\rho_{\text{вид}}^0$  и  $\rho_{\text{Т.М}}^0$ :

$$\rho_{\text{вид}}^0 \approx 1,26 \cdot 10^{-16} (1 + 2,25 \cdot 10^{-4}) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (21)$$

$$\rho_{\text{Т.М}}^0 \approx 3,39 \cdot 10^{-16} (1 + 2,25 \cdot 10^{-4}) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (22)$$

Таким образом, в примере 2, согласно сделанным предположениям и указанным экспериментальным данным, имеем следующие законы распределения плотностей в диапазоне  $0 \leq r \leq R = 2 \cdot 10^5$  а. е.):

$$\rho_{\text{вид}}(r) \approx 1,26 \cdot 10^{-16} (1 + 2,25 \cdot 10^{-4}) \left( 1 - \frac{r}{2 \cdot 10^5} \right) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (23)$$

$$\rho_{\text{Т.М}}(r) \approx 3,39 \cdot 10^{-16} (1 + 2,25 \cdot 10^{-4}) \left( 1 - \frac{r}{2 \cdot 10^5} \right) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (24)$$

$$\rho_{\Sigma}(r) \approx \rho_{\text{вид}}(r) + \rho_{\text{Т.М}}(r) = 4,65 \cdot 10^{-16} (1 + 2,25 \cdot 10^{-4}) (1 - 0,5 \cdot 10^{-5} r) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (25)$$

Как видим, в указанном диапазоне, т. е. в Солнечной системе, при любом  $r$ , согласно законам (23), (24), имеем

$$\rho_{\text{Т.М}}(r) \approx 2,69 \rho_{\text{вид}}(r), \quad 0 \leq r \leq R. \quad (26)$$

3. Можно выделить смешанный случай, когда в шаре радиусом  $R$  видимая материя распределена сферически симметрично:

$$\rho_{\text{вид}} = \rho_{\text{вид}}^0 \left( 1 - \frac{r}{R} \right), \quad 0 \leq r \leq R; \quad \rho_{\text{вид}} = 0, \quad r > R, \quad (27)$$

а темная материя распределена в шаре однородно, т. е.

$$\rho_{\text{Т.М}} = \rho_{\text{Т.М}}^0 = \text{const}, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (28)$$

Уравнения движения пробного тела в шаре при учете  $\rho_{\text{вид}}$  из (27) имеют вид (12) при  $k_1 = 1$ . Учет еще и темной материи приводит к уравнениям движения (14), где  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$ . Далее при тех же  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 0$  с помощью (17) находим:

$$\rho_{\text{Т.М}} = \rho_{\text{Т.М}}^0 = \frac{3}{4} \left[ \frac{a_{\Sigma}}{\pi\gamma r_0} - \left( \frac{4}{3} - \frac{r_0}{R} \right) \left( 1 - \frac{r_0}{R} \right)^{-1} \rho_{\text{вид}} \right], \quad (29)$$

где экспериментальные величины  $a_{\Sigma}$  и  $\rho_{\text{вид}}$  получены при  $r = r_0$ .

В случае Солнечной системы при  $r_0 = 45$  а. е. и экспериментальных значениях  $a_{\Sigma}$  и  $\rho_{\text{вид}}$  из (19) находим плотность темной материи по формуле (29):

$$\rho_{Т.М} = \rho_{Т.М}^0 \approx 3,06 \cdot 10^{-16} \text{ Г} \cdot \text{см}^{-3} \approx 2,43 \rho_{\text{вид}}. \quad (30)$$

**Эксперимент на релятивистском уровне.** Изложенные выше исследования проведены в рамках НП ОТО, в частности, дополнительное ускорение пробного тела, возникающее благодаря учету гравитационного поля видимой и темной материй, находилось из уравнений движения на ньютоновском уровне (см. уравнения (1), (12), (14)). Уравнения движения в постньютоновском приближении (ПНП) ОТО содержат релятивистские добавки к ньютоновским добавкам ускорения за счет гравитационного поля среды (см., напр., [12, 18]). В этих работах получены уравнения движения пробного тела в среде плотностью  $\rho = \text{const}$ :

$$\ddot{x}^i + \frac{\gamma M}{r^3} x^i = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho x^i + f^i, \quad (31)$$

где с точностью до плотности среды  $\rho$  в первой степени релятивистская добавка к ньютоновскому ускорению

$$f^i = \frac{\gamma M}{c^2 r^3} \left[ \left( \frac{4\gamma M}{r} - v^2 \right) x^i + 4\dot{x}^i (x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2) \right] + \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2} \left[ \frac{4}{3} (x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2) \dot{x}^i + x^i \left( \frac{\gamma M}{R} - \frac{1}{3} v^2 - \frac{11}{6} \frac{\gamma M}{r} + \frac{\gamma M R^2}{r^3} \right) \right]; \quad (32)$$

входящие в квадратные скобки ньютоновские величины:  $c$  – скорость света ( $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ),  $v$  – модуль скорости пробного тела, величина  $v$  которого находится из интеграла энергии и который в случае движения тела по эллиптической орбите имеет вид ( $a$  – большая полуось эллиптической орбиты)

$$v^2 = \gamma M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (33)$$

Релятивистская добавка  $f^i$  состоит из двух частей-слагаемых, одна из которых ( $f_0^i$ ) не зависит, а другая ( $f_\rho^i$ ) зависит от среды:  $f^i = f_0^i + f_\rho^i$ , где

$$f_0^i = \frac{\gamma M}{c^2 r^3} \left[ \left( \frac{4\gamma M}{r} - v^2 \right) x^i + 4\dot{x}^i (x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2) \right], \quad (34)$$

$$f_\rho^i = \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2} \left[ \frac{4}{3} (x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2) \dot{x}^i + x^i \left( \frac{\gamma M}{R} - \frac{1}{3} v^2 - \frac{11}{6} \frac{\gamma M}{r} + \frac{\gamma M R^2}{r^3} \right) \right]. \quad (35)$$

Координаты добавочного ускорения  $\tilde{a}_{\text{доп}}^i$ , обязанного среде плотностью  $\rho = \rho_{\text{вид}} + \tilde{\rho}_{Т.М} = \text{const}$ , на ньютоновском плюс релятивистском уровнях (которые обозначим символом  $\tilde{a}_{\text{доп}}^i$  и которые находятся экспериментально) по теории, согласно (31), (35), подчинены равенствам, в которых релятивистская добавка  $f_0^i$  из (34) не используется:

$$\tilde{a}_{\text{доп}}^i = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho x^i + f_\rho^i, \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

Модуль  $\tilde{a}_{\text{доп}}$  этого добавочного ускорения в ПНП ОТО и с точностью до первой степени  $\rho$  определяется равенством, являющимся следствием равенств (35), (36):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\text{доп}} &= |\tilde{a}_{\text{доп}}| = \left[ \left( \tilde{a}_{\text{доп}}^1 \right)^2 + \left( \tilde{a}_{\text{доп}}^2 \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \frac{4}{3} \pi \gamma (\rho_{\text{вид}} + \tilde{\rho}_{Т.М}) r \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{4}{r^2} (x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2)^2 + 3 \left( \frac{\gamma M}{R} - \frac{1}{3} v^2 - \frac{11}{6} \frac{\gamma M}{r} + \frac{\gamma M R^2}{r^3} \right) \right] \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Из (37) легко находим плотность темной материи

$$\tilde{\rho}_{\text{Т.М}} = \frac{3\tilde{a}_{\text{доп}}}{4\pi r} \{\Phi\}^{-1} - \rho_{\text{вид}}, \quad (38)$$

где  $\Phi$  совпадает с выражением в фигурных скобках равенства (37).

В НП ОТО  $\Phi = 1$  и формула (38) превращается в формулу (5). В ПНП ОТО имеем  $0 < \Phi < 1$  и, следовательно, вычисляемая плотность  $\tilde{\rho}_{\text{Т.М}}$  по формуле (38) будет несколько больше плотности  $\rho_{\text{Т.М}}$ , вычисляемой по формуле (5). Предполагается, что в обоих случаях участвующие в вычислениях ньютоновские величины  $x^i, \dot{x}^i, v, r, R, M$  и, возможно, другие принимаются одинаковыми.

**Пример 3.** Рассмотрим ситуацию примера 1, относящуюся к Солнечной системе, на релятивистском уровне. Для этого используем рабочую релятивистскую формулу (38), взяв отмеченные выше ньютоновские величины такими же, как и в примере 1. Кроме этого, также берем те же экспериментально установленные на расстоянии  $r = 45$  а. е. ускорение пробного тела  $\tilde{a}_{\text{доп}} = 8,74 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$  и плотность видимой материи (7)  $\rho_{\text{вид}} = 1,26 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Тогда находим  $\Phi \approx 0,99$  и, согласно (38),

$$\tilde{\rho}_{\text{Т.М}} \approx 4,69 \cdot 10^{-16} - 1,26 \cdot 10^{-16} = 3,43 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} = 2,72 \rho_{\text{вид}}. \quad (39)$$

Таким образом, релятивистское значение плотности темной материи оказалось примерно на  $0,05 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  больше, чем его ньютоновское значение (8).

В процессе вычисления  $\tilde{\rho}_{\text{Т.М}}$  по формуле (38) также выяснилось, что величина  $\tilde{\rho}_{\text{Т.М}}$  может значительно увеличиваться при увеличении параметра  $R$  благодаря члену  $\gamma MR^2/r^3$  в  $\Phi$  (см. в (37) последний член). Действительно, увеличение радиуса планетарной системы  $R = 2 \cdot 10^5$  а. е., например, в 2 раза влечет уменьшение значения  $\Phi$  от 0,99 до 0,95 и, следовательно, увеличение  $\tilde{\rho}_{\text{Т.М}}$  от значения  $3,34 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  до значения  $3,62 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , т. е.  $\tilde{\rho}_{\text{Т.М}}$  увеличивается на  $0,19 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , что приводит к формуле вида (9)  $\tilde{\rho}_{\text{Т.М}} \approx 2,87 \rho_{\text{вид}}$ , где  $k = 2,87$ .

**Заключительные замечания.** В настоящее время существование темной материи и ее значительное влияние на происходящие в космосе процессы общепризнаны в научном мире. Интенсивность этих процессов зависит от плотности и распределения темной материи в пространстве. Поэтому в последние два-три десятилетия ученые активно занимаются исследованиями, посвященными выяснению свойств темной материи, в частности, методикой вычисления ее плотности (см., напр., работы [9, 20–22] и приведенные в них источники).

Не ставя целью подробное рассмотрение применяемых в указанных работах методик, отметим только интересующие нас результаты.

В [20], опираясь на величину смещения перигелиев планет, движущихся в среде, и учитывая множество других ньютоновских и релятивистских эффектов, авторы дали локальные оценки сверху плотностям темной материи в окрестностях первых шести планет Солнечной системы (см. [20, табл. 7]). Согласно этим оценкам, локальная плотность темной материи в наибольшем случае (окрестность Меркурия) подчинена неравенству  $\rho_{\text{Т.М}} = 9,3 \cdot 10^{-18} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Это неравенство приводит к значительно меньшим значениям  $\rho_{\text{Т.М}}$ , чем полученным в данной работе. По нашему мнению, это произошло потому, что в [20] не был учтен эффект Пионер-аномалии.

В [21] доказывается, что в настоящее время в зоне влияния любых черных дыр находится сферически симметрично распределенная темная материя с центральной плотностью  $\rho_{\text{Т.М}}^0 \sim 10^{-14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . На периферии, вдали от черных дыр, плотность значительно уменьшается.

В [22] двумя методами, связанными с физикой близкодействия, вычислена плотность темной материи в Солнечной системе. Метод 1 дает  $\rho_{\text{Т.М}} = (1,7 \pm 0,7) \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Метод 2 позволил оценить плотность снизу:  $\rho_{\text{Т.М}} > 1,4 \cdot 10^{-17} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Эти оценки близки к нашим (8), (20), (30), (39).

В заключение подчеркнем, что предложенный в данной работе метод вычисления плотности темной материи применяется впервые.

## Список использованных источников

1. Строение звездных систем / ред. П. Н. Холопов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 628 с.
2. Стражев, В. И. К тайнам Вселенной / В. И. Стражев. – Минск: РИВШ, 2006. – 160 с.
3. Гнедин, Ю. Н. Темная материя во Вселенной: современное состояние проблемы / Ю. Н. Гнедин, М. Ю. Пятрович // Тр. Ин-та прикладной астрономии РАН. – 2008. – № 18. – С. 137–160.
4. Khlopov, M. Y. Composite dark matter and puzzles of dark matter searches / M. Y. Khlopov, A. G. Mayorov, E. Y. Soldatov // *Int. J. Mod. Phys D*. – 2010. – Vol. 19, № 8–10. – P. 1385–1395. <https://doi.org/10.1142/s0218271810017962>
5. Засов, А. В. Общая астрофизика / А. В. Засов, К. А. Постнов. – Фрязино: Век-2, 2011. – 576 с.
6. Гальпер, А. М. Гамма-астрономия и темная материя / А. М. Гальпер // *Земля и Вселенная*. – 2012. – № 5. – С. 3–17.
7. Засов, А. В. О связи распределения нейтрального водорода с темной массой в галактиках / А. В. Засов, Н. А. Терехова // *Письма в Астрон. журн.* – 2013. – Т. 39, № 5. – С. 323.
8. Асадов, В. А. Решение проблемы скрытой массы в скоплениях галактик / В. А. Асадов // *Проблемы современной науки и образования*. – 2017. – № 16 (98). – С. 10–13.
9. Meessen, A. Astrophysics and Dark Matter Theory / A. Meessen // *J. Mod. Phys*. – 2017. – Vol. 8, № 2. – P. 268–298. <https://doi.org/10.4236/jmp.2017.82018>
10. Выблй, Ю. Космология и астрофизика сегодня: темная энергия и темная материя / Ю. Выблй, И. Сивцов // *Наука и инновации*. – 2018. – № 8 (186). – С. 29–34.
11. Бурого, С. Г. Опытное свидетельство о космической газообразной темной материи Вселенной / С. Г. Бурого // *Естеств. и техн. науки*. – 2019. – № 3 (129). – С. 28–32. <https://doi.org/10.25633/etn.2019.03.15>
12. Рябушко, А. П. Релятивистские эффекты движения пробных тел в газопылевом шаре с притягивающим центром / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // *Докл. Акад. наук БССР*. – 1984. – Т. 28, № 9. – С. 806–809.
13. Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11 / J. D. Anderson [et al.] // *Phys. Rev. D*. – 2002. – Vol. 65, № 8. – P. 1–50. <https://doi.org/10.1103/physrevd.65.082004>
14. Nieto, M. M. Finding the Origin of the Pioneer Anomaly / M. M. Nieto, S. G. Turyshev // *Class. Quant. Grav.* – 2004. – Vol. 21, № 17. – P. 4005–4023. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/17/001>
15. Ипатов, С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе / С. И. Ипатов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
16. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии / Э. В. Кононович, В. И. Мороз. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 544 с.
17. Рябушко, А. П. Pioneer anomaly как реликтовое ускорение пробного тела в Солнечной системе / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. – 2009. – № 3. – С. 98–104.
18. Рябушко, А. П. Релятивистские уравнения движения пробного тела в поле тяготения неоднородного газопылевого шара с гравитирующим центром / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. – 2006. – № 3. – С. 64–71.
19. Радзиевский, В. В. Солнечная система / В. В. Радзиевский // *Физика космоса: маленькая энциклопедия*. – М.: Совет. энцикл., 1976. – С. 61–80.
20. Питьев, Н. П. Ограничения на темную материю в Солнечной системе / Н. П. Питьев, Е. В. Питьева // *Письма в Астрон. журн.* – 2013. – Т. 39, № 3. – С. 163–172.
21. Ерошенко, Ю. Н. Пики плотности темной материи вокруг первичных черных дыр / Ю. Н. Ерошенко // *Письма в Астрон. журн.* – 2016. – Т. 42, № 6. – С. 389–398.
22. Похмельных, Л. А. Плотность массы темной материи. Физика близкодействия / Л. А. Похмельных // *Вестн. науки и образования*. – 2020. – № 9–1(87). – С. 11–16.

## References

1. *Handbuch der Physik. Bd. 53 Astrophysik IV: Sternsysteme*. Berlin, Springer-Verl., 1959. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-45932-0>
2. Strazhev V. I. *To the Secrets of the Universe*. Minsk, National Institute of Higher Education, 2006. 160 p. (in Russian).
3. Gnedin U. N., Piotrovich M. U. Dark Matter in the Universe: Current State of the Problem. *Trudy Instituta prikladnoi astronomii RAN = Transactions of IAA RAS*, 2008, no. 18, pp.137–160 (in Russian).
4. Khlopov M. Y., Mayorov A. G., Soldatov E. Y. Composite dark matter and puzzles of dark matter searches. *International Journal of Modern Physics D*, 2010, vol. 19, no. 8–10, pp. 1385–1395. <https://doi.org/10.1142/s0218271810017962>
5. Zasov A. V., Postnov K. A. *General Astrophysics*. Fryazino, Vek-2 Publ., 2011. 576 p. (in Russian).
6. Galper A. M. Gamma-astronomy and Dark Matter. *Zemlya i Vseleennaya* [Earth and Universe], 2012, no. 5, pp. 3–17 (in Russian).
7. Zasov A. V., Terehova N. A. The relationship between the neutral hydrogen and dark mass in the galaxies. *Astronomy Letters*, 2013, vol. 39, no. 5, pp. 291–297. <https://doi.org/10.1134/s106377371305006x>
8. Asadov V. A. The solution of the hidden mass problem in clusters of galaxies. *Problemy sovremennoi nauki i obrazovaniya = Problems of modern Science and Education*, 2017, no. 16 (98), pp. 10–13 (in Russian).
9. Meessen A. Astrophysics and Dark Matter Theory. *Journal of Modern Physics*, 2017, vol. 8, no. 2, pp. 268–298. <https://doi.org/10.4236/jmp.2017.82018>
10. Vybyly Y. Cosmology and astrophysics today: dark energy and dark matter. *Nauka i innovatsii = The Science and Innovations*, 2018, no. 8 (186), pp. 29–34 (in Russian).



11. Burago S. G. Experimental evidence of the cosmic gaseous dark matter of the universe. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Natural and Technical Sciences*, 2019, no. 3 (129), pp. 28–32 (in Russian). <https://doi.org/10.25633/etn.2019.03.15>
12. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. Relativistic Effects of the Motion of Test Bodies in the Gas-Dust Ball with an Attractive Center. *Doklady Akademii nauk BSSR [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR]*, 1984, vol. 28, no. 9, pp. 806–809 (in Russian).
13. Anderson J. D., Laing P. A., Lau E. I., Liu A. S., Nieto M. M., Turyshev S. G. Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11. *Physical Review D*, 2002, vol. 65, no. 8, pp. 1–50. <https://doi.org/10.1103/physrevd.65.082004>
14. Nieto M. M., Turyshev S. G. Finding the Origin of the Pioneer Anomaly. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, vol. 21, no. 17, pp. 4005–4023. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/17/001>
15. Ipatov S. I. *Migration of Celestial Bodies in the Solar System*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 320 p. (in Russian).
16. Kononovich E. V., Moroz V. I. *General Course of Astronomy*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 544 p. (in Russian).
17. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Pioneer anomaly as the relict acceleration of a test body in the Solar system. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 3, pp. 98–104 (in Russian).
18. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Relativistic equations of motion of the test body in the gravitational field of an inhomogeneous gas-dust ball with a gravitational center. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2006, no. 3, pp. 64–71 (in Russian).
19. Radzievski V. V. Solar system. *Space Physics: A Little Encyclopedia*. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1976, pp. 61–80 (in Russian).
20. Pitjev N. P., Pitjeva E. V. Constraints on dark matter in the solar system. *Astronomy Letters*, 2013, vol. 39, pp. 141–149. <https://doi.org/10.1134/s1063773713020060>
21. Eroshenko Yu. N. Dark matter density peaks around primordial black holes. *Astronomy Letters*, 2016, vol. 42, pp. 347–356. <https://doi.org/10.1134/s1063773716060013>
22. Pokhmelnikh L. A. Dark matter mass density. Physics of short range. *Vestnik nauki i obrazovaniya [Bulletin of Science and Education]*, 2020, no. 9–1 (87), pp. 11–16 (in Russian).

### Информация об авторах

**Рябушко Антон Петрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220141, Минск, Республика Беларусь).

**Жур Татьяна Антоновна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики факультета предпринимательства и управления, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [tatyana-zhur@mail.ru](mailto:tatyana-zhur@mail.ru)

### Information about the authors

**Anton P. Ryabushko** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220141, Minsk, Republic of Belarus).

**Tatyana A. Zhur** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Entrepreneurship and Management, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [tatyana-zhur@mail.ru](mailto:tatyana-zhur@mail.ru)